INFOANALÍZIS2 2.SZIGORLAT

2016 november 11.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Írjuk fel a parciális deriváltfüggvényeket, ahol léteznek.

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy\ dx.$$

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$xy' + 4y = 3x^3, \quad y(1) = \frac{3}{7}.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin(2x).$$

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$$

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Írjuk fel a parciális deriváltfüggvényeket, ahol léteznek.

Megoldás. Az origó kivételével minden pontnak van olyan környezete, ahol a tört alakú képlet érvényes, így ezekben a pontokban a deriváltak formális deriválással számíthatók. **2p**
A függvény a tengelyek mentén nulla, **1p**
így a parciális deriváltak az origóban léteznek, és nullák. **1p**

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \boxed{\textbf{2p}} \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \boxed{\textbf{1p}} \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \boxed{\textbf{2p}} \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \boxed{\textbf{1p}} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

---

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy\ dx.$$

Megoldás. Az integrálási tartomány egy háromszög. **2p**
Az integrálás határainak felcserélésével **2p**

$$\int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx\ dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^\pi \left[\frac{x \sin y}{y}\right]_0^y dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^\pi \sin y\ dy = 2.$$

Bár az integrandus $y = 0$-ban nincs értelmezve, ez mégsem improprius integrál, mert a tartomány is és az integrandus is korlátos. **2p**

---

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$xy' + 4y = 3x^3, \quad y(1) = \frac{3}{7}.$$

Megoldás. Az eredeti egyenletből $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y' + \frac{4}{x} y = 3x^2.$$

A megoldóképlet alapján ($p(x) = \frac{4}{x}$, $q(x) = 3x^2$) $\boxed{\textbf{4p}}$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x^4}\left(\int 3x^2 \cdot x^4 \, dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^4}\left(3\,\frac{x^7}{7} + c\right). \end{aligned}$$

A kezdeti értékből $\boxed{\textbf{2p}}$

$$c = 0.$$

Tehát $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y(x) = \frac{3}{7} x^3. \quad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin(2x).$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x), \\ y_p''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x). \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{-4A+10B+6A}_{=2})\sin(2x)+(\underbrace{-4B-10A+6B}_{=0})\cos(2x)=2\sin(2x).$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A=\frac{1}{26},\quad B=\frac{5}{26}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá}(x) &= y_h(x)+y_p(x) \\ &= c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{26}\sin(2x)+\frac{5}{26}\cos(2x), \quad (c_1,c_2\in\mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$$

Megoldás. A konvergenciasugárra vonatkozó képlettel $\boxed{\mathbf{2p}}$:

$$\limsup\sqrt[n]{a_n}=\limsup\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}=\limsup\frac{1}{2\sqrt[n]{n^2}}=\frac{1}{2}$$

Ennek reciproka 2, tehát a konvergenciasugár 2 $\boxed{\mathbf{1p}}$. A hatványsor középpontja $x_0=1$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, így a hatványsor abszolút konvergens az $(1-2,1+2)=(-1,3)$ intervallumon $\boxed{\mathbf{2p}}$.

A végpontokban:

Ha $x=3$, akkor a sor a közismerten konvergens $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ sor $\boxed{\mathbf{2p}}$, ha $x=-1$, akkor a sor a $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ Leibniz-sor, tehát konvergens, és az előzőek szerint abszolút konvergens is $\boxed{\mathbf{1p}}$. Mindenütt máshol a sor divergens $\boxed{\mathbf{1p}}$. $\blacksquare$
