

* 1. feladat (14 pont)

Integráljuk az $f(x, y, z) := z^5 \sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) függvényt a $z = 0$ és $z = 2$ egyenletű síkok valamint az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű hengerfelület által határolt korlátos térrészen!

Mo. Jelölje H az integrálási tartományt. Hengerkoordinátákkal (2p) ($H = \underline{C}([0, 3] \times [0, 2\pi] \times [0, 2])$):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) r \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 z^5 \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} 2\pi \left(\int_0^3 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^2 z^5 \, dz \right) \stackrel{(2p)}{=} \\ &= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^3 \left[\frac{z^6}{6} \right]_{z=0}^2 \stackrel{(2p)}{=} 192\pi. \end{aligned}$$

* 2. feladat (6+6=12 pont)

Tudjuk, hogy a 2π szerint periodikus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora

$$\Phi_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sin(kx) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+).$$

a) Egyenletesen konvergens-e az f függvény Fourier-sora $\mathbb{R}$ -en?

b) Jelölje az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét Φ . Folytonos-e a Φ függvény?

Mo. a) Minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| \frac{1}{k^2} \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad (3p),$$

tehát a Weierstrass-kritérium alapján $(\Phi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^+}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en (3p).

b) Mivel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\Phi_n(f)$ folytonos (2p), és az előző rész alapján $(\Phi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en (2p), ezért Φ folytonos (2p).

* 3. feladat (14 pont)

Számítsuk ki az

$$f(x) := \begin{cases} -x & , \text{ ha } x \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját!

Mo. A definíció szerint számolunk, minden $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\omega) &\stackrel{(2\mathbf{p})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \stackrel{(1\mathbf{p})}{=} - \int_{-1}^1 x e^{-i\omega x} dx \stackrel{(2\mathbf{p})}{=} - \underbrace{\int_{-1}^1 x \cos(\omega x) dx}_{0} + i \int_{-1}^1 x \sin(\omega x) dx \stackrel{(3\mathbf{p})}{=} \\ &= i \left(\left[-x \frac{\cos(\omega x)}{\omega} \right]_{x=-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos(\omega x)}{\omega} dx \right) \stackrel{(2\mathbf{p})}{=} -2i \frac{\cos(\omega)}{\omega} + i \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega^2} \right]_{x=-1}^1 \stackrel{(2\mathbf{p})}{=} \\ &= 2i \left(\frac{\sin(\omega)}{\omega^2} - \frac{\cos(\omega)}{\omega} \right).\end{aligned}$$

Illetve

$$\mathcal{F}(f)(0) = - \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad (2\mathbf{p}).^1$$

4. feladat (12 pont)

Számítsuk ki az

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx$$

integrál értékét!

Mo.

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx &\stackrel{(2\mathbf{p})}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \stackrel{(6\mathbf{p})}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_{x=3}^b \stackrel{(2\mathbf{p})}{=} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(b)} \right) \stackrel{(2\mathbf{p})}{=} \frac{1}{\ln(3)}.\end{aligned}$$

5. feladat (14 pont)

Legyen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}.$$

Határozzuk meg f inflexiós pontjait, továbbá azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex illetve konkáv!

Mo.

$$\begin{aligned}f'(x) &= x + \frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (2\mathbf{p}) \\ f''(x) &= 1 - \frac{2}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (2\mathbf{p})\end{aligned}$$

¹A Fourier-transzformált folytonossága miatt ebből azt is megkaptuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \quad (3p).$$

	$] -\infty, 0[$	0	$] 0, \sqrt[3]{2}[$	$\sqrt[3]{2}$	$] \sqrt[3]{2}, +\infty[$	
f''	$+$	$\notin \text{Dom}(f)$	$-$	0	$+$	(6p)
f	$\smile$	$\notin \text{Dom}(f)$	$\frown$	infl. pont	$\smile$	

Előjelek:

$$f''(-1) = 3 > 0, \quad f''(1) = -1 < 0, \quad f''(2) = \frac{3}{4} > 0. \quad (1p)$$

6. feladat (7+7=14 pont)

Konvergens-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{n^2} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{n^2}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \stackrel{(2p)}{=} \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^n \stackrel{(2p)}{=} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(1p)} \frac{e^2}{e^4} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ sor konvergens **(2p)**.

b) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \stackrel{(2p)}{\geq} \frac{1}{n+1} \stackrel{(1p)}{\geq} 0,$$

és $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n+1}$ divergens **(2p)**, tehát a minoráns kritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor divergens **(2p)**.

7. feladat (4+8=12 pont)

a) Definiáljuk a Cauchy-sorozat fogalmát!

b) Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat!

Mo. a) Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n, m \geq N$ esetén $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. **(4p)**

b) Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens számsorozat, és jelölje a határértékét $A \in \mathbb{R}$, valamint legyen $\varepsilon > 0$ **(1p)**. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3p).$$

Tehát minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n, m \geq N$ -re a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\mathbf{3p}),$$

azaz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat **(1p)**.

8. feladat (4+4=8 pont)

a) Mikor nevezünk egyenletesen konvergensnek egy $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ függvényekből álló függvénysorozatot a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon?

b) Mondjuk ki a függvénysorok egyenletes konvergenciájáról szóló Weierstrass-kritériumot!

Mo. a) Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló sorozat, és jelölje $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ a pontonkénti limeszfüggvényét. Azt mondjuk, hogy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $H \subseteq \text{Dom}(f)$ **(1p)** és

$$\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\mathbf{3p})$$

b) Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat és $H \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}(f_n)$. Ha létezik olyan $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat, hogy

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sup_{x \in H} |f_n(x)| \leq b_n$ **(2p)**,
- a $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ numerikus sor konvergens **(1p)**,

akkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ függvénysor egyenletesen és abszolút konvergens a H halmazon **(1p)**.
