ANALÍZIS 1. **II. Zárthelyi** **2018. november 22.**

Mérnökinformatikus szak α-variáns Munkaidő: 75 perc

1. feladat (12 pont)

Hol és milyen típusú szakadásai vannak az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-5x+4} + \frac{x+3}{|x+3|}$$

Mivel f folytonos függvények hányadosának összege, így a nevezők zérushelyein kívül a függvény folytonos. (**2p**)

$$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \frac{-7}{28} + \lim_{x\to -3\pm} \frac{x+3}{|x+3|} = -\frac{1}{4} \pm 1,$$

így ay $x=-3$ pontban a függvénynek véges ugrása van. (**3p**) $x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$ (**1p**),

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)(x-4)} + \frac{x+3}{|x+3|}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x-1} + 1 = \frac{11}{3},$$

így az $x=4$ pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. (**3p**)

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm}\frac{x+4}{x-1} + 1 = \pm\infty,$$

így az $x=1$ pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. (**3p**)

---

2. feladat (4+12 pont)

a) Definiálja a valós értékű f függvény x_0 pontbeli deriváltját! (x_0 az értelmezési tartomány belső pontja.)

b) Deriválja az $|x-2|\cdot\sin(3x-6)$ függvényt értelmezési tartománya minden pontjában.

---

a) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, (**4p**)

b) $x>2$ esetén: $((x-2)\sin(3x-6))' \overset{\mathbf{4p}}{=} \sin(3x-6) + 3(x-2)\cos(3x-6)$

$x<2$ esetén: $(-(x-2)\sin(3x-6))' \overset{\mathbf{4p}}{=} -\sin(3x-6) - 3(x-2)\cos(3x-6)$

$x=2$ esetén $\lim_{h\to 0}\dfrac{|h|\sin(3h)}{h} = \lim_{h\to 0} 3|h|\cdot\dfrac{\sin(3h)}{3h} = 0$. (**4p**)

---

3. feladat (9+9+9+9 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arsh}(5x^2)}{\operatorname{arctg}(3x^2)}$,   *b)* $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{2}{\ln(x-1)}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$,   *d)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(2x+3)}{\operatorname{sh}(2x-5)}$

a) A határérték $\frac{0}{0}$ típusú (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh}(5x^2)}{\operatorname{arctg}(3x^2)} \overset{\mathbf{6p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10x}{\sqrt{1+25x^4}}}{\frac{6x}{1+9x^4}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{5}{3}.$$

b) A bal ill. jobb oldali határérték $\mp(\infty-\infty)$ típusú (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{2}{\ln(x-1)}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{x\ln(x-1) - 2(x-2)}{(x-2)\ln(x-1)} \overset{\mathbf{3p}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1) + \frac{x}{x-1} - 2}{\ln(x-1) + \frac{x-2}{x-1}} \overset{\mathbf{3p}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1} + \frac{x-1-(x-2)}{(x-1)^2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} 0.$$

c) A határérték 1^∞ típusú (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0} \left(e^{\ln\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x} \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{1}{2},$$

vagyis

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{ch}(2x+3)}{\operatorname{sh}(2x-5)} \overset{\mathbf{3p}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x+3} + e^{-(2x+3)}}{e^{2x-5} - e^{-(2x-5)}} \overset{\mathbf{3p}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^3 + e^{-(4x+3)}}{e^{-5} - e^{-(4x-5)}} \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{e^3}{e^{-5}} = e^8.$$

4. feladat (18 pont)
Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$

függvény szigorúan monoton. Határozza meg a függvény maximumát, illetve minimumát a $[0, 4]$ intervallumon, amennyiben létezik.

$f'(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (2x - x^2 + 3)e^{-x} \overset{\mathbf{2p}}{=} -(x - 3)(x + 1)e^{-x}$. $f'(x) > 0$, ha $-1 < x < 3$, (**2p**), tehát f szigorúan monoton növő a $(-1, 3)$ intervallumon (**2p**), és $f'(x) < 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 3$ (**2p**), tehát f szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, -1)$ és $(3, \infty)$ intervallumokon (**2p**). f folytonos, tehát a Weierstrass-tétel miatt felveszi a minimumát és a maximumát minden korlátos, zárt intervallumon (**2p**). Mivel ezeket az intervallumban található lokális szélsőértékhelyeken, vagy az intervallum szélein veszi fel, és $f(0) = -3 < 0$, $f(3) = \frac{6}{e^3} > f(4) = \frac{13}{e^4} > 0$, (mivel $e > \frac{13}{6}$, vagy mert f monoton csökken a $[3, 4]$ intervallumon), így a függvény maximuma a $[0, 4]$ intervallumon $\frac{6}{e^3}$, minimuma pedig -3. (**4p**).

---

5. feladat (18 pont)
A kétszer differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$y^3 + y^2 + 2x^2 + x = 5.$$

Határozza meg ezen függvény $(1, 1)$ pontjabeli érintőegyenesének egyenletét! Van-e inflexiója a függvénynek az $x_0 = 1$ pontban?

Deriválva az egyenletet: $3y^2y' + 2yy' + 4x + 1 = 0$, (**3p**) vagyis az $(1, 1)$ pontban $3y' + 2y' + 4 + 1 = 0$ (**2p**), tehát $y'(1) = -1$ (**1p**). Az érintőegyenes tehát áthalad az $(1, 1)$ ponton, meredeksége -1, így egyenlete: $y = 1-(x-1)$ (**3p**). Inflexiós pont létezéséhez a második deriváltat vizsgáljuk, vagyis újabb deriválással: $6y(y')^2+3y^2y''+2(y')^2+2yy''+4 = 0$ (**4p**), azaz az $(1, 1)$ pontban $6+3y''+2+2y''+4 = 0$ (**2p**), tehát $y''(1) = \frac{-12}{5} \neq 0$, (**1p**) így nincs inflexiója a függvénynek az $x_0 = 1$ pontban (**2p**).

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Igazolja, hogy páratlan függvény deriváltja páros, páros függvény deriváltja páratlan. Mit mondhatunk ez alapján a páros, illetve páratlan függvények monotonitásáról, illetve konvexitásáról?

Ha f páros, akkor $f(x) = f(-x)$, ahonnan deriválással $f'(x) = -f(-x)$ adódik, ami azt jelenti, hogy az f' derivált függvény páratlan (**3p**). Hasonlóan, ha f páratlan, akkor $f(x) = -f(-x)$, tehát $f'(x) = f(x)$, azaz f' ebben az esetben páros (**2p**).

Ha f páros, és az (a, b) intervallumon szigorúan monoton nő (illetve csökken), akkor f' itt pozitív (illetve negatív), és mivel f' páratlan, ezért f az origóra tükrözött, $(-b, -a)$ intervallumon szigorúan monoton csökken (illetve nő). Tehát páros függvény monotonitás szempontjából a tükrözött intervallumon fordítva viselkedik, mint az eredeti intervallumon.

Hasonló érveléssel kaphatjuk, hogy páratlan függvény monotonitása a tükrözött intervallumon megegyezik az eredeti intervallumon való viselkedéssel.

Az első megfigyeléseinket kétszer alkalmazva, azt kapjuk, hogy f és f'' paritása megegyezik, tehát páros függvény konvexitás szempontjából ugyanúgy viselkedik az (a, b) intervallumon, mint a tükrözött, $(-b, -a)$ intervallumon, míg páratlan függvény esetén a viselkedés fordított. (Legalább két helyes állításra **3p**.)

A fentiek egyben azt is jelentik, hogy ha vizsgált függvény kétszer deriválható az origó egy környezetében, és f' és f'' zérushelyei nem torlódnak az origóban, akkor páros függvénynek lokális szélsőértéke van az origóban, és nincs inflexiós pontja az origóban, míg páratlan függvénynek nincs lokális szélőértéke az origóban, és inflexiós pontja van az origóban.