ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT II. RÉSZ** **2002. dec. 19.**

Műszaki Informatika szak Munkaidő: 60 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (25 pont)

a) Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

b) Mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$. (Ne használjon L'Hospital szabályt!)

c) A tanult módon bizonyítsa be, hogy $(\sin x)'=\cos x\ ,\quad (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. feladat (35 pont)

a) Határozza meg az $f(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{3x}}$ függvény monotonitási intervallumait!

b) Mutassa meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^{3n}}$ sor Leibniz típusú!

c) Bizonyítsa be a Leibniz sorral kapcsolatban tanultakat! (Hibabecslést is!)

3. feladat (15 pont)

Írja le a Rolle és a Lagrange-féle középérték tételeket!

Bizonyítsa be a Rolle tételt!

4. feladat (15 pont)

Írja le az integrálszámítás II. alaptételét!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^{3x^2}\sin x^3\,\mathrm{d}x\ =?$$

5. feladat (10 pont)

Adja meg $a_n\sim b_n$ definícióját!

Igazak-e az alábbi állítások?

$$1+\frac{1}{n}\sim 1+\frac{2}{n}\,,\qquad\qquad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\ln\left(1+\frac{2}{n}\right),$$

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\sim\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}$$