Elektromágneses terek (VIHVA204) **2010.01.22.**

Név: **Javítási példány**	Pontszám:	Javító:
NEPTUN:	10	EVT
Aláírás:		

Feladatonként 1 pont szerezhető. Csak a végeredményt írja rá a feladatlapra!

1. Levegőben álló, $d = 10\,\mathrm{cm}$ átmérőjű, $\varepsilon_r = 1$ relatív dielektromos állandójú szigetelő gömbben a töltéssűrűség gömbszimmetrikusan oszlik el, a gömbbel koncentrikusan. Az összes töltés $Q = 40\,\mathrm{nC}$. Adja meg a gömb felszínén az elektromos térerősség nagyságát!

$$E = 143{,}8\,\mathrm{kV/m}$$

2. Síkkondenzátor fegyverzetei a $z = 0$ ill. a $z = d$ síkokban fekszenek, a feszültség közöttük $U = 120\,\mathrm{V}$. A lemezek között a térfogati töltéssűrűség $\rho(z) = \rho_0 \cos\frac{2\pi z}{d}$ és $\varepsilon_r = 1$. Legyen $d = 2\,\mathrm{cm}$ és $\rho_0 = 8\,\mu\mathrm{C/m^3}$. Mekkora a maximális térerősség a lemezek között?

$$E_{\max} = 8{,}876\,\mathrm{kV/m}$$

3. Homogén vezetőanyaggal kitöltött térben, stacionárius áramlást feltételezve, a P pontban és annak kis környezetében az elektromos térerősség rendezői $E_x = -\frac{2xE_0}{a}$ és $E_z = E_0$, ahol a és E_0 állandók. Fejezze ki az y irányú rendezőt a P pontban és annak kis környezetében!

$$E_y = \frac{2yE_0}{a} \quad (+K)$$

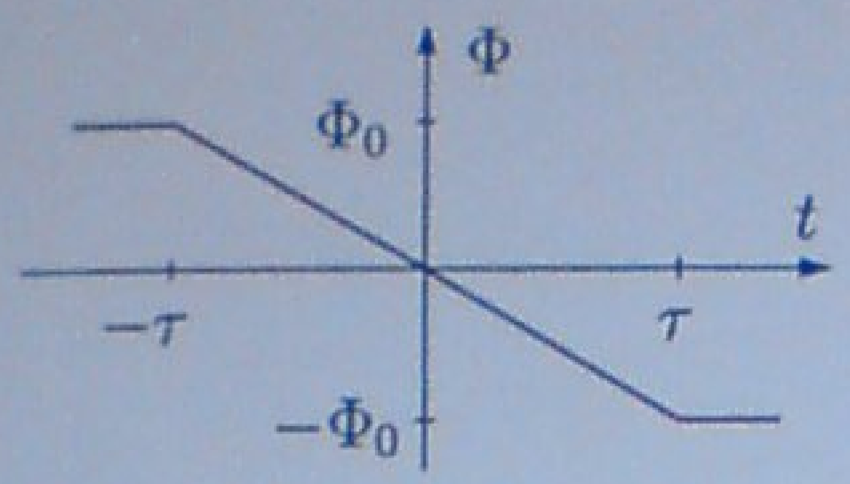
4. Toroid alakú vasmag kör alakú keresztmetszetének területe $A = 3\,\mathrm{cm}^2$, a vasmag közepes hossza $L = 40\,\mathrm{cm}$, anyagának relatív permeabilitása $\mu_r = 1200$, a vasmagra csévélt tekercs menetszáma $N = 2000$. Mekkora a mágneses tér energiasűrűsége a vasmag $d = 0{,}8\,\mathrm{mm}$-es légrésében, ha a tekercsben $I = 150\,\mathrm{mA}$ áram folyik?

$$w = 44{,}00\,\mathrm{kJ/m^3}$$

5. Egy $Z_0 = 500\,\Omega$ hullámimpedanciájú ideális, légszigetelésű távvezeték nyitott végén a feszültség amplitúdója $U_2 = 180\,\mathrm{V}$. Számítsa ki a vezeték végétől $x = 500\,\mathrm{m}$ távolságban fellépő áram amplitúdóját, ha a frekvencia $f = 1\,\mathrm{MHz}$.

$$I = 0{,}3118\,\mathrm{A}$$

6. Zárt vezetőhurok ellenállása $R = 0{,}2\,\Omega$. A hurok $\Phi(t)$ fluxusa az ábrán látható módon változik, ahol $\Phi_0 = 0{,}1\,\mathrm{Vs}$ és $\tau = 150\,\mathrm{ms}$. Határozza meg a vezetőhurokban disszipálódó P teljesítményt a $t = 0$ pillanatban!



$P = 2{,}222\,\mathrm{W}$

7. Egy $d = 12\,\mathrm{mm}$ átmérőjű hengeres réz vezetőben $\omega = 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$ körfrekvenciájú szinuszos áram folyik. A vezető felszínén a mágneses térerősség komplex amplitúdója $H = 2{,}5\,\mathrm{A/m}$. Adja meg a vezető felszínén az elektromos térerősség komplex amplitúdóját! ($\sigma_{\mathrm{Cu}} = 57\,\mathrm{MS/m}$)

$$E = 1{,}174 e^{j45^\circ}\ \mathrm{mV/m}$$

8. Határozza meg a Poynting-vektor időbeli átlagának nagyságát a tér azon pontjában, ahol az elektromos ill. mágneses térerősség komplex amplitúdója

$$\mathbf{E} = (50\mathbf{e}_x + 120\mathbf{e}_z)e^{j30^\circ}\ \mathrm{V/m} \quad \text{és} \quad \mathbf{H} = 0{,}2e^{j90^\circ}\mathbf{e}_y\ \mathrm{A/m}.$$

$$S = 6{,}5\,\mathrm{W/m^2}$$

9. Hertz-dipólus λ hullámhosszon üzemel. Adja meg a mágneses térerősség időfüggvényét a dipólustól 3λ távolságban, a maximális sugárzás irányában, ha a dipólustól $2{,}125\lambda$ távolságban (távoltér) az elektromos térerősség időfüggvénye a maximális sugárzás irányában

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_\vartheta 25\cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}t\right)\ \mathrm{mV/m}.$$

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_\varphi 46{,}97\cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}t - \frac{7\pi}{4}\right)\ \mu\mathrm{A/m}\ \ (-5{,}498,\ 0{,}7854,\ -315^\circ,\ 45^\circ)$$

10. Négyzet keresztmetszetű, légtöltésű csőtápvonal oldalainak szélessége 5 cm. A tápvonalban a TE_{10} módus terjed. Adja meg azt a frekvenciát, amelyen a csőben mért Λ hullámhossz éppen kétszerese a szabadtéri λ hullámhossznak!

$$\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad f = 3{,}463\,\mathrm{GHz}$$

Elektromágneses terek 2010. 01. 22.

① $d = 10\ cm = 0{,}1\ m \rightarrow r = \frac{d}{2} = 0{,}05\ m$

$\varepsilon_r = 1$

$Q = 40\ nC$

$E|_r = ?$

Ponttöltés tere:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\ ;\ \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$E = \frac{40 \cdot 10^{-9} C}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 9} \frac{As}{Vm} (0{,}05 m)^2} = 144 \frac{kV}{m}$$

② $U = 120 V$

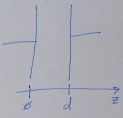
$\rho(z) = \rho_0 \cos\frac{2\pi z}{d}$

$\varepsilon_r = 1$

$d = 2\ cm = 0{,}02\ m$

$\rho_0 = 8 \frac{\mu C}{m^2}$

$E_{max} = ?$



a) IV. Maxwell: $\mathrm{div}\, D = \rho$

b) Poisson: $-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$D = \varepsilon E,\ \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot 1 = \varepsilon_0$

a) $$\int \rho(z)\, dz = \int \rho_0 \cos\frac{2\pi z}{d}\, dz = \rho_0 \frac{d}{2\pi} \cdot \underbrace{\sin\frac{2\pi z}{d}}_{\text{max, ha } \sin x = 1} + C$$

$$\varepsilon E_1 = \rho_0 \frac{d}{2\pi}$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 d}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{8 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \cdot 0{,}02 m}{2\pi \cdot \frac{10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 9} \frac{As}{Vm}} = 2880 \frac{V}{m}$$

b) $-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int -\frac{\rho}{\varepsilon_0} dz = \int -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho_0 \cos\frac{2\pi z}{d} dz = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \frac{d}{2\pi} \sin\frac{2\pi z}{d} + A$$

$$\varphi = \int -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{d}{2\pi} \sin\frac{2\pi z}{d} dz + \int A\, dz = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{(2\pi)^2} \underbrace{\cos\frac{2\pi z}{d}}_{(\text{max, ha } \cos x = 1)} + Az + B$$

$\boxed{z = \emptyset}$ $$\emptyset = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{4\pi^2} + B \Rightarrow B = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{4\pi^2}$$

$\boxed{z = d}$ $$U = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{4\pi^2} + Ad + B \rightarrow U = A \cdot d \rightarrow A = \frac{U}{d} = \frac{120 V}{0{,}02 m} = 6000 \frac{V}{m} = E_2$$

$$E_1 + E_2 = E_{max} = 8880 \frac{V}{m}$$

(3) $E_x = -\frac{2xE_0}{a}$, $E_y = ?$, $E_z = E_0$ — P pontban és kis környezetében

Homogén térben stacionárius áramlás.

$\mathrm{rot}\,\bar{E} = \emptyset$, $\mathrm{div}\,\bar{J} = \emptyset$, $\bar{J} = \sigma \bar{E}$

$$\mathrm{div}\,\bar{E} = \emptyset = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\emptyset = \frac{\partial\left(-\frac{2xE_0}{a}\right)}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_0}{\partial z}$$

$$\emptyset = -\frac{2E_0}{a} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{2E_0}{a} \rightarrow E_y = \int \frac{2E_0}{a}\,dy \rightarrow \underline{\underline{E_y = \frac{2yE_0}{a} + K}}$$

(4) Toroid

$A = 3\,cm^2$ (felesleges adat)

$L = 40\,cm = 0{,}4\,m$

$\mu_r = 1200$

$N = 2000$

$d = 0{,}8\,mm = 0{,}0008\,m = 8\cdot 10^{-4}\,m$

$I = 150\,mA = 0{,}15\,A$

$w = ?$

$H_v L + H_0 d = NI$ ← Gerjesztési törvényből

$H_v = \frac{H_0}{\mu_r}$

$$\frac{1}{\mu_r} H_0 L + H_0 d = NI \rightarrow H_0 = \frac{NI}{\frac{L}{\mu_r} + d}$$

$$H_0 = \frac{2000 \cdot 0{,}15\,A}{\frac{0{,}4\,m}{1200} + 8\cdot 10^{-4}\,m} = 264705{,}8\,\frac{A}{m}$$

$$w = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2} 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} \cdot 264705{,}8\,\frac{A}{m} = \underline{\underline{44{,}025\,\frac{kJ}{m^3}}}$$

(5) $Z_0 = 500\,\Omega$

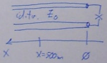
$U_2 = 180\,V$

$x = 500\,m$

$f = 1\,MHz$

$I = ?$ (amplitúdó)

Fodor könyv 179. o.

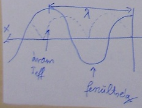


$Z_2 = \infty \rightarrow r = 1$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1\cdot 10^6\,\frac{1}{s}} = 300\,m$$

állóhullám alakul ki

$$x = \frac{5}{3}\lambda$$



$$|I| = \left|\frac{U_2}{Z_0} \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\cdot 2\pi\right)\right| = \underline{0{,}3118\,A}$$

⑥ Zárt vezető hurok

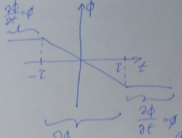
Faraday-féle indukció törvény : $u = -\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$

$R = 0{,}2\ \Omega$

$\phi_0 = 0{,}1\ Vs$

$\tau = 150\ ms = 0{,}15\ s$

$P|_{t=\emptyset} = ?$



$\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \text{meredekség} = \dfrac{\phi_0}{\tau} = -u$

$$P = \frac{u^2}{R} = \frac{\left(\frac{\phi_0}{\tau}\right)^2}{R} = \frac{(0{,}1\ Vs)^2}{0{,}2\ \Omega\ (0{,}15\ s)^2} = \underline{\underline{2{,}222\ W}}$$

⑦ Áramkiszorítás

$d = 12\ mm = 0{,}012\ m$

$\omega = 10^7\ \frac{1}{s}$

$\hat{H} = 2{,}5\ A/m$

$\sigma = 57\ M\frac{S}{m}$

$\hat{E} = ?$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}\ ; \quad \mu_r = 1 \quad \text{(nincs megadva...)}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{10^7\frac{1}{s}\, 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\, 5{,}7 \cdot 10^7 \frac{S}{m}}} = 52{,}84\ \mu m$$

$$Z_0 = \frac{1+j}{\sigma \delta} = \frac{1+j}{5{,}7 \cdot 10^7 \frac{S}{m} \cdot 52{,}84 \cdot 10^{-6}\ m} = \left(332{,}02 \cdot 10^{-6} + j\, 332{,}02 \cdot 10^{-6}\right) \Omega$$

$$\hat{E} = \hat{H} \cdot Z_0 = 2{,}5\frac{A}{m} \cdot 469{,}55 \cdot 10^{-6} e^{j45°} = \underline{\underline{1{,}174\, e^{j45°}\ \frac{mV}{m}}}$$

⑧ Poynting-vektor időbeli átlaga

$E = (50 e_x + 120 e_z)\, e^{j30°}\ \frac{V}{m}$

$H = 0{,}2\ e^{j90°}$

$S_{átl}\ ?$

$$S_{átl} = E(z,t) \cdot H(z,t)\Big|_{átl} = \frac{E \cdot H}{2} \cos(\varphi_E - \varphi_H)$$

$\varphi_E = 30°,\ \varphi_H = 90°$

$H = 0{,}2$

$E = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130$

$$S_{átl} = \frac{130 \cdot 0{,}2}{2} \cdot \cos(-60°) = \underline{\underline{6{,}5\ W}}$$

(9) Hertz-dipólus

λ

$r_1 = 2,125\,\lambda$ távoltér!

$r_2 = 3\lambda$

$H(t) = ?$

$$E(t) = e_\varphi\, 25 \cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda} t\right) \frac{mV}{m}$$

levegő: $Z_0 = 120\pi\,\Omega$

$\frac{1}{r}$ szerint csökkennek a térerősségek

$$\hat{E}: \quad r_1 - 25\,\frac{mV}{m}$$

$$r_2 - x\,\frac{mV}{m}$$

$$x = \frac{r_1}{r_2} \cdot 25\,\frac{mV}{m} = 17,708\,\frac{mV}{m}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{E}}{Z_0} = \frac{17,708\,\frac{mV}{m}}{120\pi\,\Omega} = 46,97\,\frac{\mu A}{m}$$

E szöge r_1-ben: $\beta \cdot r_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2,125\lambda = 4,25\pi \rightarrow 45°$

$E \perp H$ ~~($\rightarrow H \rightarrow 45°$)~~

$$\beta r_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 3\lambda = 6\pi \rightarrow 0°$$

A két időpont fáziskülönbsége: $-6\pi + 4,25\pi = 1,75\pi = -\frac{7\pi}{4}$

$$H(t) = e_\varphi\, 46,97 \cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda} t - \frac{7\pi}{4}\right) \frac{\mu A}{m}$$

(10) Négyszög alakú csőtápvonal, TE_{10}

$a = 5\,cm = 0,05\,m$

$\Lambda = 2\lambda$

$f = ?$

$m = 1$, $n = 0$ (TE_{10})

$N = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = 1$

$$\lambda_h = \frac{2N}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

csak $\lambda < \lambda_h$ terjed a csőben

$$\lambda_h = \frac{2}{\frac{1}{a}} = 0,1\,m$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{N\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2}} \rightarrow 2\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2}}$$

$$4\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_h^2}}$$

valójában másodfokúra visszavezethető az egyenlet

$$4\lambda^2 - \frac{4\lambda^4}{\lambda_h^2} = \lambda^2$$

$$3\lambda^2 - \frac{4\lambda^4}{\lambda_h^2} = \emptyset \rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_h = 0,0866\,m$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{0,0866\,m} = 3,464 \cdot 10^9\,Hz$$

$(3,464\,GHz)$