XV. FEJEZET

REZGÉSEK

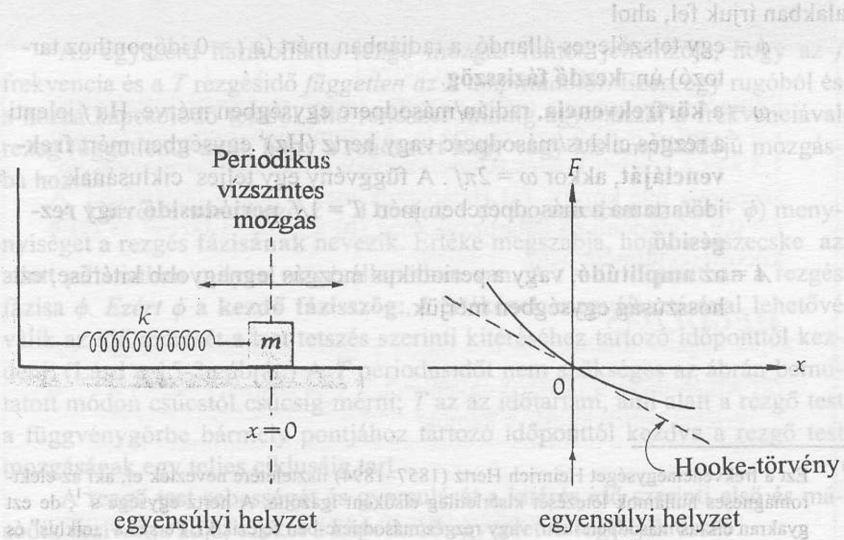
Keveset tudunk, mégis csodálatos, hogy ez milyen sok,
s még csodálatosabb, hogy kevés ismeretünk mekkora
hatalom a kezünkben.

BERTRAND RUSSELL

15.1 Bevezetés

Számos test *periodikus,* azaz az idő függvényében szabályosan ismétlődő mozgást végez. Az inga ide-oda leng, a benzinmotor hengereinek dugattyúi előre-hátra mozognak; minden atom és molekula egyensúlyi helyzete körül rezeg. Az orgonasípok, és a kürtök légoszlopainak, a hangszerek húrjának rezgése ugyancsak periodikusan változó mozgás. Az elektromos áramkör váltakozó áramát ugyanazzal az egyenlettel írjuk le, mint a mechanikai rendszerek rezgő mozgását. Tehát a periodikus mozgás a fizika majdnem minden ágában előforduló, széles körben elterjedt jelenség.

A következőkben a rezgő rendszerek közös vonásait elemezzük egyetlen m tömegű test mozgásának megfigyelése révén, amely vízszintes súrlódásmentes felületen, rugó hatása alatt egydimenziós mozgást végez. Ez triviális példának tűnhet, de egyszerűsége lehetővé teszi, hogy levezessük azokat az általános egyenleteket, amelyek nagyon sok esetben alkalmazhatók. A testhez a rugót csatlakoztatnák, amint ez a 15-1a ábrán látható. Ha a testet nyugalmi helyzetéből x távolságnyira elmozdítjuk, a rugó olyan F *visszaté-*



15-1 ábra
A természetben számos visszatérítő erő jól megközelíti a rugó által kifejtett (szaggatottan rajzolt) ideális, lineárisan változó visszatérítő erőt:
$F = -kx$

rítő erőt gyakorol a testre, amely arányos az elmozdulással; ezt Hooke-törvénynek nevezik:

A Hooke-törvény

$$F = -kx \tag{15-1}$$

ahol k a newton/méterben kifejezett **rugóállandó**.

Számos olyan fizikai rendszer van, amelyben az erő jó közelítéssel ennek a törvénynek engedelmeskedik. De ha az erő nem lineáris függvénye az elmozdulásnak, kis elmozdulások esetén ekkor is gyakran jól közelíthető lineáris függvénnyel (a függvénygörbe érintőjével) (15-1b ábra).

15.2 Egyszerű harmonikus rezgő mozgás

A következőkben matematikai összefüggéseket vezetünk le a rezgő mozgás tulajdonságainak leírására. Newton második törvényéből indulunk ki:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{15-2}$$

A Hooke-törvény behelyettesítésével

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{15-3}$$

adódik, azaz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x \tag{15-4}$$

Ahhoz, hogy ezt az egyenletet „megoldjuk" meg kell találnunk azt az $x(t)$ függvényt, amelynek idő szerinti második deriváltja megegyezik a függvény negatív többszörösével. Mivel a szinusz és a koszinusz függvény ilyen tulajdonságú, ezért a keresett $x(t)$ függvényt ezek segítségével oly módon írjuk fel, hogy a független változót (ami általában valamilyen θ szög) a t idő valamilyen ω-szorosának tekintjük, ahol ω a radián/másodpercben mért ún. **körfrekvencia**. (Jegyezzük meg, hogy itt ω értéke mindig állandó, ellentétben a forgó mozgással, ahol ω a szögsebesség, és változhat.) A (15–4) egyenlet megoldását tehát az

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15-5}$$

alakban írjuk fel, ahol

ϕ = egy tetszőleges állandó, a radiánban mért (a $t = 0$ időponthoz tartozó) ún. **kezdő fázisszög**.

ω = a **körfrekvencia**, radián/másodperc egységben mérve. Ha f jelenti a rezgés ciklus/másodperc vagy hertz (Hz)[1] egységben mért **frekvenciáját**, akkor $\omega = 2\pi f$. A függvény egy teljes ciklusának időtartama a másodpercben mért $T = 1/f$ **periódusidő** vagy **rezgésidő**.

A = az **amplitúdó**, vagy a periodikus mozgás legnagyobb kitérése, ezt hosszúság egységben mérjük.

[1] Ezt a frekvenciaegységet Heinrich Hertz (1857–1894) tiszteletére nevezték el, aki az elektromágneses hullámok létezését kísérletileg elsőként igazolta. A hertz egysége s^{-1}, de ezt gyakran ciklus/másodperc-ben vagy rezgés/másodperc-ben fejezik ki. Persze a „ciklus" és „rezgés" csupán fizikai jelenségeket leíró szavak, nincs saját dimenziójuk.

Mivel $\cos(\omega t+\pi/2) = -\sin\omega t$, a ϕ fázisszög segítségével kifejezett (15-5) függvény a (15-4) differenciálegyenlet *általános* megoldását szolgáltatja, amely a szinusz és a koszinusz függvényt egyaránt tartalmazza. Ez a megoldás az **egyszerű harmonikus rezgő mozgás**nak nevezett periodikus mozgást írja le: egyszerű, mert egyidejűleg fellépő több különböző frekvencia helyett csupán egyetlen frekvenciával jellemezhető. A „periodikus mozgás" elnevezés talán alkalmasabb lenne, de az „egyszerű harmonikus rezgő mozgás" elterjedtebb.

A (15-5) függvény kétszeri idő szerinti differenciálásával (lásd a G-I függeléket) a következőt kapjuk:

$$x = A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (15\text{-}6)$$

Összehasonlítva a (15-4) és (15-6) egyenleteket, megállapítható, hogy a (15-5) függvény akkor elégíti ki a (15-4) egyenletet, ha

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad (15\text{-}7)$$

Behelyettesítve az $\omega = 2\pi f$ összefüggést és f-re megoldva, kapjuk az egyszerű harmonikus rezgő mozgás *frekvenciáját*:

$$\frac{k}{m} = (4\pi^2 f^2)$$

Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás frekvenciája

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (15\text{-}8)$$

A T *rezgésidő* a mozgás egy teljes ciklusának időtartama. Azaz

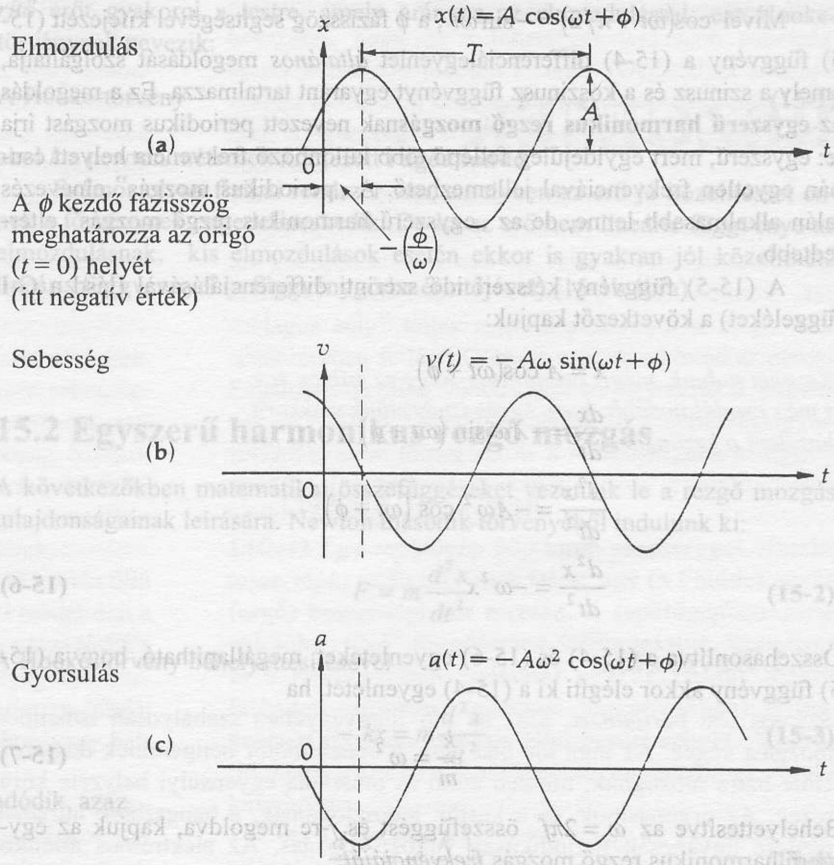
Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás rezgésideje

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (15\text{-}9)$$

Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás fontos jellemzője, hogy az f frekvencia és a T rezgésidő *független az A amplitúdótól*. Ezért egy rugóból és a hozzá kapcsolódó testből álló rendszer mindig *ugyanazzal* a frekvenciával rezeg függetlenül attól, hogy a rendszert nagy vagy kis amplitúdójú mozgásba hozták.

A kitérésre vonatkozó $x = A\cos(\omega t+\phi)$ egyenletben az $(\omega t+\phi)$ mennyiséget a rezgés **fázisának** nevezik. Értéke megszabja, hogy a részecske az adott pillanatban milyen rezgésállapotban van. A $t = 0$ időpontban a rezgés fázisa ϕ. *Ezért* ϕ a **kezdő fázisszög:** ϕ értékének megválasztásával lehetővé válik az idő mérését a test tetszés szerinti kitéréséhez tartozó időponttól kezdeni. (Lásd a 15-2a ábrát.) A T periodusidőt nem szükséges az ábrán bemutatott módon csúcstól csúcsig mérni; T az az időtartam, ami alatt a rezgő test a függvénygörbe bármely pontjához tartozó időponttól kezdve a rezgő test mozgásának egy teljes ciklusáig tart.

A rezgő test sebességét és gyorsulását a kitérés idő szerinti első és második deriváltja adja, ezeket a következő egyenletek foglalják össze:



15-2 ábra

Az $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ függvény szerint mozgó részecske egyszerű harmonikus mozgása. Ha a kezdő ϕ fázisszög zérus, akkor a függőleges koordinátatengely a szaggatott vonallal jelölt helyzetbe tolódik.

Egyszerű harmonikus rezgőmozgás

Kitérés	$x = A\cos(\omega t + \phi)$	**(15-10)**
Sebesség	$\dfrac{dx}{dt} = v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$	**(15-11)**
Gyorsulás	$\dfrac{dv}{dt} = a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$	**(15-12)**
Körfrekvencia	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	**(15-13)**

15-1 PÉLDA

Egyszerű harmonikus rezgő mozgást végző részecske kitérését az $x = A\cos(\omega t + \phi)$ függvény írja le. Az amplitúdó 2 cm, a rezgésidő 1,5 s és a kezdeti kitérés 0,4 cm, amikor a részecske a mozgás középpontja felé közelít. (a) Határozzuk meg a kezdő fázisszöget. A $t = 0{,}9$ s időpontban határozzuk meg (b) a mozgás fázisát és (c) a kitérést (centiméterben).

MEGOLDÁS

(a) Alkalmazva a (15-10) egyenletet, $x = A\cos(\omega t + \phi)$, és a $t = 0$ értéket behelyettesítve kapjuk:

$$x_0 = A\cos\phi$$

ahol x_0 a $t = 0$ időponthoz tartozó kezdeti kitérés és A az amplitúdó. A numerikus adatok behelyettesítésével

$$(0{,}4\,\mathrm{cm}) = (2\,\mathrm{cm})(\cos\phi)$$

innen $$\phi = \arccos\left(\frac{0{,}4\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm}}\right) = 1{,}37\,\mathrm{rad}$$

Jegyezzük meg, hogy ϕ érékét radiánban kell kifejezni, minthogy ω *mértékegysége* rad/s.

(b) A (15-10) függvény felírásához előbb ki kell számítanunk ω értékét:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{(1{,}5\,\mathrm{s})} = \underline{\underline{4{,}19\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}}$$

Így a (15-10) egyenlet

$$x = (2\,\mathrm{cm})\,\cos\left[\left(4{,}19\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)t + 1{,}37\,\mathrm{rad}\right]$$

A [ ] zárójelben lévő kifejezés a *fázis*. A $t = 0{,}9$ s időpontban

$$\text{a fázis} = \left[\left(4{,}19\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)(0{,}9\,\mathrm{s}) + 1{,}37\,\mathrm{rad}\right] = 5{,}14\,\mathrm{rad}$$

(c) A $t = 0{,}9$ s időpontban a kitérés:

$$x = (2\,\mathrm{cm})\,\cos(5{,}14\,\mathrm{rad}) = 0{,}829\,\mathrm{cm}.$$

15-2 PÉLDA

Egy a Hooke-törvényt követő rugóra erősített 200 gramm tömegű test 4 cm amplitúdójú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez (15-1a ábra). A rugóállandó 25 N/m. a) Számítsuk ki a rezgés frekvenciáját és b) a rezgés egy teljes ciklusának időtartamát (a rezgésidőt). Tekintsük azt az időpontot, amikor a rezgő test egyensúlyi helyzetétől jobbra 2 cm távolságra van és jobbfelé mozog. Számítsuk ki ebben az időpontban a test c) sebességét és d) gyorsulását!

MEGOLDÁS

a) A rezgés f frekvenciája a (15-8) képlet szerint:

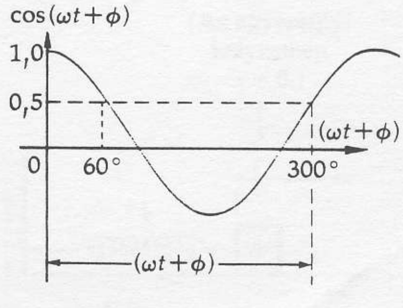
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\,\mathrm{N/m}}{0{,}200\,\mathrm{kg}}} = 1{,}78\,\frac{\mathrm{ciklus}}{\mathrm{s}} = 1{,}78\,\mathrm{Hz}$$

b) A T periódusidő a (15-9) képlet szerint:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\left(1{,}78\,\dfrac{\mathrm{ciklus}}{\mathrm{s}}\right)} = 0{,}562\,\mathrm{s}$$

c) Annak érdekében, hogy a rezgő test mozgásáról világos képet alkothassunk, célszerű az x kitérést t függvényében grafikusan vázolni (15-3 ábra). Először a mozgás fázisát, azaz $(\omega t + \phi)$ értékét számítjuk ki, ezért a numerikus adatokat a (15-10) egyenletbe helyettesítjük és az egyenletet $(\omega t + \phi)$ -re megoldjuk:

$$x = A\,\cos(\omega t + \phi)$$



15-3 ábra
A 15-2 példához.

$$(2\,\mathrm{cm}) = (4\,\mathrm{cm})\cos(\omega t + \phi)$$

ahonnan

$$(\omega t + \phi) = \arccos\left(\frac{2\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{cm}}\right) = \arccos(0{,}5) = 60°.$$

adódik. Az ábráról azonban leolvasható, hogy 60°-nál a test balfelé halad (az x kitérés csökken). Ezért az a szög, amit keresünk, egy olyan időponthoz tartozik, amikor x = 2 cm, és a test *jobbra* halad (az x kitérés növekszik). Ez a szög 300°-os, amelynek koszinusza ugyanaz, mint 60° koszinusza[2]. Tehát (ωt + ϕ) = 300°, és a sebesség az ehhez tartozó pillanatban a (15–11) képlet szerint:

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = -(0{,}04\,\mathrm{m})(2\pi)\left(1{,}78\frac{\mathrm{ciklus}}{\mathrm{s}}\right)\sin 300°$$

$$v = 0{,}387\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(jobbfelé irányul)}$$

(d) A gyorsulás számítása:

$$a = -\omega^2 x = -\left[(2\pi)\left(1{,}78\frac{\mathrm{ciklus}}{\mathrm{s}}\right)\right]^2 (0{,}02\,\mathrm{m})$$

$$a = -2{,}50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(balfelé irányul)}$$

Jegyezzük meg, hogy a sebesség és a gyorsulás ellentétes irányú, mert a test mozgása lassul.

15-3 PÉLDA

A 15-4 ábrán egy egyszerű harmonikus rezgő mozgás grafikonja látható. Határozzuk meg a mozgás $x = A\cos(\omega t + \phi)$ egyenletében szereplő A, ω és ϕ paraméterek numerikus értékét SI egységekben.

MEGOLDÁS

A grafikont tanulmányozva látjuk, hogy az amplitúdó A = 0,02 m, és a rezgésidő T = 0,8 s. Ezért az ω körfrekvencia

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{0{,}8\,\mathrm{s}} = 7{,}85\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

A ϕ fázisszög meghatározására helyettesítsük be a grafikonról leolvasható értékeket. Például t = 0,3 s időpontban a legnagyobb a kitérés, azaz x = 0,02 m. Tehát a koszinusz függvény értéke +1. Ez akkor igaz, ha a koszinusz függvény argumentuma $n\pi$, ahol n = 0, ± 2, ± 4, stb. A koszinusz függvény argumentumát most zérusnak választjuk:

[2] Ez az egyszerű harmonikus rezgő mozgás vizsgálatának egyik lehetséges hibaforrására utal. Minthogy a rezgő mozgást végző részecske később újra áthalad ugyanazon a ponton, az ellenkező irányból, óvatosan kell eljárni az adott feladatnak megfelelő időpont meghatározásánál. Továbbá, mivel a zsebszámológépek mindig csak 90°-nál kisebb abszolut értékű szögeket adnak eredményül, könnyen elnézhetjük a valójában más negyedekben lévő szögeket. Az ilyen típusú hiba elkerülésére célszerű felrajzolni a kitérést a t függvényében. A következő fejezet más segédeszközt is nyújt ehhez, mégpedig az ún. *referencia-kört*.

$$\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}3\,\text{s})+\phi=0$$

$$\underline{\underline{\phi=-2{,}36\,\text{rad}=-135°.}}$$

Ez a válasz nem egyértelmű. Ha az argumentum értéke 2π, akkor a következőt kapjuk:

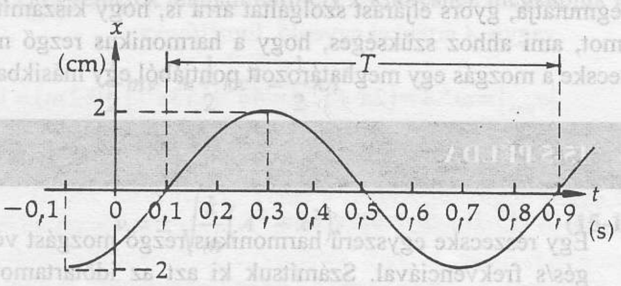
$$\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}3\,\text{s})+\phi=2\pi\,\text{rad}$$

$$\underline{\underline{\phi=+3{,}93\,\text{rad}=+225°.}}$$

A két különböző eredmény az origó (a koszinusz függvény kezdőpontjától számított) $-t$ irányú vagy $+t$ irányú eltolásának felel meg. Az origó *negatív t* irányú 135°-os eltolása révén a koszinusz függvénygörbe ugyanazon pontjára jutunk, mint az origó *pozitív t* irányú 225°-os eltolásával. Így a kérdésre két lehetséges válaszunk van:

$$x=(0{,}02\,\text{m})\cos\left[\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)t-2{,}36\,\text{rad}\right]$$

és $$x=(0{,}02\,\text{m})\cos\left[\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)t+3{,}93\,\text{rad}\right].$$



15-4 ábra
A 15-3 példához.

15-4 PÉLDA

Egy mennyezeti gerendára erősített függőleges rugó alsó végére egy 7 kg tömegű test van függesztve. A testet függőleges rezgésbe hozzuk, a rezgésidő 2,6 s. Számítsuk ki a rugó k rugóállandóját.

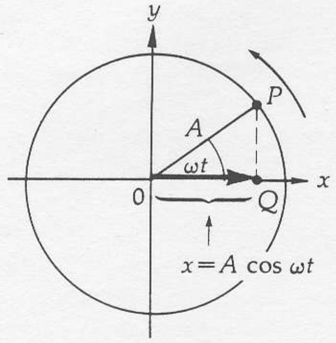
MEGOLDÁS

A (15-9) egyenletből

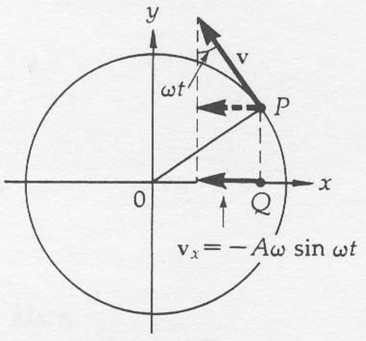
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ebből a k rugóállandót kifejezve

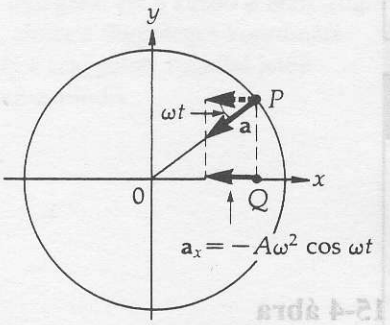
$$k=\frac{4\pi^2 m}{T^2}=\frac{4\pi^2(7\,\text{kg})}{(2{,}6\,\text{s})^2}=40{,}9\,\text{N}/\text{m}$$



a) A Q pont.



b) A Q pont v_x sebessége.



c) A Q pont $\mathbf{a}_x$ gyorsulása.

15-5 ábra
A $\pm x$ tengely mentén egyszerű harmonikus mozgással ide-oda mozgó Q pont *referenciaköre.*

15.3 A harmonikus rezgő mozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolata

Az előzöekben számos különböző egyenlet szerepelt. Alkalmas geometriai modell segítségével ez a sokféle függvénykapcsolat könnyen megjegyezhető. A modell neve **referenciakör**.

Tekintsünk egy P pontot, ami egy A sugarú körön állandó ω szögsebességgel mozog. Ha a P pont a $t = 0$ időpontban az x tengely $x = A$ koordinátájú pontjából indul, akkor valamely későbbi t időpontban az A sugár x tengellyel bezárt szöge ωt, (lásd a 15-5a ábrát.) A P pont x tengelyre eső vetülete a Q pont. Amint P végigjárja a kört, Q az $\pm x$ tengely mentén balra és jobbra mozogva egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. A Q pont origótól mért kitérése $x = A \cos\omega t$, azonos a (15-10) egyenlettel, ha a ϕ kezdő fázisszög zérus.

A ϕ kezdő fázisszög alkalmas megválasztásával az idő mérését akkor kezdhetjük el ($t = 0$), amikor a pont a kör tetszőleges helyén van, ami azt jelenti, hogy éppen akkora a harmonikus rezgő mozgást végző test kezdeti kitérése. Általában az egyszerű harmonikus rezgő mozgás az egyenletes körmozgás *bármelyik* átmérőre (nem csak az x tengelyre) eső vetületének tekinthető.

A 15-5b ábrán a mozgó P pont $\mathbf{v}$ sebességvektorának nagysága $A\omega$. A $\mathbf{v}$ vektor $\pm x$ tengelyre vetítésével $v_x = -A\omega \cdot \sin\omega t$, a (15-11) egyenletnek megfelelően. (A negatív előjel helyénvaló, mert az óramutató járásával ellentétes irányban mozogva, $\omega t < 90°$ esetén a részecske az x tengely negatív irányában mozog.) Hasonlóképpen, a 15-5c ábrán a mozgó P pont $\mathbf{a}_{cp}$ centripetális gyorsulásának nagysága $\mathbf{a}_{cp} = A\omega^2$, és x irányú vetülete $a_x = -A\omega^2 \cos\omega t$ (lásd a (15-12) egyenletet). Ezért a referenciakör az egyszerű harmonikus rezgőmozgás tanulmányozásának igen hatásos eszköze. Mint ezt a következő példa megmutatja, gyors eljárást szolgáltat arra is, hogy kiszámítsuk azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy a harmonikus rezgő mozgást végző részecske a mozgás egy meghatározott pontjából egy másikba jusson.

15-5 PÉLDA

Egy részecske egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez 200 rezgés/s frekvenciával. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy a részecske a középső $x = 0$ (egyensúlyi) helyzetéből az $x = A/2$ pontba (a maximális kitérés felére) jusson!

MEGOLDÁS

Minthogy a gyorsulás változik a mozgás során, nem használhatjuk a kinematikai egyenleteket. Azonban a referenciakörre hivatkozva (15-6 ábra) megállapítható, hogy a képzelt P pont a keresett időtartam alatt 30°-os középponti szöghöz tartozó ívet ír le. Tekintettel arra, hogy a P pont a teljes ciklus T periódusideje alatt állandó nagyságú sebességgel mozog, ezért a t idő a T periódusidő alábbi törtrésze:

$$t = \left(\frac{30°}{360°}\right) T = \frac{T}{12}$$

A rezgésidő $T = 1/f = 1/(200\ \mathrm{s}^{-1}) = 5 \times 10^{-3}$ s. Tehát

$$t = \frac{5 \times 10^{-3}}{12} = 4{,}17 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

15.4 A harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyai

Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyait a 7.6 fejezetben tárgyaltuk. Hasznos lenne most újraolvasni ezt a fejezetet. Mintegy áttekintésképpen összefoglaljuk az összefüggéseket. Ha nincs súrlódás, akkor a rendszer konzervatív, tehát igaz az *energia megmaradása*:

$$E_0 = E$$
$$U_0 + K_0 = U + K$$

ahol U és K pillanatnyi értékei:

Potenciális energia U $$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (15\text{-}14)$$

Kinetikus energia K $$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (15\text{-}15)$$

Összes energia E $$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (15\text{-}16)$$

A 15-7a ábra U és K változását mutatja a t idő függvényében. Vegyük észre, hogy az E összes energia állandó marad, közben az energia folyamatosan oda és vissza alakula potenciális és a kinetikus energiaforma között. Az energia az alábbi időpontokban teljes egészében az egyik vagy a másik alakban van jelen:

	A maximális kitérésnél (ha $v = 0$)	**A középpontban (ha $x = 0$)**	
Összes E energia	$E = \frac{1}{2}kA^2$	$E = \frac{1}{2}m(v_{max})^2$	(15-17)

A (15-16) és (15-17) egyenletek alapján bármely x kitéréshez megkapjuk a v sebességet:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

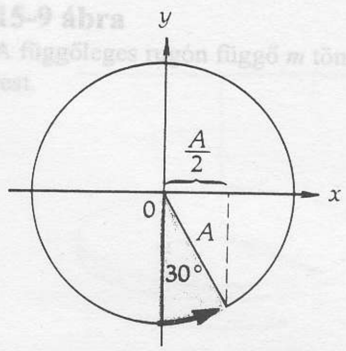
ebből kifejezve a v sebességet:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} \qquad (15\text{-}18)$$

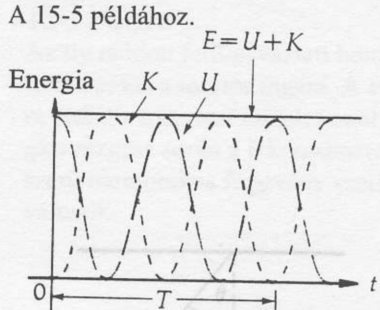
Minthogy a sebesség az $x = \pm A$ helyen irányt változtat, ezért ezeket a mozgás *forduló pontjainak* nevezzük. Ezek azok a korlátok, vagy határok, amelyeken belül az egyszerű harmonikus rezgő mozgás végbemegy. Az energiadiagramok hasznosak, mert belőlük a mozgás sok fontos jellemzője levezethető.

15-6 PÉLDA

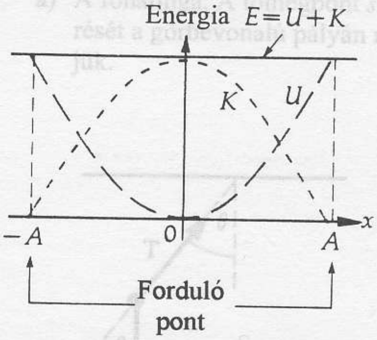
Egy 2 kg tömegű testet rugóra erősítettek és vízszintes sima felületre helyezték (15-8 ábra). Ha a testet (az x tengely origójától) 0,2 m-re elhúzzák, ezen helyzetének megtartásához 20 N vízszintes irányú erő szükséges. A testet most, x_0 =0,2 m kezdeti kitéréséből elengedik és ezt követően a test egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Határozzuk meg a k rugóállandót. b) Határozzuk meg az egyszerű harmonikus rezgő mozgás f frekvenciáját. c) Határozzuk meg a test v_{max} maximális sebességét. Hol lép fel a maximális sebesség? d) Határozzuk meg a test maximális a_{max} gyorsulását. Hol lép fel a maximális gyorsulás? e) Határozzuk meg a rezgő rendszer teljes E energiáját. Ha az x pillanatnyi kitérés a legnagyobb kitérés egyharmadával egyenlő, akkor mekkora f) a sebesség és g) a gyorsulás?



15-6 ábra
A 15-5 példához.

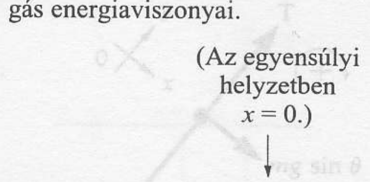


a) Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiája, mint a t idő függvénye.



b) Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiája, mint az x kitérés függvénye.

15-7 ábra
Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyai.



15-8 ábra
A 15-6 példához.

MEGOLDÁS

a) Ha a testet $x = 0,2$ m-re kitérítik, akkor a rugó $F = -20$ N erőt fejt ki rá. (A negatív előjel onnan adódik, hogy az erő az x tengely negatív irányába mutat.) Így, a (15-10) egyenlet alapján a k rugóállandó

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{(-20\,\mathrm{N})}{0,2\,\mathrm{m}} = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

b) A (15-18) egyenletből

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2\,\mathrm{kg}}}$$

$$= 1,13\frac{\text{ciklus}}{\mathrm{s}} \quad \text{(vagy } 1,13\ \mathrm{s}^{-1}\text{, vagy } 1,13\ \mathrm{Hz)}$$

c) A (15-11) egyenletből $v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$, vagyis a sebesség maximális, ha $\sin(\omega t + \phi) = \pm 1$ Ezért:

$$v_{\max} = \pm A\omega = \pm(0,2\,\mathrm{m})(2\pi)(1,13\,\mathrm{s}^{-1}) = \pm 1,41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A sebesség akkor maximális, amikor a test az $x = 0$ egyensúlyi helyzetén halad át. A $\pm$ előjel arra utal, hogy a test ebbe a pontba mindkét irányból érkezhet.

d) A (15-12) egyenletből $a = -\omega^2 x$. A negatív előjel arra utal, hogy az a gyorsulás az x kitéréssel ellentétes irányú. A gyorsulás akkor éri el legnagyobb értékét, amikor a kitérés maximális, vagyis A értékkel egyenlő. Ennélfogva:

$$|a_{\max}| = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A = 4\pi^2(1,13\,\mathrm{s}^{-1})^2(0,2\,\mathrm{m}) = 10,1\,\mathrm{m/s^2}$$

A maximális gyorsulás tehát a mozgás szélső helyzeteiben lép fel.

e) A (15-16) egyenlet szerint

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\left(100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0,2\,\mathrm{m})^2 = 2,00\,\mathrm{J}$$

A teljes energiát így is kiszámíthatjuk:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})\left(1,41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 2,00\,\mathrm{J}$$

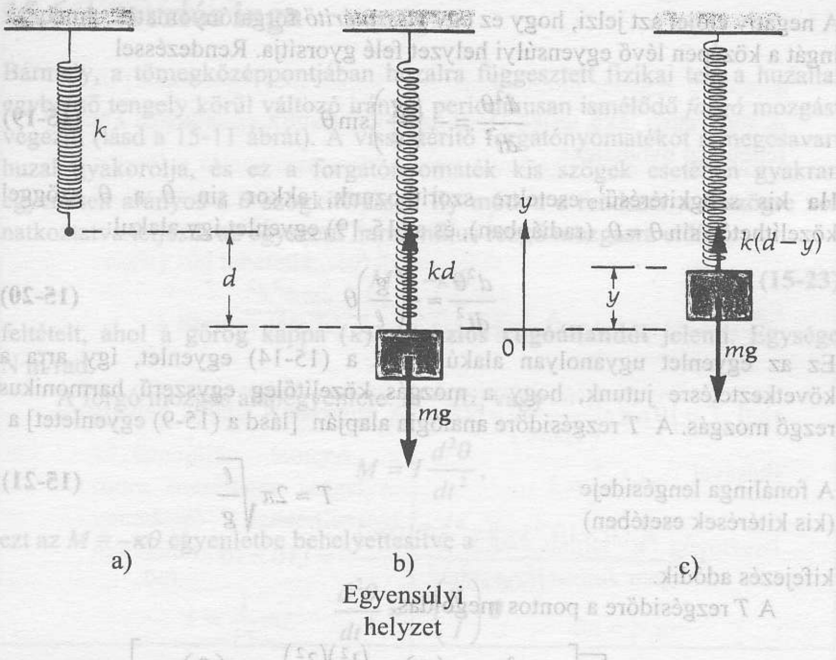
f) A (15-18) egyenlet szerint

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right)}$$

$$v = \pm(0,2\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}}{2\,\mathrm{kg}}\left(1 - \frac{1}{9}\right)} = \pm 1,33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

g) Az $x = A/3$ kitéréshez tartozó gyorsulás meghatározására a (15-12) egyenletet alkalmazzuk:

$$a = -\omega^2 x = -(2\pi f)^2 x = -(2\pi)^2(1,13\,\mathrm{s}^{-1})^2\left(\frac{0,2\,\mathrm{m}}{3}\right) = -3,36\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



15-9 ábra

A függőleges rugón függő m tömegű test.

A függőleges rugón függő test

Ha a (konstans k rugóállandójú) függőleges rugón m tömegű test függ (15–9 ábra), akkor a rugó d távolsággal megnyúlik, hogy a test egyensúlyban legyen. A rugó a testre egy felfelé irányuló kd erőt gyakorol, ami éppen a lefelé mutató mg nehézségi erővel tart egyensúlyt. Ha az y koordinátatengely origója az egyensúlyi helyen van, és ha az y tengely pozitív irányát felfelé mutatónak választjuk, akkora testre ható erők eredője $\Sigma F = kd - mg = 0$. Ha a testet most y távolságnyira felfelé elmozdítjuk, akkor

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$k(d-y) - mg = ma.$$

De $kd-mg = 0$, ezért a fenti egyenlet $-ky = ma$ alakra egyszerűsödik, így a testre ható $F = -ky$ eredő visszatérítő erő pontosan megfelel a vízszintes mozgásra érvényes Hooke törvénynek. Tehát a függőleges rugón függő test egyszerű harmonikus rezgő mozgását, *feltéve, hogy az origót az egyensúlyi helyen választjuk meg*, ugyanazok az egyenletek írják le, amelyeket a sima vízszintes síkon mozgó testre levezettünk. A frekvencia, a rezgésidő, az energia és a mozgás többi egyenlete is, függetlenül attól, hogy a mozgás vízszintes-e vagy függőleges, azonos.

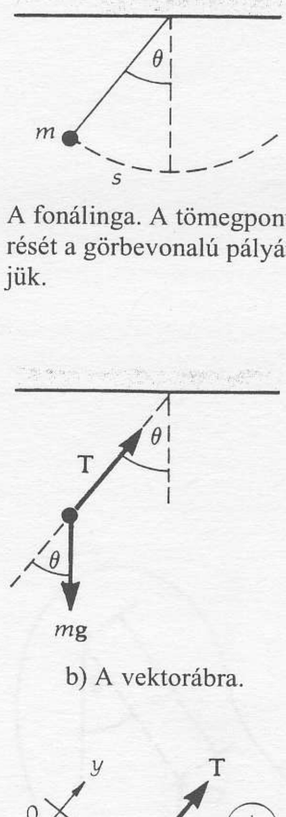
15.5 A fonálinga

Tekintsünk egy idealizált ingát, amely ℓ hosszúságú könnyű fonálra függesztett pontszerű m tömegű testből áll (15-10a ábra). Az inga a gravitáció hatására függőleges síkban leng. Most megmutatjuk, hogy kis szögkitérés esetén az inga mozgása közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgás.

Az erőket a 10-15b ábra mutatja. Görbevonalú mozgások esetén az erők felbontásához az egyik irányt mindig radiálisan befelé mutatónak választjuk. A 15-10c ábra a két, egymásra merőleges irányban felbontott erőt szemlélteti. A felfüggesztési pontra vett forgatónyomaték

$$\Sigma M = I\alpha$$

$$-mg\ell \sin\theta = \left(m\ell^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



a) A fonálinga. A tömegpont s kitérését a görbevonalú pályán mérjük.

b) A vektorábra.

c) Az erők vektorábrája két egymásra merőleges irányú erővektor komponenssel.

15-10 ábra

A fonálingára ható erők.

A negatív előjel azt jelzi, hogy ez egy *visszatérítő* forgatónyomaték, amely az ingát a középen lévő egyensúlyi helyzet felé gyorsítja. Rendezéssel

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{\ell}\right)\sin\theta \tag{15-19}$$

Ha kis szögkitérésű[3] esetekre szorítkozunk, akkor sin θ a θ szöggel közelíthető: $\sin\theta \approx \theta$ (radiánban), és a (15-19) egyenlet így alakul:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\left(\frac{g}{\ell}\right)\theta \tag{15-20}$$

Ez az egyenlet ugyanolyan alakú, mint a (15-14) egyenlet, így arra a következtetésre jutunk, hogy a mozgás közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgás. A T rezgésidőre analógia alapján [lásd a (15-9) egyenletet] a

A fonálinga lengésideje (kis kitérések esetében)

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{15-21}$$

kifejezés adódik.

A T rezgésidőre a pontos megoldás:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{(1^2)(3^2)}{(2^2)(4^2)}\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cdots\right] \tag{15-22}$$

A 15°-nál kisebb kitérésekre (vagyis, amikor az inga 30°-os szögtartományban leng), a (15-21) és a (15-22) összefüggések között az eltérés kisebb, mint 0,5%.

15-7 PÉLDA

Határozzuk meg a (kis amplitúdóval lengő) fonálinga méterben kifejezett hosszát, ha percenként 12 rezgést végez.

MEGOLDÁS

Minthogy $T = 1/f$, ezért a (15-21) egyenlet felírható a következőképpen:

$$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Ebből kifejezve az ℓ hosszúságot:

$$\ell = \frac{g}{4\pi^2 f^2}.$$

Az f frekvencia $$f = \left(12\,\frac{\text{rezgés}}{\text{perc}}\right)\underbrace{\left(\frac{1\ \text{perc}}{60\,\text{s}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 0{,}2\,\text{s}^{-1}$$

Tehát $$\ell = \frac{(9{,}8\,\text{m/s}^2)}{4\pi^2\left(0{,}2\,\text{s}^{-1}\right)^2} = 6{,}20\,\text{m}.$$

[3] Mivel $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$, azért kicsiny θ szögekre $\sin\theta \approx \theta$ (radián.).

15.6 A torziós inga

Bármely, a tömegközéppontjában huzalra függesztett fizikai test a huzallal egybeeső tengely körül változó irányú, periodikusan ismélődő *forgó* mozgást végezni (lásd a 15-11 ábrát). A visszatérítő forgatónyomatékot a megcsavart huzal gyakorolja, és ez a forgatónyomaték kis szögek esetében gyakran egyenesen arányos a θ szögkitéréssel. Íly módon a rendszer a θ szögre vonatkoztatva teljesíti az egyszerű harmonikus rezgő mozgásra előírt

$$M = -\kappa\,\theta \tag{15-23}$$

feltételt, ahol a görög kappa (κ) a **torziós rugóállandót** jelenti. Egysége N·m/rad.

A forgó mozgás alapegyenlete: $M = I\alpha$, vagy

$$M = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ezt az $M = -\kappa\theta$ egyenletbe behelyettesítve a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta$$

differenciálegyenletet kapjuk. Az egyenesvonalú rezgő mozgásra vonatkozó (15-4) egyenlet megoldásával analóg módon, ennek a differenciálegyenletnek a megoldása

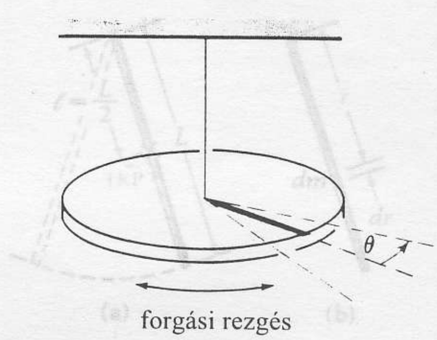
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

ahol θ_0 a mozgás radiánban mért *szögamplitúdója*. A formulát a (15-4) egyenlettel összehasonlítva, az analógia révén a rezgés T periódusidejére az alábbi kifejezést írhatjuk fel:

A torziós inga rezgésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{15-24}$$

(Ameddig a visszatérítő forgatónyomaték követi a Hooke-törvényt, nem szükséges azt a közelítő egyenlőségjelet alkalmazni, ami az egyszerű fonálinga egyenletében megjelenik.)



15-11 ábra
Az íly módon felfüggesztett homogén tárcsa példa a torziós ingára. A tárcsára radiális irányban rajzolt vonal forgási rezgése során a θ koordináta egyszerű harmonikus függvény szerint változik.

15-8 PÉLDA

Elhanyagolható súlyú, ℓ = 0,10 m hosszú rúd két végére két egyenlő, kicsi, m = 0,002 kg tömegű test van erősítve. A rúd a középpontjára erősített vékony huzalon vízszintesen függve torziós ingát képez, ahogyan a 15-12 ábrán látható. Ha a rendszert a huzalon át fektetett függőleges tengely körül rezgésbe hozzák, akkor a rezgés periodusideje 10 perc. Határozzuk meg a huzal κ torziós rugóállandóját.

MEGOLDÁS

A torziós rezgés rezgésidejének

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

egyenletét a κ torziós rugóállandóra megoldva:

15-12 ábra
A 15-8 feladathoz.

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

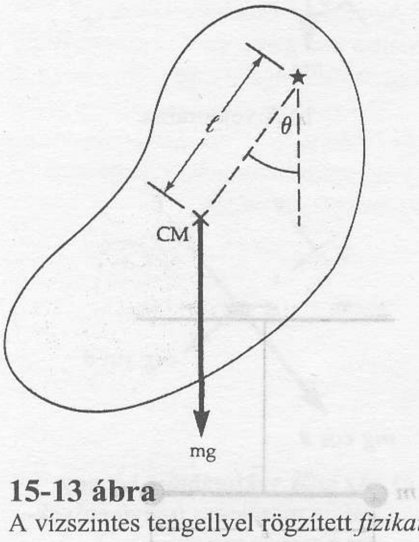
A rúd végén lévő testek (felfüggesztési pontra vonatkozó) I tehetetlenségi nyomatéka

$$I = 2mr^2 = (2m)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2$$

Ezért $$\kappa = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\right) = \frac{2m\pi^2\ell^2}{T^2}$$

ahol $T = 10\,\text{perc}\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{perc}}\right) = 600\,\text{s}$. A numerikus adatok behelyettesítésével

$$\kappa = \frac{2(2{,}0\times10^{-3}\,\text{kg})(\pi^2)(0{,}10\,\text{m})^2}{(600\,\text{s})^2} = 1{,}10\times10^{-9}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$



15-13 ábra
A vízszintes tengellyel rögzített *fizikai inga* egyensúlyi helyzete körül leng.

15.7 A fizikai inga

Ha egy tetszőleges alakú merev testet tömegközéppontjától tetszőleges ℓ távolságban rögzített vízszintes tengelyre függesztünk fel, akkor a test a gravitáció hatására lengeni képes (lásd a 15-13 ábrát). A fonálingával ellentétben, amelynek (ideális) pontszerű ingateste súlytalan fonálon függ, a valóságos fizikai testből készült ingát fizikai ingának nevezzük. Ebben az esetben a felfüggesztési pontra vonatkozó M visszatérítő forgatónyomatékot a tömegközéppontra ható nehézségi erő okozza:

$$M = -mg\ell\sin\theta$$

Kicsiny szögkitérések esetén $\sin\theta$ a θ szöggel közelíthető:

$$M \approx -mg\ell\theta$$

Ennélfogva az állandó $\kappa = mg\ell$ visszatérítő forgatónyomaték következtében

A fizikai inga lengésideje
$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \qquad (15\text{-}25)$$

ahol I a test rögzített tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka. A Steiner tétel, amelyet a 13.4 fejezetben tárgyaltunk, jól alkalmazható az olyan tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték meghatározására, amely nem megy át a tömegközépponton. Ilyen esetben $I = I_{TKP} + Mh^2$.

15-9 PÉLDA

L = 1,1 m hosszú, m = 2,5 kg tömegű vékony homogén rúd egyik vége vízszintes tengelyhez van rögzítve úgy, hogy a rúd függőleges síkban ide-oda lenghet. Kis amplitúdójú lengések esetére a) határozzuk meg a mozgás közelítő T lengésidejét és b) annak a fonálingának az L' hosszát, amelynek azonos a lengésideje.

MEGOLDÁS

a) A fizikai inga lengésideje (kis amplitúdójú mozgás esetén) a (15-25) egyenlettel adható meg: $T = 2\pi\sqrt{I / mg\ell}$, ahol ℓ a tengelytől a tömegközéppontig mért távolság. A 15-14 ábrából a Steiner tétel felhasználásával – vagy közvetlen integrálással – meghatározhatjuk egy, a végén vízszintes tengelyre rögzített vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát.

A Steiner tétellel

A 12. fejezetből ismert, hogy a vékony rúd tömegközéppontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$I = \frac{1}{12}mL^2$$

A Steiner tétel [(13-8) egyenlet] szerint a rúd végén átmenő párhuzamos tengelyre a tehetetlenségi nyomaték

$$I = I_{TKP} + MR^2$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}mL^2$$

Közvetlen integrálással

A tehetetlenségi nyomaték általános kifejezése (12-2 egyenlet):

$$I = \int r^2 dm$$

A tömegelemet a következő képpen választjuk meg:

$$dm = \rho_\ell dr$$

ahol ρ_ℓ a hosszúságegységre eső tömeg. (Esetünkben $\frac{m}{L}$.) Ezért

$$I = \int_0^L r^2 \rho_\ell dr = \rho_\ell \int_0^L r^2 dr$$

$$I = \rho_\ell \frac{r^3}{3}\bigg|_0^L = \frac{1}{3}\rho_\ell L^3$$

Mivel $\rho_\ell = \frac{m}{L}$, így

$$\underline{I = \frac{1}{3}mL^2}$$

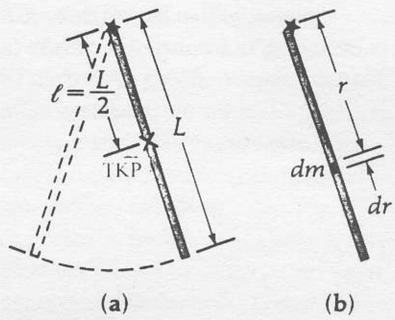
Tehát a periódusidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}mL^2\right)}{mg\left(\frac{L}{2}\right)}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(1{,}1\,\mathrm{m})}{3\left(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}} = 1{,}72\,\mathrm{s}$$

b) Az L' hosszúságú fonálinga lengésideje $T = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$. Összevetve ezt a (15-25) összefüggéssel és az L' hosszúságot kifejezve, azt kapjuk, hogy:

$$L' = \frac{2Ig}{mgL} = \frac{2\left(\frac{1}{3}mL^2\right)g}{mgL} = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(1{,}1\,\mathrm{m}) = 0{,}733\,\mathrm{m}$$



15-14 ábra
A 15-9 feladathoz.

15.8 A rezonancia

Egy „gumiasztal" (amin cirkuszi akrobaták ugrálnak) könnyen hozható nagy amplitúdójú rezgésbe. Nem kell hozzá egyebet tenni, csak a lengés sajátfrekvenciájával (vagy ennek maradéknélküli osztójával egyező frekvenciával) ismétlődő kicsiny ütéseket mérni rá. Továbbá szükséges, hogy az impulzusokat a mozgás alkalmas fázisában adjuk át, ne a mozgással ellentétesen, nehogy az amplitúdót – növelés helyett – csökkentsük. Ez a két tényező – az impulzusok *sajátfrekvenciával* és *alkalmas fázisban* való gyakorlása – fontos szerepet játszik a következőkben tárgyalt mozgás-típusban.

Azt a jelenséget, amelyben egy rendszer a reá alkalmazott impulzusok közül bizonyos sajátfrekvenciákra szelektív módon reagál, **rezonanciának** nevezzük. Ez a a fizika sok ágában előfordul, például a mechanikában, az optikában és az elektromos áramkörökben csakúgy, mint az atomfizikában és a magfizikában. A mechanikai ingának csak egyetlen sajátfrekvenciája van, amelyre rezonál. Az olyan rendszereknek mint a rezgő húr vagy a dob, sok sajátfrekvenciájuk van, a rajtuk gerjeszthető különböző frekvenciájú állóhullámok következtében. Bevezető tárgyalásunkban figyelmünket egydimenziós rendszerek vizsgálatára korlátozzuk. A következtetéseket azonban könnyen kiterjeszthetjük a bonyolultabb két- és háromdimenziós esetekre.

Csillapított rezgések

Tekintsünk egy rugóra felfüggesztett testet, amely a Hooke-törvényt követi (15-15 ábra). Ha nem lenne súrlódás, akkor a rendszer az ω_0 sajátfrekvenciával rezegne [a (15-7) és a (15-8) egyenletekből]:

ω_0 sajátfrekvencia (súrlódás nélkül)
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(15-26)}$$

ahol ω_0 radián/másodpercben van mérve.

Milyen hatást vált ki a súrlódás? Sok esetben a súrlódás közelítőleg a mozgás *sebességével* arányos[4]. Vagyis

A súrlódási erő
$$f_k = -\ bv = -\ b\frac{dx}{dt} \qquad \text{(15-27)}$$

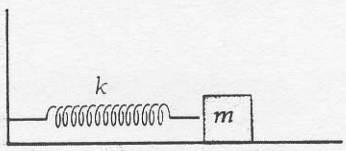
ahol a b állandó a **csillapítási tényező**.

Newton $\Sigma F = ma$ második törvényét alkalmazzuk. Mivel a testre *két* erő hat:

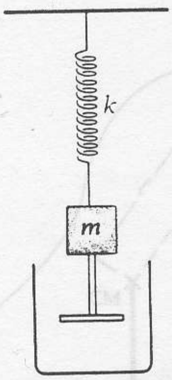
$$\left[-kx - b\frac{dx}{dt}\right] = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

innen rendezéssel
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \text{(15-28)}$$

adódik. Ezt a differenciálegyenletet a test **mozgásegyenletének** nevezik. Ha a csillapítás kicsi, azaz $\left(\frac{b}{2m}\right) < \sqrt{\frac{k}{m}}$, a megoldás (vagyis az egyenletet kielégítő x, mint t függvénye):



a) A vízszintes felületen súrlódás lép fel.



b) A testre erősített tárcsa folyadékba merül, ezzel súrlódásos csillapító erőt fejt ki, ami a test mozgását gátolja.

15-15 ábra
Példák a csillapított harmonikus rezgő mozgásra. A test mozgása mindkét esetben súrlódási erők ellenében megy végbe.

[4] Mérsékelt sebesség esetén a csúszó felületek közötti súrlódási erő állandó. Nagyobb sebességeknél a súrlódási erő változik, rendszerint csökken a sebességgel. Folyadékban való mozgásnál azonban a súrlódási erő nagyobb sebességeknél általában növekedik. A lamináris áramlás (ezzel majd a 17. fejezet foglalkozik) bizonyos eseteiben a súrlódási erő közel arányos a sebesség négyzetével.

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t - \alpha) \tag{15-29}$$

ahol az A amplitúdó az idővel exponenciálisan csökken, mivel a súrlódás fogyasztja a rezgő test energiáját (a súrlódás **disszipatív** erő).

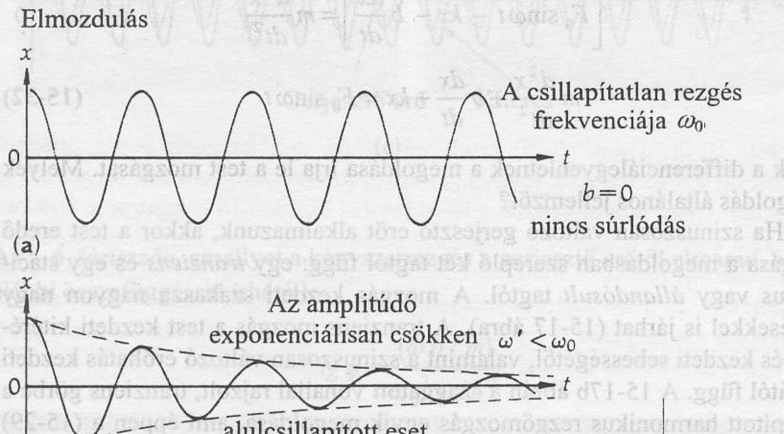
Exponenciális amplitúdócsökkenés csillapítás hatására

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \tag{15-30}$$

Viszonylag kis csillapítás esetén a rendszer ω_0-nál valamivel kisebb ω' frekvenciával rezeg:

CSILLAPÍTOTT ω' FREKVENCIA (kis csillapítás esetén, ha $\left(\frac{b}{2m}\right) < \sqrt{\frac{k}{m}}$)

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{15-31}$$



15-16 ábra
A Hooke törvényt követő rugóra akasztott test mozgása a súrlódási erő növelésének függvényében. A test mindegyik esetben nyugalmi helyzetből indul és kezdeti kitérése x_0.

Az *α fázisszög* és az *A amplitúdó* a $t = 0$ időponthoz tartozó kezdeti feltételektől függ. A 15-16 ábrán látható esetben a test x_0 kezdeti kitéréssel indul (ez itt az A_0 amplitúdó). Az egyes görbék a súrlódási erő növelésének kvalitatív hatását érzékeltetik. Az ilyen mozgást **csillapított harmonikus mozgásnak nevezzük**, mert a rezgés amplitúdója exponenciálisan csökken, miközben a rezgés energiája súrlódás következtében hővé alakul.

Kényszerrezgések

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a rendszerre egy külső „gerjesztő erő" hat. Feltételezzük, hogy ez az erő a következőképpen adható meg:

$$\text{A gerjesztő erő} \qquad F = F_0 \sin \omega t.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: ω jelenti a gerjesztő frekvenciát, ω' a kis csillapításhoz tartozó frekvenciát és ω_0 a csillapítás nélküli sajátfrekvenciát. Az ω gerjesztő frekvencia bármekkora értéket felvehet.

A testre most *három* erő hat: egy Hooke-törvény szerinti $-kx$ erő, egy ellenállási $-b(dx/dt)$ erő és az $F_0 \sin\omega t$ gerjesztő erő. A test mozgását Newton második törvénye szabja meg:

$$\Sigma F = ma$$

$$\left[F_0 \sin\omega t - kx - b\frac{dx}{dt}\right] = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

azaz
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin\omega t \qquad \textbf{(15-32)}$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása írja le a test mozgását. Melyek a megoldás általános jellemzői?

Ha szinuszosan változó gerjesztő erőt alkalmazunk, akkor a test eredő mozgása a megoldásban szereplő két tagtól függ: egy *tranziens* és egy stacionárius vagy *állandósult* tagtól. A mozgás kezdeti szakasza nagyon nagy kitérésekkel is járhat (15-17 ábra). A tranziens mozgás a test kezdeti kitérésétől és kezdeti sebességétől, valamint a szinuszosan változó erőhatás kezdeti fázisától függ. A 15-17b ábrán a szaggatott vonallal rajzolt, tranziens görbe a csillapított harmonikus rezgőmozgás egyik megoldása, ami éppen a (15-29) egyenletnek felel meg $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

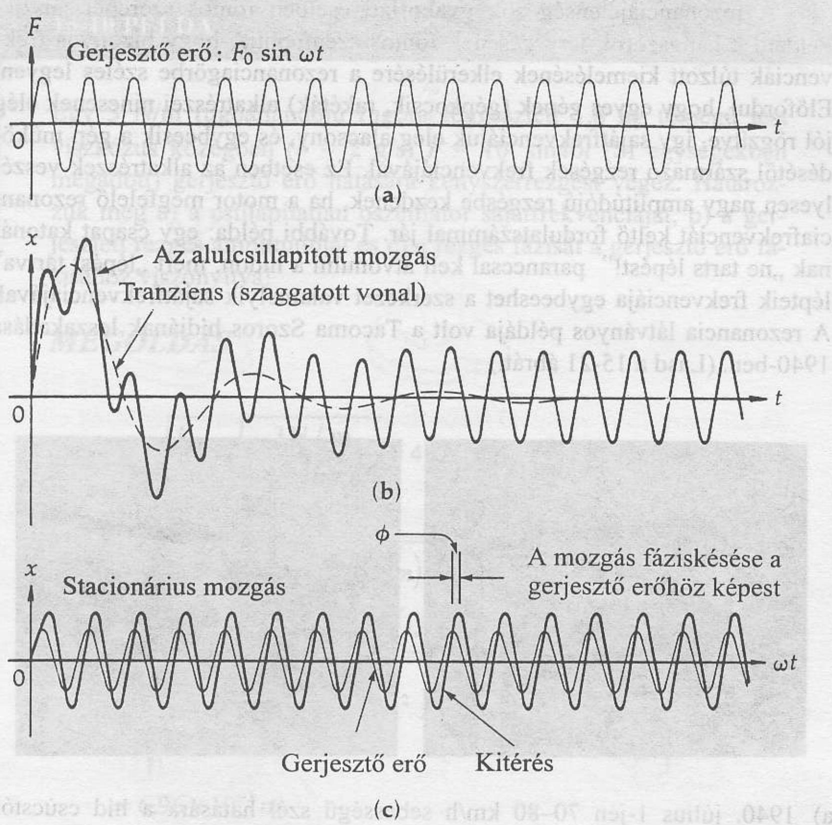
A tranziens szakaszban a gerjesztő erő mindaddig növeli a rendszer potenciális és kinetikus energiáját, amíg a rendszerbe táplált energia átlagértéke a súrlódási jelenség következtében fellépő átlagos energiaveszteséggel egyenlővé nem válik. Eközben a tranziens mozgás exponenciálisan csökken és a rendszer mozgása tiszta szinuszos rezgésbe az ún. **állandósult (stacionárius) állapotba** megy át. A test ekkor az ω meghajtó frekvenciával **kényszerített harmonikus rezgést** (kényszerrezgést) végez. Fázisa a gerjesztő erő fázisa mögött ϕ szöggel elmarad.

Bizonyítás nélkül megadjuk az stacionárius mozgást leíró egyenletet (a 15-32 egyenlet megoldását):

A kényszerített harmonikus mozgás (stacionárius állapotra)
$$x = A\sin(\omega t - \phi) \qquad \textbf{(15-33)}$$

ahol az A amplitúdó

$$A = \frac{(F_0/m)}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega b/m)^2\right]^{1/2}} \qquad \textbf{(15-34)}$$



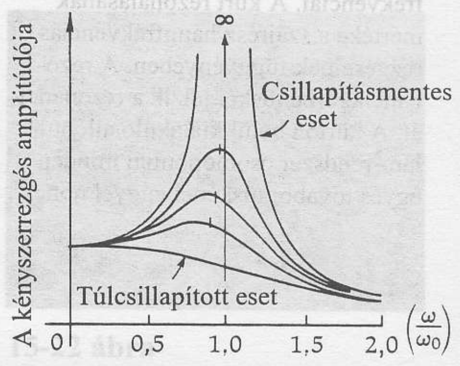
15-17 ábra

Kényszerrezgés csillapítással.
a) görbe: A harmonikus gerjesztő erő.
b) görbe: Az eredő mozgás kis csillapítás esetében, a tranziens szakasszal, amely a súrlódás nagyságától (a b csillapítási tényezőtől) függve exponenciálisan csökken.
c) görbe: A tranziens szakasz lecsengése után a test az ω gerjesztő frekvenciával stacionárius rezgést végez, de fázisa a gerjesztő erő fázisától ϕ szöggel elmarad.

Az a ϕ *fázisszög,* amellyel a kényszerrezgés a gerjesztő erőtől elmarad, az alábbi összefüggéssel írható le:

$$tg\,\phi = \frac{(\omega\, b \,/\, m)}{\omega_0^{\,2} - \omega^2}$$

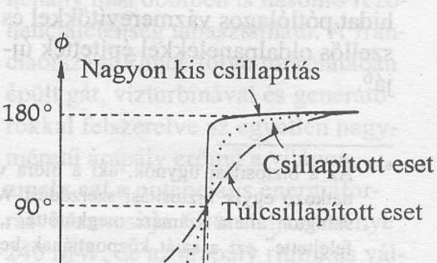
A kényszerített harmonikus rezgő mozgásnak (a kényszerrezgésnek) jellemző vonása, ahogyan az amplitúdó a gerjesztő frekvenciával változik. A 15-18 ábrán látható, hogy az amplitúdó – súrlódásmentes esetben – az $\omega = \omega_0$ rezonancia-frekvencia esetén végtelen nagyra nő. (Persze nincs olyan valóságos rendszer, amely így viselkedne. Vagy fellép valamennyi súrlódás, vagy pedig az amplitúdó növekedésekor a visszatérítő erő eltér a Hooke-törvénytől, ami miatt más differenciálegyenletet kellene alkalmazni.) A csillapítás növelésével a rezonanciagörbe viszonylag szélesebbé válik, és *a görbe csúcsa* – tehát a *rezonanciafrekvencia* – egyre inkább az alacsonyabb frekvenciák felé tolódik.[5] *„Túlcsillapított"* esetben nincsen csúcs. A 15-19 ábra azt mutatja, hogy miként függ a ϕ fázisszög a frekvenciától. Ha egy rendszer több különböző állóhullám módussal képes rezegni, akkor a rezonanciagörbének sok rezonanciacsúcsa van. Ezek mindegyike egy-egy jól definiált rezonanciafrekvenciának felel meg (lásd a 15-20 ábrát).



A gerjesztőerő ω és a rezgő rendszer ω_0 frekvenciájának ω/ω_0 aránya

15-18 ábra

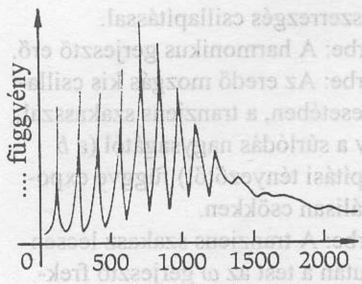
A kényszerített harmonikus rezgés amplitúdója, mint a gerjesztő erő ω frekvenciájának függvénye. Az egyes görbék a csillapítási tényező különböző értékeinek felelnek meg. A görbék csúcsához közel rajzolt rövid függőleges vonalak a gerjesztőerő nélküli esetre vonatkoztatva a csillapított rezgések ω' frekvenciáit (lásd a 15-30 egyenletet) jelölik.



15-19 ábra

A ϕ fázisszög (amennyivel a kitérés a kényszererő mögött marad) az ω kényszerfrekvencia függvényében. A görbék három különböző csillapítási esetet mutatnak be.

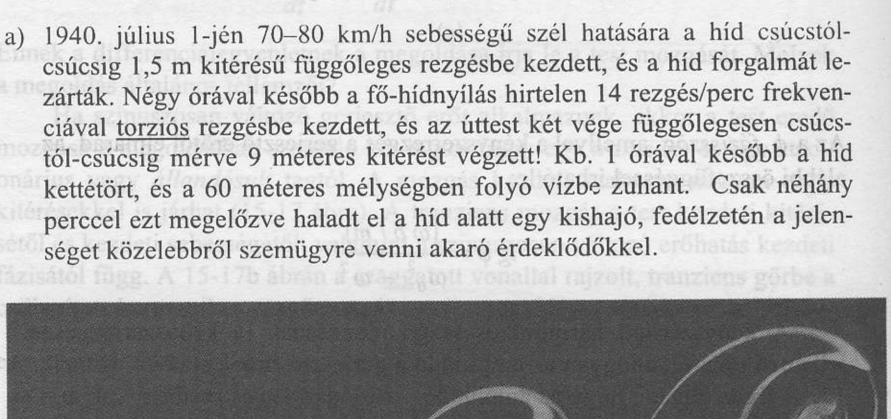
[5] Csillapított rezgések „rezonanciafrekvenciája" sokféleképpen definiálható. Rendszerint a legnagyobb amplitúdóhoz tartozó frekvenciával értelmezzük. Bizonyos esetekben azonban hasznosabb úgy definiálni, mint azt a frekvenciát, amelynél a test sebessége a legnagyobb. Ez utóbbi a rendszer számára a maximális teljesítményfelvétel frekvenciája; a csillapítás nélküli $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvenciánál jelentkezik.



15-20 ábra
Egy tizenkilencedik századi kürt sajátfrekvenciái. A kürt rezonálásának mértéke a szájrész hangfrekvenciás rezgéseinek függvényében. A rezonanciagörbe tüskéi jelzik a rezonanciát. A kürtön belül kialakuló állóhullám-rendszer csomópontjai minden egyes további tüskénél eggyel nőnek.

A rezonanciajelenség sok gyakorlati esetben fontos szerepet játszik. Például a hangszórók tervezésének fontos szempontja, hogy bizonyos frekvenciák túlzott kiemelésének elkerülésére a rezonanciagörbe széles legyen. Előfordul, hogy egyes gépek (gépkocsik, rakéták) alkatrészei nincsenek elég jól rögzítve, így sajátfrekvenciájuk elég alacsony, és egybeesik a gép működésétől származó rezgések frekvenciájával. Ez esetben az alkatrészek veszélyesen nagy amplitúdójú rezgésbe kezdenek, ha a motor megfelelő rezonanciafrekvenciát keltő fordulatszámmal jár. További példa: egy csapat katonának „ne tarts lépést!" paranccsal kell átvonulni a hídon, mert „lépést tartva" lépteik frekvenciája egybeeshet a szerkezet valamelyik sajátfrekvenciájával. A rezonancia látványos példája volt a Tacoma Szoros hídjának leszakadása 1940-ben. (Lásd a 15-21 ábrát.)

a) 1940. július 1-jén 70–80 km/h sebességű szél hatására a híd csúcstól-csúcsig 1,5 m kitérésű függőleges rezgésbe kezdett, és a híd forgalmát lezárták. Négy órával később a fő-hídnyílás hirtelen 14 rezgés/perc frekvenciával torziós rezgésbe kezdett, és az úttest két vége függőlegesen csúcstól-csúcsig mérve 9 méteres kitérést végzett! Kb. 1 órával később a híd kettétört, és a 60 méteres mélységben folyó vízbe zuhant. Csak néhány perccel ezt megelőzve haladt el a híd alatt egy kishajó, fedélzetén a jelenséget közelebbről szemügyre venni akaró érdeklődőkkel.



b) A szilárd akadálynak ütköző légáram (vagy folyadékáram) az akadály mögött örvény-leválás néven ismert folyamatban váltakozóan az egyik és a másik oldalon válik le, ezáltal az akadályra periodikus erőt gyakorol. Ilyen effektus következtében hozta függőleges rezgésbe a Tacoma Szakadék hídját az állandó vízszintes irányú szél. (Az ablakban lógó lécroletta vízszintes lapjai is ilyen effektus miatt szoktak csapdosni, ha közöttük átfúj a szél.)
A fényképfelvétel 1 cm átmérőjű szilárd hengeren 1,4 cm/s sebességgel átáramló vízről készült. Az áramlást elektrolitos úton kiválasztott, keskeny fénynyalábbal megvilágított parányi hidrogén buborékok teszik láthatóvá.

15-21 ábra
Washington Államban a Puget Sound közelében lévő Tacoma Szoros hídját a helybeliek „Galoppozó Gertie" néven ismerték. Ha mérsékelt szél fújt, gyakran alakult ki rajta függőleges síkú állóhullám rendszer, a két pillér között 0–8 csomóponttal. A függőleges rezgések amplitúdói gyakran olyan nagyok voltak, hogy az elől haladó gépkocsi a mögötte jövő szeme elől szinte teljesen eltűnt. Ez a szokatlan, izgalmas élmény nagyszámú érdeklődőt vonzott a hídhoz többszáz mérföldes környékről. A hidat pótlólagos vázmerevítőkkel és szellős oldalpanelekkel építették újjá[6].

[6] Az a biztositási ügynök, aki a hídra vonatkozó egyik biztositási szerződést Washington állam számára megkötötte, „elfelejtette" ezt a saját központjának bejelenteni és a prémiumot zsebrevágta. Amikor később sikkasztással vádolták és 15 évi javítómunkára ítélték, megjegyezte: ha a híd csak egy héttel is tovább megmaradt volna, akkor a csalás soha nem derült volna ki. Ezt azért mondhatta, mert a híd felügyelői, bízva a híd biztonságában, éppen egy héttel később akarták felmondani a szerződést. A szabálytalanság ellenére a biztosító társaság tiszteletben tartotta a szerződést.

15-10 PÉLDA

Egy 3 N/m rugóállandójú rugóra függesztett 1,8 kg tömegű test viszkózus közegben (b = 2 g/s) $F = 10^{-3}\sin 40t$ (SI egységekben megadott) gerjesztő erő hatására kényszerrezgést végez. Határozzuk meg a) a csillapítatlan oszcillátor sajátfrekvenciáját, b) a gerjesztett rezgés amplitúdóját és c) a rezgés fázisát a gerjesztő erő fázisához viszonyítva!

MEGOLDÁS

a) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3\,\mathrm{N/m}}{1{,}8\times10^{-3}\,\mathrm{kg}}} = 40{,}82\,\mathrm{rad/s} = 6{,}50\,\mathrm{Hz}$$

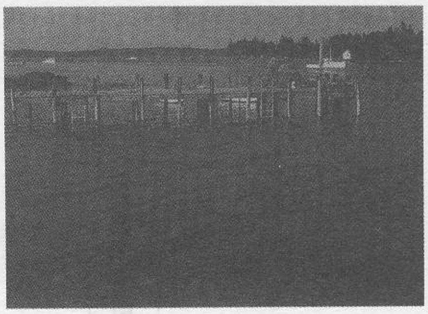
b) $$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+\left(\omega b/m\right)^2}}$$

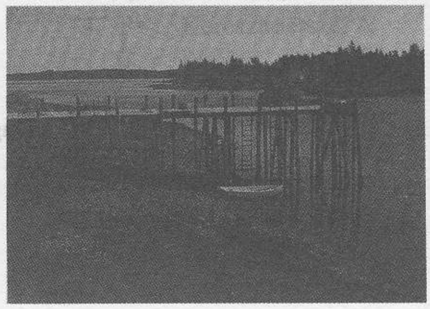
$$A = \frac{\left(1\times10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(1{,}8\times10^{-3}\,\mathrm{kg}\right)}{\sqrt{\left[\left(40{,}82\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2-\left(40\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\left(40\,\mathrm{s}^{-1}\right)\left(2\cancel{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)}{\left(1{,}8\cancel{g}\right)}\right)^2}}$$

$$= 6{,}96\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

c) $$\phi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{(\omega b/m)}{\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)} = \frac{\left(40\,\mathrm{s}^{-1}\right)\left(2\cancel{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)/\left(1{,}8\cancel{g}\right)}{\left(40{,}82\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2-\left(40\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2}$$

$$\phi = 0{,}588\,\mathrm{rad} = 33{,}7^\circ$$





15-22 ábra

A világon a legnagyobb méretű árapály a nyugat-kanadai New Brunswick és Nova Scotia között fekvő Fundy öbölben jelentkezik. A jelenséget részben rezonancia-hatás okozza. Az öbölben oda-vissza csapódó víz periódusidője kb. 12 óra, nagyjából ugyanannyi, mint az öböl szájánál naponta kétszer jelentkező kb. 3 méteres óceáni árapályé. Ennek a rezonanciának és az öböl felső végének szűkülete következtében az öböl felső végén az árapály szintjének változása akár 15 m is lehet. A világon néhány más öbölben is hasonló rezonanciajelenség tapasztalható. A franciaországi Rance folyó torkolatában épült gát, vízturbinával és generátorokkal felszerelve az egyetlen nagyméretű árapály erőmű a világon, amely ezt a potenciális energiaforrást hasznosítja. Csúcsteljesítménye 240 MW, de az árapály ritmikus változása miatt átlagos teljesítménye csak 62 MW. Ha minden erre alkalmas helyen árapály erőmű létesülne, ezek összes teljesítménye talán 16000 MW lenne, ami nagyjából csak 1%-a a világ jelenlegi elektromos teljesítményigényének.

15.9 Az anyag rugalmas tulajdonságai

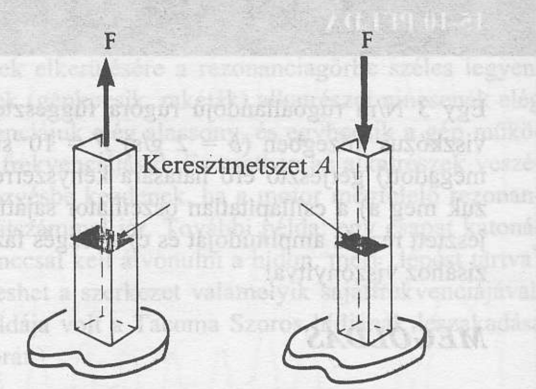
A Hooke-törvénynek megfelelő rugó viselkedése a rugó anyagának rugalmas tulajdonságaitól függ. Minden anyag deformálódik, ha külső erők hatnak rá – nincs tökéletesen merev anyag. Gyakran olyan kicsi a deformálódás, hogy elhanyagolható, és így jogosulttá válik a „merev" test fogalmának a bevezetése. De más esetekben a deformáció jelentős és mi az alábbiakban ezzel számolunk.

A testek deformálásának három alapvető módja van (15-23 ábra). A testet egy irányban húzhatjuk vagy összenyomhatjuk; a testet a rá ható nyomás növelésével kisebb térfogatúra összenyomhatjuk; és „nyíró" erőt fejthetünk ki rá ahhoz hasonlóan, ahogyan egy könyv felső borítólapját vízszintesen eltoljuk miközben a könyv az asztalon nyugszik. Egyéb, összetettebb deformációk e három alapvető típus kombinációi. Mindegyik esetben a felületen (vagy magában az anyag belsejében) a *felületegységre ható erőt* **feszültségnek** nevezzük:

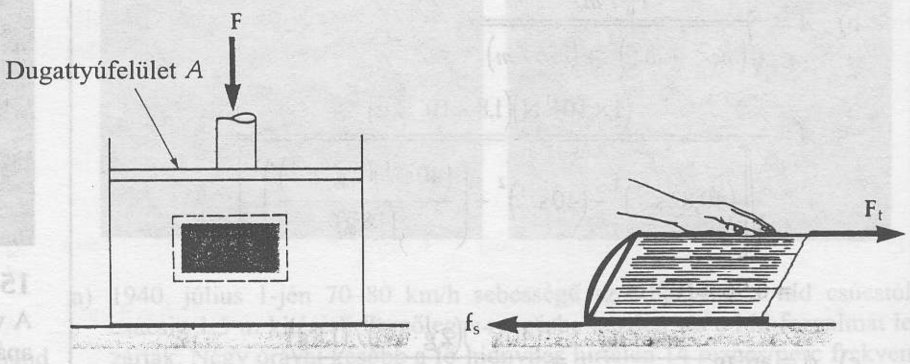
Feszültség $$\text{Feszültség} = \frac{\text{erő}}{\text{felület}} = \frac{F}{A} \qquad (15\text{-}35)$$

15-23 ábra

Testek deformálásának különböző módjai.

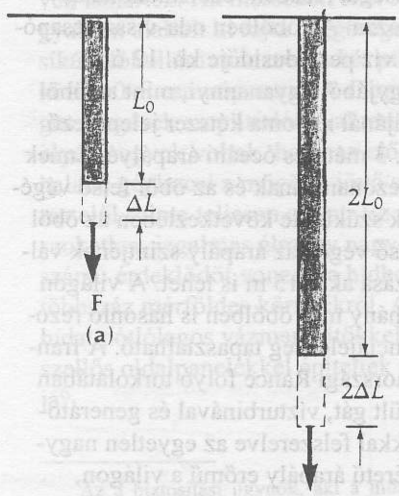


a) Húzó feszültség b) Nyomó feszültség



c) Térfogati összenyomódás megnövelt nyomás hatására

d) Asztalon nyugvó könyvre gyakorolt nyíró-feszültség



15-24 ábra

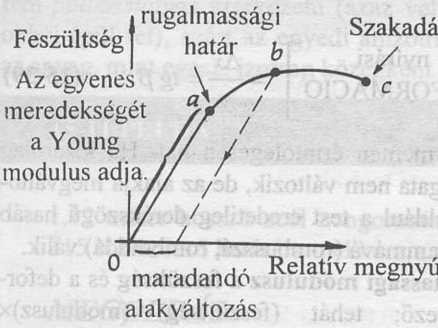
Az a méret, amellyel egy test adott F erő hatására megnyúlik, arányos a test eredeti hosszával. A b) részábrán látható test hossza kétszer akkora, mint az a) ábrán lévőé, és azonos erő hatására a megnyúlás hossza kétszeres. (A keresztmetszet mindkét esetben azonos.)

Az anyag feszültség hatására bekövetkező alakváltozását **deformációnak** nevezzük. A deformáció dimenzió nélküli hányados, a *fizikai méretek változásának arányát* méri:

Deformáció
$$\text{Deformáció} = \frac{\text{méretváltozás}}{\text{eredeti méret}} \tag{15-36}$$

Az, hogy a deformáció dimenzió nélküli arányszám, azt jelenti, hogy csupán az anyag molekuláris tulajdonságától függ, nem pedig a test speciális méreteitől. Ennek belátására tekintsünk egy eredetileg L_0 hosszúságú rudat (15-24a ábra). A rá ható F húzóerő hatására ΔL értékkel megnyúlik, és a deformáció (megnyúlás) $\Delta L/L_0$. Ha most ugyanez az F erő egy $2L_0$ hosszúságú rúdra hat, akkor a rúd megnyúlása $2\Delta L$ lesz (mert kétszer annyi molekulát húzunk szét ugyanazzal az F húzóerővel.) Ennek ellenére a relatív megnyúlás azonos azaz $2\Delta L/2L_0 = \Delta L/L_0$. Tehát a deformáció definíciója csak a szóban forgó anyag molekuláris tulajdonságaitól függ, nem pedig az anyag méreteitől.

Rugalmas anyagok azok, amelyekre érvényes a Hooke-törvény. Azaz, a testen bekövetkező deformáció arányos a feszültséggel, és ha a feszültség megszűnik, a test visszanyeri eredeti méreteit. Azonban minden anyagnak van egy *rugalmassági határa*, amelyen túl a deformáció visszaalakulása már nem teljes, maradandó alakváltozás lép fel (15-25 ábra). A feszültség további növelésével az anyag a *törési szilárdság*, vagy *szakítószilárdság* néven ismert feszültségértéknél elszakad, eltörik. A szakítószilárdság húzásra és nyomásra nem ugyanakkora; az üveg például kb. ötször akkora feszültséget bír ki nyomásra, mint húzásra. Ez azért van, mert amikor az atomok egy adott mértékben összébb nyomódnak, akkor a közöttük fellépő taszítóerő nem egyenlő



15-25 ábra

Tipikus feszültség – megnyúlás (alakváltozás) diagram. A diagramnak az origótól az a pontig terjedő szakasza egyenes, ennek meredeksége a rugalmassági modulusz. A rugalmasság határán túl az anyag maradandó alakváltozást szenved. Ha például a feszültséget a b pontban megszüntetik, az anyag nem veszi vissza teljesen eredeti méretét, hanem maradandó alakválozás lép fel. Ha a feszültség eléri a c pontot, az anyag eltörik (vagy elszakad).

azzal a vonzóerővel, amely azonos nagyságú széthúzás esetén fellép (lásd a 7-10 példát).

Homogén izotróp anyagok (5. lábjegyzet, 361. oldal) rugalmas tulajdonságait leírhatjuk három, egymástól eltérő, **rugalmassági modulusz** néven nevezett állandó megválasztásával*. Ezek azt jellemzik, hogy miként változik meg a test mérete erő hatására. A rugalmassági moduluszok a feszültség és a deformáció közötti arányosságot fejezik ki, és a következőképpen határozhatók meg:

HOSSZIRÁNYÚ DEFORMÁCIÓ. Ha egy lineáris kiterjedésű testet $F_\perp$ erővel húzunk vagy nyomunk, (15-26a ábra), akkor a

$$\begin{bmatrix}\text{húzó, vagy}\\ \text{nyomó}\\ \text{FESZÜLTSÉG}\end{bmatrix} = \frac{\Delta F_\perp}{A} \qquad \begin{bmatrix}\text{húzási, vagy}\\ \text{nyomási}\\ \text{MEGNYÚLÁS}\end{bmatrix} = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad (15\text{-}37)$$

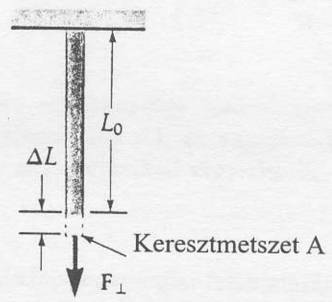
Az $F_\perp$ erő merőleges az A felületre. Ha az A felület a test teljes hossza mentén állandó, akkor a feszültség az anyag teljes térfogatában homogén.

TÉRFOGATI DEFORMÁCIÓ. Ha egy testre gyakorolt nyomást növeljük, (pl. úgy, hogy nyomás alatt lévő folyadékba merítjük), (15-26b ábra), akkor a test minden felületére merőlegesen ható erők a testet kisebb térfogatra nyomják össze. (Hasonlóképpen, a nyomás csökkentésével a test térfogata megnő.) Erre az esetre érvényes a

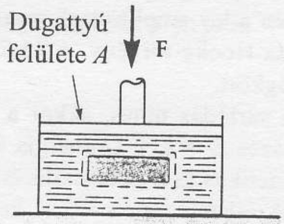
$$\begin{bmatrix}\text{térfogati}\\ \text{ÖSSZENYOMODÁS}\end{bmatrix} = \frac{\Delta F}{A} = \Delta P \qquad \begin{bmatrix}\text{térfogati}\\ \text{DEFORMÁCIÓ}\end{bmatrix} = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad (15\text{-}38)$$

A test térfogatváltozást szenved, de alakja az eredetivel azonos marad.

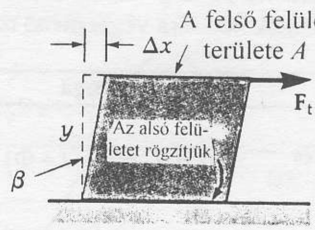
* Homogén izotróp közeg deformációjának leírására két rugalmassági állandó elegendő. Az itt említett három rugalmassági modulusz között fennáll egy összefüggés.(A fordító megjegyzése)



a) Az A területű keresztmetszetre merőleges $\Delta F_\perp$ erő $\Delta F_\perp/A$ húzó *feszültséget* eredményez. Az eredő *alakváltozás* (megnyúlás) $\Delta L/L_0$.



b) Egy hasáb a nyomási $\Delta P = \Delta F/A$ kompressziós *feszültség* hatására $\Delta V/V_0$ kompressziós *alakváltozást* (összenyomódást) szenved.



c) A derékszögű hasáb az A területű fedőlapra *tangenciálisan* ható ΔF_t erő következtében $\Delta F_t/A$ nyíró *feszültségnek* van kitéve. A nyírási *alakváltozás* mértéke $\mathrm{tg}\,\beta = \Delta x/y$.

15-26 ábra

Az anyag deformációjának három különböző módja.

NYÍRÁSI DEFORMÁCIÓ. Ha egy testet nyíróerő hatásának tesznek ki, (15-26c ábra) akkor a

$$\begin{bmatrix}\text{nyírási}\\ \text{FESZÜLTSÉG}\end{bmatrix} = \frac{\Delta F_t}{A} \qquad \begin{bmatrix}\text{nyírási}\\ \text{DEFORMÁCIÓ}\end{bmatrix} = \frac{\Delta x}{y} = tg\,\beta \tag{15-39}$$

A ΔF_t erő a felület legfelső rétege mentén érintőlegesen hat. Ha kizárólag nyíróerő van jelen, akkor a test térfogata nem változik, de az alakja megváltozik, azaz a test deformálódik. Ha például a test eredetileg derékszögű hasáb volt, akkor keresztmetszete paralelogrammává (rombusszá, romboiddá) válik.

Minden egyes esetben a **rugalmassági modulusz** a feszültség és a deformáció közötti arányossági tényező; tehát (feszültség) = (modulusz)× (deformáció). Ha a feszültség a deformációval jó közelítéssel arányos, akkor a modulusz lényegében állandó, és az anyagról azt mondjuk, hogy engedelmeskedik a Hooke-törvénynek. A rugalmassági moduluszok alábbi kifejezései akkor érvényesek, ha a fizikai méretek viszonylagos megváltozása nagyon kicsi (vagyis mindaddig, amíg $\Delta L \ll L_0$, $\Delta V \ll V_0$ és a β szög nagyon kicsi).

Young modulusz
(hosszirányú húzás, vagy összenyomás)

$$E = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\dfrac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\dfrac{\Delta L}{L_0}\right)} \tag{15-40}$$

Térfogati modulusz
(térfogati összenyomódás)

$$K = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\dfrac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\dfrac{\Delta V}{V_0}\right)} = -\frac{\Delta P}{\left(\dfrac{\Delta V}{V_0}\right)} \tag{15-41}$$

ahol ΔP a nyomásváltozás. (A definícióban lévő negatív előjel K-hoz pozitív értéket rendel, mert a nyomás *növekedése* a térfogat *csökkenésével* jár együtt.)

Nyírási modulusz
(nyírás)

$$G = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\dfrac{\Delta F_t}{A}\right)}{\left(\dfrac{\Delta b}{a}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\Delta F_t}{A}\right)}{tg\,\beta} \tag{15-42}$$

A rugalmassági állandók jellemző értékeit a 15-1 táblázat tartalmazza.

15-1 TÁBLÁZAT A rugalmassági moduluszok közelítő értékei

Anyag	Young modulusz $\left(\frac{N}{m^2}\right)$	Térfogati modulusz $\left(\frac{N}{m^2}\right)$	Nyírási modulusz $\left(\frac{N}{m^2}\right)$
(korona) üveg	7×10^{10}	5×10^{10}	3×10^{10}
alumínium	7×10^{10}	$7{,}5 \times 10^{10}$	$2{,}4 \times 10^{10}$
sárgaréz	9×10^{10}	7×10^{10}	$3{,}5 \times 10^{10}$
öntött bronz	$8{,}1 \times 10^{10}$	$9{,}6 \times 10^{10}$	$3{,}4 \times 10^{10}$
vörösréz	$12{,}3 \times 10^{10}$	$13{,}1 \times 10^{10}$	$4{,}5 \times 10^{10}$
acél	$20{,}6 \times 10^{10}$	$18{,}1 \times 10^{10}$	$8{,}9 \times 10^{10}$
wolfram	35×10^{10}	31×10^{10}	14×10^{10}
víz		$0{,}21 \times 10^{10}$	
higany		$2{,}8 \times 10^{10}$	

Az *anizotrop* anyagok fizikai tulajdonságai irányfüggőek. Például egy fadarabban a rostszerkezet következtében a moduluszok értéke különböző tengelyek mentén különböző. Az egykristályok anizotropok, ha atomi szerkezetük az egyes kristálytani irányok mentén különbözőek. A legtöbb szilárd fém *polikristályos* szerkezetű (azaz véletlenszerűen orientált mikrokristályokból épül fel), ezért az egyedi anizotrop tulajdonságok kiegyenlítődnek és az anyag, mint egész, izotrop közegként viselkedik.

15-11 PÉLDA

1,12 méter hosszú acél zongorahúr keresztmetszete 6×10^{-3} cm^2. 115 N húzóerő hatására mekkora a megnyúlása?

MEGOLDÁS

Az acél Young modulusza (15-1 táblázat): $E = 20{,}6 \times 10^{10}$ N/m^2.A (15-40) egyenlet szerint

$$E = \frac{\left(\dfrac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\dfrac{\Delta L}{L_0}\right)} = \frac{L_0\,\Delta F}{\gamma\, A} = \frac{(1{,}12\ \text{m})(115\ \text{N})}{\left(20{,}6\times 10^{10}\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)(6\times 10^{-7}\ \text{m}^2)}$$

Tehát

$$\Delta L = 1{,}04\times 10^{-3}\ \text{m} = 1{,}04\ \text{mm}$$

15-12 PÉLDA

Ha egy köbméter tengervíz a felszínről 3 km mélyre süllyed, ahol a nyomás 300 atm, mekkora lesz a térfogat változása? Tegyük fel, hogy a tengervíz kompresszibilitása azonos az édesvízével. (*Megjegyzés*: egy atmoszféra (atm) nyomás $1{,}013 \times 10^5$ N/m^2.)

MEGOLDÁS

A nyomás átszámítása

$$(300\ \text{atm})\underbrace{\left(\frac{1{,}013\times 10^5\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1\ \text{atm}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 3{,}04\times 10^7\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

A kompresszióra a térfogati modulust alkalmazzuk: $K = -\dfrac{\Delta P}{\left(\dfrac{\Delta V}{V_0}\right)}$

A ΔV térfogatcsökkenést kiemelve és az egyes értékeket behelyettesítve (beleértve a 15-1 táblázatból vett $B = 0{,}21 \times 10^{10}$ N/m^2 értéket), azt kapjuk, hogy

$$\Delta V = -\frac{V_0\,\Delta P}{B} = \frac{(1\ \text{m}^3)\left(3{,}04\times 10^7\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)}{\left(0{,}21\times 10^{10}\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)} = -1{,}45\times 10^{-2}\ \text{m}^3$$

Tehát az egy köbméter tengervíz új térfogata (1– 0,0145) m^3, vagyis 0,9855 m^3. Megbecsülték, hogy ezen kismértékű kompresszibilitás ellenére az átlagos tengerszint kb. 30 méterrel magasabb lenne a mostaninál, ha a víz tökéletesen összenyomhatatlan volna.

15-13 PÉLDA

Egy 5 cm élhosszúságú kockaalakú gumiszivacs felső lapjára vízszintesen (egyik élével párhuzamosan) 2N erő hat, míg az alsó lapja rögzítve van. Mekkora a nyírási modulusz, ha az erő hatására a felső lap vízszintes irányban 1 mm-rel tolódik el?

MEGOLDÁS

A $\operatorname{tg}\beta \cong \beta \cong 0{,}001\ \mathrm{m}/0{,}05\ \mathrm{m} = 0{,}02$ rad közelítéssel a (15-42) egyenletet alkalmazva felírható, hogy:

$$G = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{tg\,\beta} \cong \frac{\Delta F}{A\beta} \cong \frac{2\,\mathrm{N}}{\left(2{,}5\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2\right)\left(0{,}02\ \mathrm{rad}\right)} = 4\times10^4\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Összefoglalás

Számos természeti jelenségre jellemző, hogy a testek az egyensúlyi helyzetük felé irányuló „visszatérítő" erő hatására rezgő mozgást végeznek. Nagyon sok esetben, különösen a kis amplitúdójú mozgásokra, alkalmazható az $F = -kx$ Hooke-törvény. A 15-2 táblázat összefoglalja a jelenségkört.

Ha súrlódás nincs, akkor a rendszer konzervatív, és az összes $E = K + U$ energia állandó marad, miközben a kinetikus és a potenciális energia egymásba átalakulhat. A sebesség az $x = \pm A$ helyen, a mozgás *fordulópontján* ellenkező irányúra vált. A *referencia kör* (15-5 ábra) és az *energia diagram* (15-7 ábra) hasznos segítséget nyújt az egyszerű harmonikus rezgőmozgás összefüggéseinek megjegyzéséhez.

Kis kitérések esetén a *fonálinga* és a *fizikai inga* mozgása közelítőleg egyszerű harmonikus mozgás, tehát a Hooke-törvény szerint működő visszatérítő forgatónyomaték hatására végbemenő rezgő mozgás.

	Fonálinga	Fizikai inga
Kitérés	$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \Phi)$	$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \Phi)$
Kör-frekvencia	$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}}$	$^*\omega \approx \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$
Rezgésidő	$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$	$^*T \approx \sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$

* Itt I a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, és ℓ a tengelytől a tömegközéppontig mért távolság.

15-2 TÁBLÁZAT

	Egyenesvonalú mozgás	Forgó mozgás
Hooke-törvény	$F = -kx$	$M = -\kappa\theta$
kitérés	$x = A\cos(\omega t + \phi)$	$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$
kör-frekvencia	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$
sebesség	$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{d\theta}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$
gyorsulás	$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$ vagy $a = -\omega^2 x$	$\alpha = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$ vagy $\alpha = -\omega^2\theta$
kinetikus energia	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
potenciális energia	$U = \frac{1}{2}kx^2$	$U = \frac{1}{2}\kappa\theta^2$
összes energia	$E = U + K$	$E = U + K$

Csillapitott harmonikus rezgő mozgás megy végbe, ha a rezgő rendszerben súrlódás lép fel. Ha ilyen rendszerre egyszerű harmonikus rezgés szerint változó gerjesztő erő hat, akkor *kényszerített harmonikus mozgás (kényszerrezgés)* lép fel. Egy kezdeti, exponenciálisan csökkenő *tranziens* periódus után a rendszer a gerjesztő erő frekvenciájával *állandósult, stacionárius* állapotban rezeg, de kitérése a gerjesztő erőé mögött fázisban elmarad. A *rezonanciát* különösen nagy amplitúdók létrejötte jellemzi, ami akkor lép fel, amikor a gerjesztő impulzusok frekvenciája a rendszer sajátfrekvenciáihoz közel van.

A Hooke-törvényt követő kicsiny deformációk esetében homogén és izotróp anyag rugalmas tulajdonságai három **rugalmassági modulusszal** jellemezhető. Ezek mindegyike a **feszültség** és az adott **deformáció** hányadosa:

Young modulusz (hosszirányú nyújtás, vagy összenyomás) $$E = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)}$$

Térfogati modulusz (térfogati összenyomás) $$K = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)} = \frac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)}$$

Nyírási modulusz (nyírás) $$G = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F_t}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta F_t}{A}\right)}{tg\,\beta}$$

Minden anyagnak van *rugalmassági határa*, amelyen túl maradandó alakváltozás lép fel, és van *szakítószilárdsága*, amelynél az anyag elszakad vagy eltörik.

Kérdések

1. A liftbe ingaórát helyezünk. Késni, vagy sietni fog-e az óra, ha (a) a lift felfelé gyorsul, és ha (b) lefelé gyorsul?
2. A nagy amplitúdóval lengő inga lengésideje kisebb vagy nagyobb, mint a kis amplitúdóval lengőé?
3. Ideális (tömeg nélküli) rugóra függesztett test rezgésideje $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Ha most figyelembe veszszük a rugó tömegét is, akkor az m értékét a rugó tömegének egyharmadával meg kell növelnünk. Magyarázzuk meg kvalitatíve, mi lehet az oka annak, hogy ezt az értéket (nem pedig a rugó teljes tömegét) vesszük számításba!
4. Az érc- vagy olajtelepek geológiai felkutatásának egyfajta technikai módszeréhez olyan ingát alkalmaznak, aminek lengésideje nagy pontossággal mérhető. Hogyan működik ez a módszer?
5. Zsinóron függő vízzel telt gömböt ingaként lengésbe hozunk. A gömb alján kis lyuk van, a víz ezen keresztül lassan kicsurog. Magyarázzuk meg, miért növekszik eleinte az inga lengésideje, és miért csökken ezután.
6. Egyszerű harmonikus rezgő mozgások milyen kombinációja képes egy „végtelen jelet" (∞) kirajzolni?

Feladatok

15.2 Egyszerű harmonikus rezgő mozgás

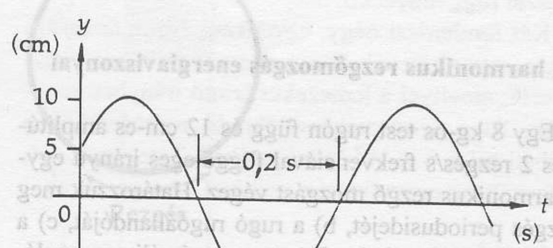
15.3 A harmonikus rezgő mozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolata

15A-1 20 g tömegű részecske egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval. (a) Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán? (b) Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel? (c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását. Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

15A-2 Felső végével állványhoz rögzített függőleges rugó alsó végén 2 kg tömegű test függ. Ahhoz, hogy a testet egyensúlyi helyzete alatt 4 cm-re nyugalmi helyzetben lehessen megtartani, 2 N lefelé irányuló többlet erő szükséges. Amidőn ez az erőhatás hirtelen megszünik, a test függőleges irányú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez a) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját és b) a rezgés frekvenciáját.

15B-3 Egy 1200 kg-os gépkocsi üresen 0,60 s periodusidővel rugózik. Mennyivel süllyednek le a kerekeket tartó rugók, ha hat, egyenként 80 kg-os személy ül be a kocsiba?

15B-4 Egy test az $x = 0{,}04\ \cos(2t)$ függvény szerint (minden mennyiség SI egységben) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a) a maximális gyorsulást, b) a mozgás periodusidejét és c) a kitérést 0,5 s-mal azután, hogy a test negatív irányban áthalad a középponton.

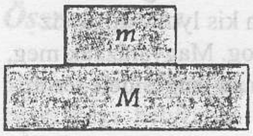


15-27 ábra
A 15A-2 feladathoz.

15B-5 f frekvenciával és A amplitúdóval egyszerű harmonikus rezgőmozgást végző vízszintes felületre pénzérmét teszünk. Határozzuk meg f és g függvényében a felület és az érme között azt a legkisebb μ_s nyugalmi súrlódási együtthatót, amely mellett az érme nem csúszik meg a felületen.

15B-6 Egy test egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez az alábbi egyenlet szerint: $x = 2\cos(10t + \pi/4)$, ahol minden adat SI egységben van. Határozzuk meg a) az amplitúdót, b) a frekvenciát és c) a mozgás T periodusidejét! Határozzuk meg az idő függvényében d) a sebességet és e) a gyorsulást SI egységekben. f) Mekkora a test kitérése a $t = 0{,}2$ s időpontban? Határozzuk meg azt az időtartamot, ami alatt a test az $x = 0$ kitérésről az $x = 1{,}5$ m kitérésre jut.

15B-7 Egy 100 g tömegű hasábot egy 200 g tömegű hasáb tetejére helyezünk a 15-28 ábra szerint. A hasábok között a tapadási súrlódási együttható 0,20. Az alsó hasábot most 6 cm-es amplitúdóval harmonikus rezgő mozgással előre – hátra mozgatjuk. a) Állandónak tartott amplitúdó esetében mekkora az a legnagyobb frekvencia, amelynél a felső hasáb az alsóhoz viszonyítva még nem csúszik meg? b) Mekkora a testekre ható legnagyobb vizszintes irányú erő az a) szerinti mozgás során?



15-28 ábra
A 15B-7 és a 15B-8 feladatokhoz.

15B-8 Tegyük fel, hogy az előbbi feladatban az alsó (200 g tömegű) hasáb nem vízszintesen, hanem *függőlegesen* végzi az egyszerű harmonikus rezgő mozgást! A frekvenciát állandó 2 rezgés/s értéken tartva, az amplitúdót fokozatosan növeljük. a) Határozzuk meg azt az amplitúdót, amelynél a felső (100 g tömegű) hasáb már nem marad érintkezésben az alsó hasábbal. b) Határozzuk meg a hasábok együttesére ható maximális húzóerőt az (a) részfeladat feltétele mellett!

15. 4 A harmonikus rezgőmozgás energiaviszonyai

15A-9 Egy 8 kg-os test rugón függ és 12 cm-es amplitúdóval és 2 rezgés/s frekvenciával függőleges irányú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a) a rezgés periodusidejét, b) a rugó rugóállandóját, c) a test maximális sebességét, d) a test maximális gyorsulását, e) a rezgő rendszer összes energiáját, f) a sebességet, amikor a test a maximális kitérés felénél van és g) a gyorsulást, amikor a test a maximális kitérés felénél van.

15A-10 Egy 48 N/m rugóállandójú rugóra 3 kg tömegű testet függesztünk. A testet nyugalmi helyzetétől 10 cm-rel lejjebb húzzuk és a $t = 0$ időpontban elengedjük. Írjuk fel (SI egységekben) a kitérést mint az idő függvényét.

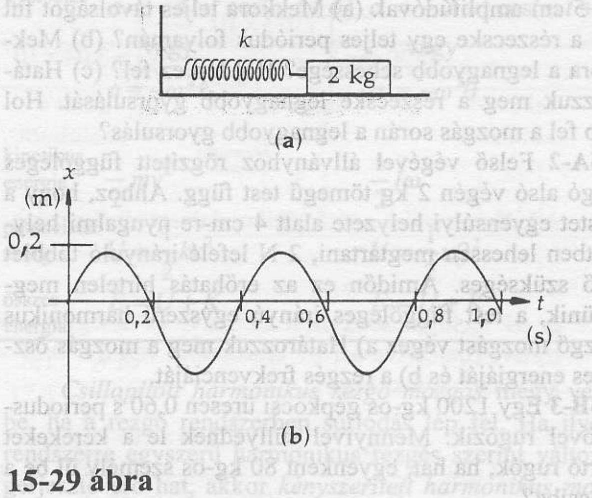
15A-11 100 g tömegű test függ egy függőleges helyzetű (a Hooke-törvényt követő) rugó végén. Ha 40 g-ot helyezünk rá, a rugó további 5 cm-rel nyúlik meg. Most a rugót ezzel a többlettömeggel 10 cm amplitúdójú függőleges rezgésbe hozzuk. a) Határozzuk meg a mozgás frekvenciáját! b) Mennyi idő alatt jut el a test a középső helyzetből a maximális kitérésig? c) Számítsuk ki a testre ható erők eredőjét a felső legnagyobb kitérésnél.

15A-12 Felső végével állványhoz rögzített függőleges rugó alsó végén 2 kg tömegű test függ. Ahhoz, hogy a testet egyensúlyi helyzete alatt 4 cm-re nyugalmi helyzetben lehessen tartani, 2 N lefelé irányuló többlet erő szükséges. Amidőn ez az erőhatás hirtelen megszűnik a test függőleges irányú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját és b) a rezgés frekvenciáját.

15B-13 Egy 2 kg-os test 240 N/m rugóállandójú rugón függ. Most ráteszünk még egy 1 kg tömegű testet, és az együttest a 2 kg-os test nyugalmi helyzetéből kezdősebesség nélkül elengedjük. a) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyre ebből a pontból a testek az elengedés után süllyednek? b) Mennyi a rezgés frekvenciája?

15B-14 A 15-29a ábra szerint a rugóra erősített 2 kg tömegű test a 15-29b ábrán vázolt módon egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a) a rezgés frekvenciáját, b) a rugóállandót és c) a rezgés összes energiáját. d) Írjuk fel (SI egységekben) numerikus egyenlet alakjában az x helyzetváltozását a t idő függvényében!

15B-15 Egy könnyű, 35 N/m rugóállandójú rugóra erősített 50 g tömegű test 4 cm-es amplitúdóval vízszintes felületen rezeg. A súrlódás elhanyagolható. Határozzuk meg a) a rezgő rendszer összes energiáját és b) a test sebességét 1 cm-es kitérésnél. Határozzuk meg a 3 cm-es kitéréshez tartozó c) kinetikus energiát és d) potenciális energiát.



15-29 ábra
A 15A-14 feladathoz.

15B-16 Rugóra erősített test vízszintes súrlódásmentes felületen fekszik és A amplitúdójú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Összes energiájának hányadrészét teszi ki a kinetikus energia akkor, amikor a kitérés $A/2$? b) Mekkora a kitérés akkor, amikor a kinetikus energia az összes energia felével egyenlő?

15B-17 Egy 0,20 kg tömegű test az $y = A\cos\omega t$ egyenletnek megfelelő egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez, ahol $A = 10$ cm és $\omega = 4$ rad/s. Határozzuk meg a kitérést a) a $t = 0$ s időpontban és b) a $t = 1$ s időpontban! c) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a test a nyugalmi helyzetből a fél amplitúdóval egyenlő kitérést ér el. d) Határozzuk meg a test legnagyobb kinetikus energiáját! e) Határozzuk meg a rezgő rendszer összes energiáját.

15B-18 Egy Hooke-törvényt követő rugó végén lévő 200 g-os test az $x = 0{,}05\cos(4t + 30°)$ függvény szerint (az értékek SI-ben) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Vázoljuk fel a mozgás grafikonját! (Jelöljük be numerikusan a $t = 0$ időponthoz tartozó kitérést!) b) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó sebességét. c) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó gyorsulását. d) Határozzuk meg a mozgás periodusidejét. e) Határozzuk meg a rugóállandót. f) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a maximális kitérés helyéről indulva annak fele távolságához jut a test. g) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját.

15.5 A fonálinga

15A-19 Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga a) frekvenciáját és b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó gyorsulás 1,67 m/s^2.

15A-20 Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

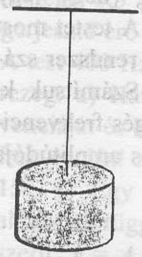
15B-21 Mutassuk meg, hogy ha a gravitációs gyorsulás Δg -értékkel megváltozik, akkor a fonálinga lengésidejének ΔT változása $-T\Delta g/2g$! (Útmutatás: az E függelék hasznos közelítéseket tartalmaz!)

15B-22 Állítják, hogy az ingaóra kissé más sebességgel jár, ha a Hold a fejünk felett van, mint amikor átellenesen a Föld túloldalán található. Fejtsük ki, melyik helyzetben jár az óra gyorsabban, és miért!

15.6 A torziós inga
15.7 A fizikai inga

15A-23 Egy 5 kg tömegű, 4 cm átmérőjű homogén tömör henger torziós ingaként acélhuzalon függ, ahogyan a 15-30 ábra mutatja, és így szimmetriatengelye körül torziós rezgést végez. A huzal torziós rugóállandója 4×10^{-4} N·m/rad. Határozzuk meg a torziós rezgés periodusidejét!

15B-24 Egy 7 kg tömegű, 6 cm sugarú homogén tömör tárcsát egy olyan huzalra függesztették fel, ami a tömegközéppponton van átfűzve. A tárcsa síkja vízszintes. Torziós ingaként torziós rezgést végez 12 s periódusidővel. a) Határozzuk meg a huzal torziós rugóállandóját. b) Tegyük fel, hogy a tárcsát ismeretlen I tehetetlenségi nyomatékú testtel helyettesítjük. Mekkora I értéke, ha a periódusidő 17 s?



15-30 ábra
A 15B-23 feladathoz.

15B-25 Egy homogén méterrudat a 70 cm-es jelvonalnál úgy függesztenek fel, hogy kis amplittúdójú rezgéseket végez egy vízszintes tengely körül, amely merőleges a méterrúd hossztengelyére. Mennyi a rezgésidő?

15B-26 Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk (15-31 ábra) úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng. a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periodusidejét. b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

15.8 Rezonancia

15B-27 Egy 4 kg tömegű testet 100 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Hidraulikus csillapítást alkalmazunk, a csillapítási együttható 5 N·s/m. A rendszernek kezdeti kitérést adunk és nyugalmi helyzetéből elengedjük. Mekkora a keletkező rezgés frekvenciája?

15-31 ábra
A 15B-26 feladathoz.

15B-28 Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A testet nyugalmi helyzetéből 0,20 m-rel kitérítjük, és kezdetisebesség nélkül elengedjük. 6 másodperc múlva amplitúdója 0,16 m-re csökken. a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót. b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

rés $A/2$? b) Mekkora a kitérés akkor, amikor a kinetikus energia az összes energia felével egyenlő?

15B-17 Egy 0,20 kg tömegű test az $y = A\ \cos\omega t$ egyenletnek megfelelő egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez, ahol $A = 10$ cm és $\omega = 4$ rad/s. Határozzuk meg a kitérést a) a $t = 0$ s időpontban és b) a $t = 1$ s időpontban! c) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a test a nyugalmi helyzetből a fél amplitúdóval egyenlő kitérést ér el. d) Határozzuk meg a test legnagyobb kinetikus energiáját! e) Határozzuk meg a rezgő rendszer összes energiáját.

15B-18 Egy Hooke-törvényt követő rugó végén lévő 200 g-os test az $x = 0{,}05\ \cos(4t + 30°)$ függvény szerint (az értékek SI-ben) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Vázoljuk fel a mozgás grafikonját! (Jelöljük be numerikusan a $t = 0$ időponthoz tartozó kitérést!) b) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó sebességét. c) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó gyorsulását. d) Határozzuk meg a mozgás periodusidejét. e) Határozzuk meg a rugóállandót. f) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a maximális kitérés helyéről indulva annak fele távolságához jut a test. g) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját.

15.5 A fonálinga

15A-19 Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga a) frekvenciáját és b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó gyorsulás 1,67 m/s^2.

15A-20 Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

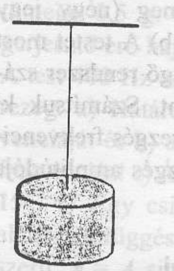
15B-21 Mutassuk meg, hogy ha a gravitációs gyorsulás Δg -értékkel megváltozik, akkor a fonálinga lengésidejének ΔT változása $-T\Delta g/2g$! (Útmutatás: az E függelék hasznos közelítéseket tartalmaz!)

15B-22 Állítják, hogy az ingaóra kissé más sebességgel jár, ha a Hold a fejünk felett van, mint amikor átellenesen a Föld túloldalán található. Fejtsük ki, melyik helyzetben jár az óra gyorsabban, és miért!

15.6 A torziós inga
15.7 A fizikai inga

15A-23 Egy 5 kg tömegű, 4 cm átmérőjű homogén tömör henger torziós ingaként acélhuzalon függ, ahogyan a 15-30 ábra mutatja, és így szimmetriatengelye körül torziós rezgést végez. A huzal torziós rugóállandója 4×10^{-4} N·m/rad. Határozzuk meg a torziós rezgés periodusidejét!

15B-24 Egy 7 kg tömegű, 6 cm sugarú homogén tömör tárcsát egy olyan huzalra függesztették fel, ami a tömegközéppponton van átfűzve. A tárcsa síkja vízszintes. Torziós ingaként torziós rezgést végez 12 s periódusidővel. a) Határozzuk meg a huzal torziós rugóállandóját. b) Tegyük fel, hogy a tárcsát ismeretlen I tehetetlenségi nyomatékú testtel helyettesítjük. Mekkora I értéke, ha a periódusidő 17 s?



15-30 ábra
A 15B-23 feladathoz.

15B-25 Egy homogén méterrudat a 70 cm-es jelvonalnál úgy függesztenek fel, hogy kis amplittúdójú rezgéseket végez egy vízszintes tengely körül, amely merőleges a méterrúd hossztengelyére. Mennyi a rezgésidő?

15B-26 Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk (15-31 ábra) úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng. a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periodusidejét. b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

15.8 Rezonancia

15B-27 Egy 4 kg tömegű testet 100 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Hidraulikus csillapítást alkalmazunk, a csillapítási együttható 5 N·s/m. A rendszernek kezdeti kitérést adunk és nyugalmi helyzetéből elengedjük. Mekkora a keletkező rezgés frekvenciája?

15-31 ábra
A 15B-26 feladathoz.

15B-28 Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A testet nyugalmi helyzetéből 0,20 m-rel kitérítjük, és kezdetisebesség nélkül elengedjük. 6 másodperc múlva amplitúdója 0,16 m-re csökken. a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót. b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

15B-29 Egy 30 g tömegű testet 15 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. a) Határozzuk meg (négy jegy pontossággal) a test sajátfrekvenciáját! b) A testet most olyan folyadékba merítjük, amely a rezgő rendszer számára 70 g/s csillapítási tényezőt jelent. Számítsuk ki (négy jegy pontossággal) a csillapított rezgés frekvenciáját! c) Mennyi idő alatt csökken a rezgés amplitúdója az eredeti érték egy ötödére?

15.9 Az anyag rugalmas tulajdonságai

15A-30 Egy hegymászó biztonsági célból 50 m hosszú, 10 mm átmérőjű nylon kötelet használ. Ha a kötél egyik vége a 90 kg-os hegymászót tartja, akkor 1,6 métert nyúlik. Határozzuk meg a kötél anyagának Young-moduluszát!

15A-31 400 km-rel a Föld felszíne alatt a nyomás $1{,}36 \times 10^{10}$ Pa. Ha ebből a mélységből 1 cm^3 rezet hoznánk fel, mennyi lenne a térfogata a Föld felszínén?

15A-32 a) Határozzuk meg annak a 18 m hosszú acélhuzalnak a legkisebb átmérőjét, amelyik az alsó végén függő 380 kg-os teher hatására nem nyúlik 9 mm-nél többet! b) Fellép-e maradandó alakváltozás, ha az anyag rugalmassági határa 3×10^8 N/m^2?

15A-33 Egy 7 cm élhosszúságú zselatin kocka egy tányéron fekszik. A felső lapra gyakorolt 0,2 N vízszintes irányú erő hatására a kocka teteje 3 mm-t eltolódik. Számítsuk ki a zselatin nyírási moduluszát!

15A-34 Egy 8 cm élhosszúságú zselatin kockára egy gyermek nyíró feszültséget fejt ki oly módon, hogy alaplapját rögzítve tartja, míg felső lapjára vízszintes irányú 1,3 erőt gyakorol. Mennyi a zselatin nyírási modulusza, ha a felső lap a feszültségmentes állapotból 1 cm-rel mozdul el?

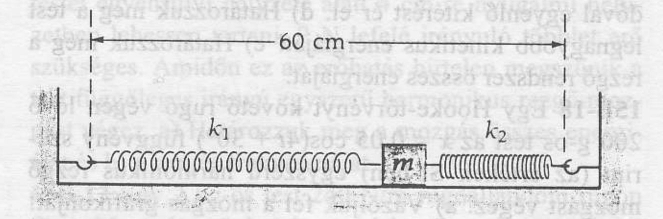
15B-35 Ha egy huzalt húzunk, akkor annak x megnyúlása arányos az F húzóerővel. Így az anyag a Hooke-törvényt követi: $-F = kx$. Fejezzük ki a k rugóállandót az E Young-modulusz, az L_0 hosszúság és az A keresztmetszet függvényében.

15B-36 Két fémlemezt négy, egyenként 7 mm átmérőjű acélszegeccsel erősítettek össze. Számítsuk ki azt a maximális erőt, amellyel a lemezeket érintő irányban meghúzhatjuk, ha a szegecsekben ébredő nyírófeszültség nem lépheti túl a 8×10^7 N/m^2 értéket! Tételezzük fel, hogy a feszültség egyenletesen oszlik el a szegecseken.

További feladatok

15C-37 Egy meg nem feszített l hosszúságú, k rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik. a) Fejezzük ki mindegyik rugó darab k rugóállandóját. b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

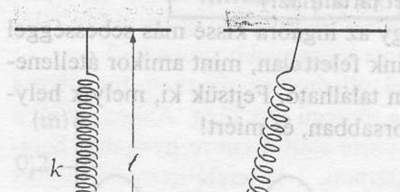
15C-38 Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban 20 cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek: $k_1 = 40$ N/m, és $k_2 = 80$ N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó $m = 0{,}60$ kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól 60 cm távolságban lévő kampókhoz erősítik (15-32 ábra). Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható, a) a baloldali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete? b) Mekkora a test egyszerű harmonikus rezgő mozgásának a frekvenciája a rugók irányában?



15-32 ábra
A 15C-38 feladathoz.

15C-39 Egy k rugóállandójú rugó végére akasztott m tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban) l hosszúságúra nyújtja. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 15-33b ábra szerint függőleges síkban mozogva „nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a k rugóállandót m, l és g függvényében.

15C-40 Az L hosszúságú, vékony homogén rudat oly módon rögzítik, hogy a gravitáció hatására függőleges síkban leng. A felfüggesztési pont a rúd tömegközéppontjától számítva, különböző r távolságra állítható be. a) Fejezzük ki e fizikai inga T lengésidejét L, r és g függvényében! b) A kapott kifejezést differenciálva és zérussal egyenlővé téve mutassuk meg, hogy a legkisebb T_{min} lengésidő az $r = L/\left(2\sqrt{3}\right)$ távolsághoz tartozik.

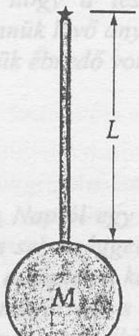


15-33 ábra
A 15C-39 feladathoz.

15C-41 a) Igazoljuk, hogy az egyszerű harmonikus rezgő mozgás kinetikus energiájának idő szerinti átlaga egyenlő a potenciális energia idő szerinti átlagával! (Javaslat: átlagoljunk a mozgás egy periodusára!) b) Mutassuk meg, hogy ha a mozgás egy ciklusának teljes hosszára átlagolunk, akkor az átlagok a következőek: $K_{\text{átl.}} = (1/3)kA^2$ és $U_{\text{átl.}} = (1/6)kA^2$, (lásd a 15-7 ábrát a 351. oldalon). c) Adjuk meg a fizikai okát, miért különböznek egymástól az a) és a b) válaszok!

15C-42 Egy ingaóra tökéletesen pontos azon a helyen, ahol a nehézségi gyorsulás éppen 9,80 m/s^2. Ha az órát magasabb helyre visszük, naponta 8 másodpercet késik. Számítsuk ki g értékét az új helyen! (Útmutatás: az E függelékben hasznos közelítés található.)

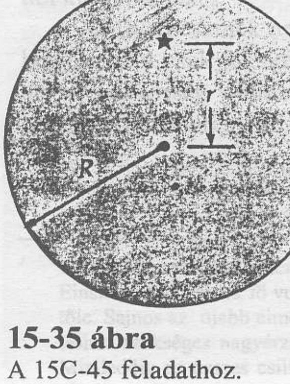
15C-43 Mutassuk meg, hogy a fizikai inga lengésidejére vonatkozó összefüggés speciális esetként tartalmazza a fonálinga lengésidejét!



15-34 ábra
A 15C-44 feladathoz.

15C-44 A 15-34 ábra nagyapáink órájának ingáját mutatja be. Ez egy L hosszúságú 1 kg tömegű karcsú rúd és a ráerősített 2 kg-os, 10 cm sugarú homogén tömör korong. Határozzuk meg L értékét annak alapján, hogy kis amplitúdójú rezgések esetén az ingaóra minden másodpercben kattan egyet, azaz lengésideje 2 s.

15C-45 Egy R sugarú, homogén, tömör tárcsát a síkjára merőleges vízszintes tengelyre rögzítünk úgy, hogy fizikai ingaként lengéseket végezzen. A tengely állítható, így a tárcsát a tömegközépponttól különböző r távolságokban döfheti át (lásd a 15-35 ábrát). Csupán kis kitérésű rezgésekre szorítkozunk. a) Jelöljük az $r = R$ értékhez tartozó lengésidőt T_0-lal, az r tengelytávolság más értékéhez tartozó lengésidőt T-vel. Ábrázoljuk a T/T_0 arányt r/R függvényében $R/4$ -nél nagyobb tengelytávolságokra! Differenciálás segítségével mutassuk meg, hogy akkor legrövidebb lengésidő, ha $r = R/\sqrt{2}$!



15-35 ábra
A 15C-45 feladathoz.

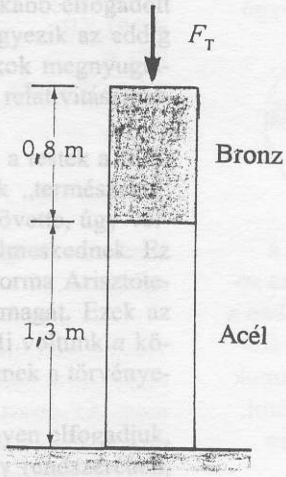
15C-46 Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián F_0. A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg. a) Határozzuk meg az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciáját és b) a rezgés amplitúdóját a 395 Hz gerjesztő frekvencián! c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát.

15C-47 Egy csillapított oszcillátort a gerjesztő erő az alábbi időfüggéssel leírható (állandósult) rezgésre kényszerít: $x = A \sin\omega t$. Mekkora a munkavégzés a fékező erő ellenében a mozgás egy teljes ciklusa során, ha a fékező erő $-bv$? (Útmutatás: milyen kapcsolatban van az erő és a sebesség a munkával?)

15C-48 Egy csillapított rezgő rendszer rugóállandója 6000 N/m, a rezgő test tömege 40 kg. A súrlódási erőtől származó csillapítási tényező 200 N·s/m. A testre szinuszos $F = (20\text{ N}) \sin\omega t$ gerjesztő erő hat, és a gerjesztő erő frekvenciája a rendszer rezonanciacsúcsán áthaladva változik. a) Határozzuk meg a legnagyobb amplitúdójú mozgás frekvenciáját. b) Határozzuk meg az a) kérdéshez tartozó amplitúdót.

15C-49 Egy 160 N/m rugóállandójú rugón 0,40 kg tömegű test függ. A test mozgását $f = -bv$ ellenállási erő akadályozza, ahol b = 4 N·s/m. A testre $(20\text{ N}) \sin(25t)$ gerjesztő erő hat, és a tranziens állapot lecsengése után állandósult rezgés áll be. a) Határozzuk meg a rezgés amplitúdóját! b) Hány fokkal marad el a rezgés fázisa a szinuszos gerjesztő erő mögött?

15C-50 Egy hengeres oszlopnak az átmérője mindenütt 40 cm, és a 15-36 ábrán láthatóan két különböző anyagból készült. Határozzuk meg azt az F_T terhelő erőt, amelynek hatására az oszlop teljes deformációja −0,05 mm!



15-36 ábra
A 15C-50 feladathoz.

15C-51 Egy L hosszúságú A keresztmetszetű huzalt ΔL hosszúsággal megnyújtunk. a) Mutassuk meg, hogy a huzal megnyújtásakor végzett munka: $W = [EA(\Delta L)^2]/2L$. (b) Számítsuk ki a megnyújtott huzal térfogategységében tárolt energiát. (A ΔL megnyúlást a térfogat meghatározásakor hanyagoljuk el)

XIV. Fejezet

14A-1 2,2 m/s^2 felfelé

14A-3 5 m/s^2

14B-5 $g/2$

14B-7 11,7 m/s^2

14B-9 a) 20,6° b) 18 N

14B-11 5,5 N

14A-13 8,54 fordulat per perc

14A-15 50,4

14B-17 délre 60° a vízszintes alatt

14B-19 $\sqrt{g/R}$

14B-21 a) a sugárirányban befelé mutató súrlódási erő $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N
b) a súrlódási erő és az $f_{cf} = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N centrifugális erő
c) A korong rendszerében az a)-ban és b)-ben adott erő plusz az $f_{Cor} = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N Coriolis erő, a bogár haladási irányától jobbra, valamint egy ugyanakkora tangenciális, balfelé mutató súrlódási erő komponens $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N
d) inerciarendszerben: csak a két súrlódási erő összetevő hat: $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N sugár irányban befelé és $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N érintőirányban a bogártól balra.

14C-23 5 N/m

14C-25 a) 3,17 m

14C-27 $gtg\,2\theta$

14C-29 $F/(M + 2m/7)$

14C-31 A válasz adott.

14C-33 7,5 N balra

14C-35 a) 20 N sugár irányban kifelé
b) 80 N sugár irányban kifelé
c) 180 N sugár irányban befelé

14C-37 a) nulla b) $m\omega^2 R$ befelé

14C-39 A válasz adott.

14C-41 a) $4m\omega v$ b) nyugat felé

XV. Fejezet

15A-1 a) 0,020 m b) 0,942 m/s a középpontban
c) 17,8 m/s^2 a szélső helyzetekben

15B-3 0,0356 m

15B-5 $4\pi^2 f^2 A/g$

15B-7 a) 0,910 s^{-1} b) 0,588 N

15A-9 a) 0,50 s b) 128 $\frac{N}{m}$ c) 1,5 m/s
d) 18,9 m/s^2 e) 9 J f) 0,75 m/s
g) 9,45 m/s^2

15A-11 a) 1,19 Hz b) 0,210 s c) 0,784 N lefelé

15B-13 a) 8,17 cm b) 1,42 s^{-1}

15B-15 a) 0,0280 J b) 1,03 m/s c) 0,0158 J
d) 0,0123 J

15B-17 a) 0,10 m b) –0,0654 m c) 0,262 s
d) 0,0160 J e) 0,0160 J

15A-19 a) 0,136 Hz b) 7,37 s

15B-21 A válasz adott.

15A-23 19,9 s

15B-25 1,58 s

15B-27 0,790 Hz

15B-29 a) 3,559 Hz b) 3,554 Hz; 1,38 s

15A-31 1,104 cm^3

15A-33 952 N/m^2

15B-35 AY/L_o

15C-37 a) $3k$, $1{,}5k$ b) $\sqrt{2}$:1

15C-39 $4mg/l$

15C-41 A válasz adott.

15C-43 A válasz adott.

15C-45 A válasz adott.

15C-47 $\pi b A^2 \omega$

15C-49 a) 0,149 m b) 132°

15C-51 b) $(y/2)(\Delta L/L)^2$

XVI. Fejezet

16A-1 a) $3{,}32 \times 10^{-5}$ N b) $5{,}92 \times 10^{-3}$ N

16A-3 $g/9$

16A-5 35,0 N

16A-7 30,3 km/s

16A-9 2,41

16B-11 $4\pi^2/Gm$, $3{,}00 \times 10^{-19}$ s^2/m^3

16B-13 a) 84,4 perc b) 7,90 km/s

16B-15 $\frac{128}{81} G\pi^2 R^4 \rho^2$

16B-17 $8{,}74 \times 10^7$ m

16B-19 $1{,}62 \times 10^{27}$ kg

16B-21 $1{,}91 Gm/l^2$ az átmérő mentén ellentétes sarok felé

16A-23 A válasz adott.

16B-25 a) $1{,}32 \times 10^{12}$ m/s^2 b) $9{,}21 \times 10^{13}$ N
c) $7{,}70 \times 10^{-11}$ J

16B-27 $\sqrt{(GM/R)(2-\sqrt{2})}$

16A-29 2380 m/s

16A-31 4R/3

16B-33 $3Gm^2/l$

16B-35 $\sqrt{2Rg(1+R/r)}$

16B-37 A válasz adott.

16B-39 A válasz adott.

16C-41 $\sqrt{125\pi/3G\rho}$

16C-43 b) $2\pi\sqrt{D^3/3GM}$

16C-45 b) $6{,}54 \times 10^{-3}$

16C-47 $Gm^2/3L^2$

16C-49 $2\sqrt{R^3/GM}$