Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. november 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Ha valaki egy feladatra több lényegesen különböző megoldást ír le, akkor ezek közül a legkisebb pontszámút kell értékelni.

Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. Mutassuk meg, hogy létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

* * * * *

Első megoldás. A rangfogalmak egyenlősége miatt (determinánsrang) létezik A-nak olyan 2×2-es C részmátrixa, melynek determinánsa nem 0. (1 pont)
Álljon ez A i. és j. oszlopaiból ($1 \le i < j \le 3$). (1 pont)
Mivel C determinánsa nem 0, a tanult tétel szerint létezik inverze. (2 pont)
Legyen most B az a mátrix, melynek az i. sora a C^{-1} mátrix első sorával azonos, j. sora a C^{-1} mátrix második sorával azonos, (3 pont)
az i.-től és j.-től különböző sora pedig csupa (két darab) 0. (1 pont)
A mátrixszorzás és az inverz tulajdonságai alapján látható, hogy az AB szorzat ekkor csakugyan a 2×2-es egységmátrix, a keresett B mátrix tehát valóban létezik. (2 pont)

Második megoldás. Ismert, hogy az AB szorzat i. oszlopa Ab_i, ahol b_i a B mátrix i. oszlopa. (1 pont)
Szintén ismert, hogy az A mátrix és az x oszlopvektor szorzata nem más, mint A oszlopainak az x koordinátáival, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációja. (2 pont)
A rangfogalmak egyenlősége miatt (oszloprang) létezik A-nak két független oszlopa. (1 pont)
A oszlopai tehát a két koordinátás (kettő magas) oszlopvektorok terében generátorrendszert alkotnak, (2 pont)
tehát bármely két koordinátás oszlopvektor előáll e vektorok alkalmas lineáris kombinációjaként. (1 pont)
Így speciálisan a 2×2-es egységmátrix oszlopai is előállnak így, (2 pont)
amiből a fentiek szerint a kívánt B mátrix létezése következik. (1 pont)

Harmadik megoldás. Egy adott A mátrixhoz a kívánt B-t megpróbáljuk elemenként előállítani. Ez az $A|v_1$ és $A|v_2$ egyenletrendszerek megoldását jelenti, ahol v_i a 2×2-es egységmátrix i. oszlopa, a megoldásokból pedig (ha vannak) összerakhatjuk B-t: az első rendszer megoldásai (sorrendben) adják B első oszlopát, a második rendszer megoldásai pedig B második oszlopát. (3 pont)
A rangfogalmak egyenlősége miatt (sorrang) A sorai függetlenek, (1 pont)
az egyenletrendszerek Gauss-eliminációval történő megoldása során tehát a bal oldalon nem keletkezhet csupa 0 sor, (2 pont)
így nem kapunk tilos sort sem, (2 pont)
azaz mindkét egyenletrendszernek lesz megoldása, (1 pont)
ahonnan a keresett B mátrix létezése a fentiek szerint következik. (1 pont)

2. Legyen $n \geq 10$ egész szám. Az A $n \times n$-es mátrix rangja 10, a B $n \times n$-es mátrix rangja n. Határozzuk meg AB rangját.

* * * * *

Ismert, hogy egy mátrix rangja az oszlopai (mint vektorok) által generált altér dimenziója. (1 pont)
Tudjuk továbbá, hogy az AB szorzat i. oszlopa Ab_i, ahol b_i a B mátrix i. oszlopa, (1 pont)
és hogy az A mátrix és az x oszlopvektor szorzata nem más, mint A oszlopainak az x koordinátáival, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációja. (1 pont)
Az AB mátrix oszlopai tehát mind A oszlopainak lineáris kombinációi, (1 pont)
vagyis az AB oszlopai által generált altér része az A oszlopai által generált altérnek, (1 pont)
így $r(AB) \leq r(A) = 10$. (1 pont)
Mivel B rangja n, a rangfogalmak egyenlősége miatt (determinánsrang) B determinánsa nem 0, (1 pont)
azaz B invertálható. (1 pont)
Mivel $A = (AB)B^{-1}$ (itt felhasználtuk, hogy a mátrixszorzás asszociatív, de ezt nem muszáj megemlíteni), (1 pont)
a fenti gondolatmenet alapján $r(A) = r((AB)B^{-1}) \leq r(AB) \leq r(A) = 10$ is teljesül, ahonnan $r(AB) = 10$. (1 pont)

3. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az $(1,0)$ vektorhoz a $(0,1)$ vektort, a $(0,1)$ vektorhoz a $(2,1)$ vektort, a $(2,1)$ vektorhoz pedig az $(1,0)$ vektort rendeli?

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a kérdéses transzformációt $\mathcal{A}$-val. Ha $\mathcal{A}$ lineáris leképezés, akkor az ezeket definiáló feltételek miatt $\mathcal{A}((2,1)) = \mathcal{A}((2,0)) + \mathcal{A}((0,1)) =$ (4 pont)
$= 2\mathcal{A}((1,0)) + \mathcal{A}((0,1))$, (3 pont)
azaz $\mathcal{A}((2,1)) = 2(0,1) + (2,1) = (2,3)$, (2 pont)
ami lehetetlen (hiszen $\mathcal{A}((2,1)) = (1,0)$ kéne hogy legyen), tehát $\mathcal{A}$ nem lineáris leképezés. (1 pont)

Második megoldás. Ha az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok képeivel megadott transzformáció lineáris, akkor a tanult módon felírhatjuk a mátrixát valamely bázisban. (3 pont)
Ha ravaszul a szokásos bázist választjuk, akkor a mátrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 pont)
Ezzel a mátrix-szal megszorozzuk a $(2,1)$ vektor koordinátavektorát, ami most épp saját maga, (2 pont)
ennek eredménye a $(2,3)$ vektor, (1 pont)
ez viszont láthatóan nem az $(1,0)$ koordinátavektora, vagyis a transzformáció nem lineáris. (1 pont)
Ez azért persze olyan nagyon nem különbözik az első megoldástól.

4. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

* * * * *

Első megoldás. Mivel minden vektor előáll a (szokásos) bázis vektorainak lineáris kombinációjaként, a képtér a bázisvektorok képei által generált altér lesz. (2 pont)
A bázisvektorok képei épp a mátrix oszlopai, vagyis az $(1,2)$ és $(2,x)$ vektorok. (1 pont)
Ha $x \neq 4$, akkor ezek nyilván generálják a síkot, vagyis ekkor a képtér az egész sík. (2 pont)
A dimenziótételt alkalmazva a magtér dimenziója ekkor 0, vagyis a magtér csak az origóból áll. (2 pont)
Ha $x = 4$, akkor a képtér a megoldás elején tett megállapítás szerint az $(1,2)$ vektor számszorosaiból áll, (1 pont)
a magtér meghatározásához pedig az $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldani. (1 pont)
A megoldások azok az (x,y) vektorok, amikre teljesül, hogy $x + 2y = 0$ (vagy más szóval a $(-2,1)$ vektor számszorosai). (1 pont)

Második megoldás. Keressük meg először a magteret. Ehhez a definíció szerint az $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldani. (2 pont)
A Gauss-elimináció első lépése után az egyenletrendszer $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 \end{array}\right)$. (1 pont)
Ha $x = 4$, akkor az utolsó, csupa 0 sort törölve megkapjuk a redukált lépcsős alakot, abból pedig a megoldást, miszerint azon (x,y) vektorok alkotják a magteret, melyekre $x + 2y = 0$. (1 pont)
Ha $x \neq 4$, akkor az utolsó sort $(x-4)$-gyel osztva majd a második sor kétszeresét az elsőből levonva kapjuk a redukált lépcsős alakot, abból pedig az $x = 0$, $y = 0$ megoldást, azaz ekkor csak az origóból áll a magtér. (1 pont)
A képteret a második esetben egyszerűbb meghatározni: a dimenziótétel szerint két dimenziós kell legyen, így nem lehet más, mint a teljes sík. (2 pont)
Az első esetben sokféleképp eljárhatunk, megszorozhatjuk például az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot egy tetszőleges (x,y) vektorral, az eredmény az $(x+2y, 2x+4y)$ vektor. (1 pont)
Az ilyen alakú vektorok alkotják a képteret, vagyis azok, ahol a második koordináta az első kétszerese (ennek nyilván kell teljesülnie, ezek közül pedig mindenki előáll ilyen alakban). (2 pont)

5. A sík egy lineáris transzformációja a $(2,1)$ vektorhoz az $(1,1)$ vektort rendeli, az $(1,1)$ vektorhoz pedig a $(2,1)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció egy sajátvektorát és a hozzá tartozó sajátértéket.

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a lineáris transzformációt $\mathcal{A}$-val. Az összeadásra vonatkozó tulajdonság miatt
$\mathcal{A}((2,1)+(1,1)) = \mathcal{A}((2,1)) + \mathcal{A}((1,1)) = (1,1) + (2,1)$, (4 pont)
vagyis a $(2,1)+(1,1) = (3,2)$ vektort $\mathcal{A}$ saját magába viszi. (2 pont)
A definíció szerint tehát $(3,2)$ a transzformáció egy sajátvektora, (2 pont)
a hozzá tartozó sajátérték pedig 1. (2 pont)

Második megoldás. Jelöljük a lineáris transzformációt most is $\mathcal{A}$-val. Szeretnénk felírni $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos bázisban, ehhez szükségünk van az $(1,0)$ és a $(0,1)$ vektorok képére. (1 pont)
$\mathcal{A}((1,0)) = \mathcal{A}((2,1)-(1,1)) = \mathcal{A}((2,1)) - \mathcal{A}((1,1)) = (1,1) - (2,1) = (-1,0)$. (2 pont)
Itt akár meg is állhatunk, hiszen láthatóan az $(1,0)$ sajátvektor -1 sajátértékkel, ha ez történik, akkor az első megoldásnál látottak szerint pontozzunk. Ha ehelyett inkább továbbmegyünk:
$\mathcal{A}((0,1)) = \mathcal{A}((1,1)-(1,0)) = \mathcal{A}((1,1)) - \mathcal{A}((1,0)) = (2,1) - (-1,0) = (3,1)$. (2 pont)
A keresett mátrix innen $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)
A sajátértékek a karakterisztikus polinom, azaz $(-1-\lambda)(1-\lambda)$ gyökei, (1 pont)
vagyis 1 és -1. Az 1-hez tartozó sajátvektorok a nem túlzottan bonyolult $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszer megoldásaiként adódnak, (2 pont)

ilyen pl. a $(3, 2)$ vektor. (1 pont)

6. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós és a képzetes része is pozitív.

$$(-5\sqrt{2} + \sqrt{2}i)z^5 = 12 + 8i$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Osztás után az egyenlet a $z^5 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ alakot ölti. (2 pont)
$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ hossza 2, (1 pont)
az x tengellyel bezárt szöge pedig $225°$, (1 pont)
trigonometrikus alakja tehát $2 \cdot (\cos 225° + i \sin 225°)$. (1 pont)
Így az ötödik gyökeinek hossza $\sqrt[5]{2}$, (1 pont)
az ötödik gyökök x tengellyel bezárt szögei pedig $45°, 117°, 189°, 261°, 333°$. (2 pont)
Ezek közül egyedül a $45°$ szögű gyöknek pozitív a valós és a képzetes része is, (1 pont)
ennek trigonometrikus alakja $\sqrt[5]{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$, algebrai alakja tehát $2^{-0,3} + 2^{-0,3}i$ (ezt persze másképp is meg lehet adni). (1 pont)