Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. június 3.

1. Legyenek A, B és C teljesen független események, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(C) = \frac{1}{6}$. Mennyi a $\mathbf{P}(\bar{B} + C \mid A)$ valószínűség?
Megoldás: A függetlenség miatt
$\mathbf{P}(\bar{B} + C \mid A) = \mathbf{P}(\bar{B} + C) = \mathbf{P}(\bar{B}) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(\bar{B}) \cdot \mathbf{P}(C) = \frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{19}{24} = 0,79167$

2. Legyen az X valószínűségi változó 2 paraméterű exponenciális eloszlású és legyen $V = X^2 + 3$. Adja meg V sűrűségfüggvényét és várható értékét!
.*Megoldás*: $\mathbf{E}V = \mathbf{E}X^2 + 3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3 = 3,5$
$F_V(t) = \mathbf{P}(V < t) = \mathbf{P}(X^2 + 3 < t) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt{t-3}\right) = F_X\left(\sqrt{t-3}\right) = 1 - e^{-2\sqrt{t-3}}, t > 3.$
$f_V(t) = F'_V(t) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-3}} \cdot e^{-2\sqrt{t-3}}, t > 3.$

3. Legyen $X \in N(10,3)$ és $Y \in N(15,2)$ függetlenek. $Z = 5X - 2Y^2 + 3$. Adja meg az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ és a $\mathbf{E}(Z \mid Y)$ regressziókat!
Megoldás:
$\mathbf{E}(Z \mid X) = \mathbf{E}(5X - 2Y^2 + 3 \mid X) = 5\mathbf{E}(X \mid X) - 2\mathbf{E}(Y^2 \mid X) + 3 = 5X - 2\mathbf{E}(Y^2) + 3 = 5X - 2 \cdot (4 + 225) + 3 = 5X - 45$
$\mathbf{E}(Z \mid Y) = \mathbf{E}(5X - 2Y^2 + 3 \mid Y) = 5\mathbf{E}(X \mid Y) - 2\mathbf{E}(Y^2 \mid Y) + 3 = 5\mathbf{E}X - 2Y^2 + 3 = 53 - 2Y^2.$

4. Dobjunk fel egy szabályos pénzérmét 10-szer. Jelölje X a fejdobások számát, $Z = 4 - 5X$. Számolja ki az $\mathrm{R}(Z,X)$ korrelációs együtthatót és Z szórását!
Megoldás: $X \in B(10, \frac{1}{2})$. $\sigma(Z) = \sigma(4 - 5X) = 5\sigma(X) = 5 \cdot \sqrt{2.5} = 7.9057.$
Mivel Z és X között negatív meredekségű lineáris kapcsolat áll fenn, ezért $\mathrm{R}(Z,X) = -1$.

5. Egy urnában 6 piros és 5 kék golyó van. Kihúzunk kettőt, majd visszateszzük, megkeverjük és újra kihúzunk kettőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan az egyik alkalommal volt a kihúzottak között kék?
Megoldás: A keresett valószínűség: $2 \cdot \left(1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}\right) \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = 0.39669$

6. Mondja ki a nagy számok Kolmogorov féle erős törvényét!
Megoldás: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ teljesen függetlenek, $\mathbf{E}X_i = m$ és létezik $\sigma^2 X_i$. Továbbá $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^2 X_i}{i^2} < \infty$.
Akkor

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = m\right) = 1.$$