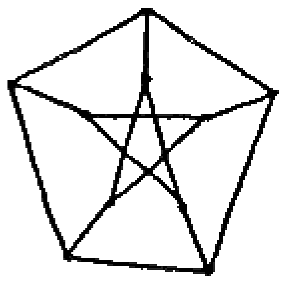
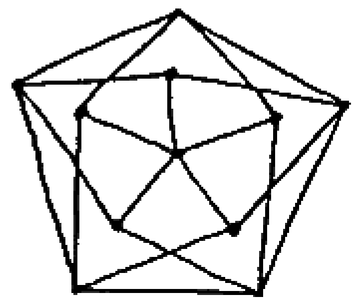
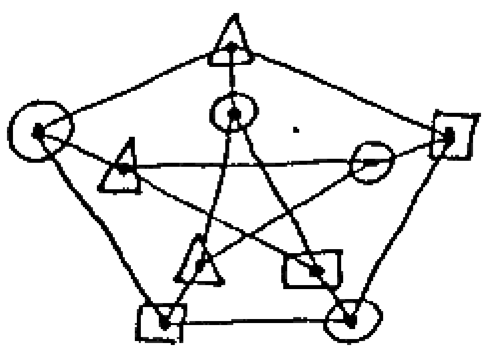
GRÁFOK SZÍNEZÉSE – MEGOLDÁSOK

1. *Mennyi a kromatikus száma az alábbi gráfoknak? (Mindkét itt látható gráfnak külön neve is van: az első az ún. Petersen-gráf, a második az ún. Grötzsch-gráf.)*





Megoldás: A Petersen-gráf kromatikus száma 3. Kevesebb nem lehet, hiszen tartalmaz páratlan (5 hosszúságú) kört. Egy három színnel való jó színezése az ábrán látható.



A Grötzsch-gráfban felismerhetjük a Mycielski konstrukcióval az öt hosszú körből kapható gráfot. (A Mycielski konstrukció rövid leírása megtalálható a 49. feladat előtt.) Mivel a Mycielski konstrukció eggyel növeli a kromatikus számot, ennek kromatikus száma 4.

2. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges egyszerű G gráfra fennáll $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.*

Megoldás: Tekintsük G-nek egy jó színezését $\chi(G)$ színnel. Mivel az azonos színű pontok függetlenek, egy-egy szín legfeljebb $\alpha(G)$ pontnak lehet a színe. Mivel minden pontot kiszíneztünk, ebből $\chi(G)\alpha(G) \geq |V(G)|$ következik, ami ekvivalens az állítással.

3. *Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq \tau(G) + 1$.*

Megoldás: Tekintsünk egy $\tau(G)$ elemű A lefogó rendszert. Ekkor $B := (V(G) - A)$ független halmaz. Színezzük A minden elemét különböző színűre, a B független halmaz elemeit pedig egy további színnel. Az így megadott színezés jó színezés, és összesen $\tau(G) + 1$ színt használ. Ebből következik az állítás.

4. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges egyszerű gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.*

Megoldás: Tekintsük G egy optimális színezését, azaz egy jó színezést $\chi(G)$ színnel. Ha lenne két olyan szín, amire nem létezik olyan él, aminek két végpontja e két színnel van színezve, akkor az e két színnel színezett pontok egyetlen színnel is színezhetők volnának (a többi pont színének változatlanul hagyása mellett), vagyis a színezés nem lenne optimális. Tehát a fenti típusú él minden színpárhoz létezik, s mivel egy él csak egy színpárhoz tartozhat ilyen módon, ez azt jelenti, hogy az élek száma legalább annyi, amennyi a különböző színekből álló párok száma. Ez utóbbi pedig éppen $\binom{\chi(G)}{2}$.

5. *Legyen G véges egyszerű gráf, amire $\chi(G) = n$. Tekintsük G-nek egy n színnel való jó színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált és pirostól különböző szín előfordul.*

   Megoldás: Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor minden piros színű pontnak a szomszédságából hiányzik valamely szín, ami nem a piros. Színezzük át az összes piros színű pontot olyan színűre, amely szín az ő szomszédságából hiányzik. Így minden élnek legfeljebb az egyik végpontját színezzük át, hiszen az átszínezett pontok eredetileg mind pirosak voltak, tehát nem mehet közöttük él. Az átszínezés módja biztosítja, hogy egyetlen él végpontjai sem lesznek azonos színűek az átszínezés után sem. Tehát továbbra is jó színezést kapunk, de eggyel kevesebb színel, ami ellentmondás.

6. *Legyen G olyan hurokmentes gráf, aminek pontosan $\binom{\chi(G)}{2}$ éle van. Bizonyítsuk be, hogy G-ben a nem-izolált pontok egy $\chi(G)$ csúcsú teljes gráfot alkotnak.*

   Megoldás: Az előző feladatban bizonyítottak következménye, hogy egy optimális színezésben minden színosztályban van $\chi(G) - 1$ fokú pont. Ezek fokszámainak összege egyenlő G fokszámösszegével, ami éppen az élek számának kétszerese. Ez azt jelenti, hogy G-ben nincs is más él, mint a minden színosztály egyetlen reprezentánsából kiinduló $\chi(G)(\chi(G)-1)$ darab. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy G az állítás szerinti.

7. *Kiszínezhető-e C_7 (a hét hosszú húrnélküli kör) négy színnel úgy, hogy a színezés jó legyen, és bármely két színt tekintve, legfeljebb egy él kössön össze két ilyen színű pontot.*

   Megoldás: A négy színből 6 pár képezhető, így a kívánt színezés nem valósítható meg olyan gráfon, aminek hatnál több éle van. A C_7 pedig ilyen gráf.

   (Egy másik megoldás is kiolvasható a következő feladat megoldásából.)

8. *Kiszínezhető-e C_6 (a hat hosszú húrnélküli kör) négy színnel úgy, hogy a színezés jó legyen, és bármely két színt tekintve, legfeljebb egy él kössön össze két ilyen színű pontot.*

   Megoldás: Tegyük fel, hogy van ilyen színezés. Mivel több csúcs van, mint szín, van olyan szín (hívjuk ezt pirosnak), amelyik legalább kétszer szerepel. E két csúcsnak C_6-ban összesen négy szomszédja van, ezeknek a feltétel szerint különbözőknek kell lenniük. Mivel piros egyik sem lehet, ehhez a pirossal együtt legalább öt színre lenne szükség. Ez ellentmondás, hiszen csak négy színünk van, a kívánt színezés tehát nem létezik.

9. *Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfban $\chi(G) \leq 1 + \frac{2e}{n}$.*

   Megoldás: Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ a mohó színezésből adódóan. Mivel $\frac{2e}{n}$ a gráf átlagfoka, ami reguláris gráf esetén megegyezik $\Delta(G)$–vel, adódik az állítás.

10. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\chi(G) \leq \max\{\delta(H) : H \subseteq G\} + 1,$$

   ahol a maximumot G összes H részgráfján tekintjük (erre utal a $H \subseteq G$ jelölés) és $\delta(X)$ az X gráf legkisebb fokszámát jelenti.

   Megoldás: Rendezzük sorba az n csúcsú G gráf csúcsait az alábbi módon. Legyen v_n a legkisebb fokú csúcs. Ha $v_n, v_{n-1}, \dots v_i$ már definiálva lett és $i > 1$, akkor legyen v_{i-1} a $G - \{v_n, v_{n-1}, \dots v_i\}$ gráf egyik minimális fokú csúcsa. Ha ez a sorrend megvan, színezzük mohón a csúcsokat indexeik növekvő sorrendjében. A sorrend előállításából adódik, hogy tetszőleges csúcs színezésekor, ő legkisebb fokszámú csúcsa annak a H részgráfnak, amit a már színezett csúcsokkal együtt alkot. Ha tehát minden szomszédja különböző színű és már nincs szabad szín a már használtak között, akkor is legfeljebb egy $(\delta(H)+1)$-edik színt fogunk bevezetni az újonnan tekintett csúcs színezéséhez. Ebből adódik, hogy a lehetséges $(\delta(H)+1)$ értékek maximuma felső korlát a kromatikus számra.

11. *Adjunk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben mohón színezve k színt fogunk használni.*

   Megoldás: Legyen G_k az a gráf, melyet a $K_{k,k}$ teljes páros gráfból kapunk egy teljes párosítás elhagyásával. A gráf csúcsait jelöljük $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$ -val, ahol az u_i, illetve a v_i csúcsok alkotják a páros gráf két színosztályát, az elhagyott párosítás pedig az $\{u_i, v_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ élekből állt. Színezzük a csúcsokat az $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_i, v_i, \dots, u_k, v_k$ sorrendben. A mohó színezés minden v_i-nek az u_i-nél éppen bevezetett színt fogja adni, és így u_{i+1}-nek minden használt színhez lesz már olyan színű szomszédja, amiért is be kell vezetni egy újabb, $(i+1)$-edik színt. A gráfot tehát végül k színnel fogjuk színezni.

12. *Bizonyítsuk be, hogy minden véges egyszerű G gráf csúcsainak van olyan sorrendje, hogy ha a csúcsokat e sorrend szerint haladva mohón színezzük (azaz mindig a legelső olyan színnel színezünk ki egy csúcsot, amire még vele szomszédos pontot nem színeztünk az illető csúcs sorrakerüléséig), akkor a felhasznált színek száma $\chi(G)$ lesz.*

   Megoldás: Tekintsünk egy optimális színezést. Rakjuk sorba tetszőlegesen a színosztályokat, és azokon belül a pontokat. Az így kapott sorrend jó lesz. Ha ugyanis egy pont a színosztályok fenti sorrendje szerint a k-adik színnel volt színezve, akkor a fenti sorrend szerinti mohó színezésnél kapott i színére $i \leq k$ lesz érvényes.

13. *Legyen G olyan gráf, amire $\chi(G) = k$. Bizonyítsuk be, hogy G élei megirányíthatóak úgy, hogy a létrejövő leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon.*

Megoldás: Tekintsük G egy k színnel való színezését, a színeket nevezzük $1, 2, \dots k$-nak. Minden él két különböző színű pontot köt össze, az irányát válasszuk meg úgy, hogy azon végpontja felé mutasson, aminek a színe nagyobb számot jelent. Egy k-nál több csúcsot tartalmazó irányított úton a színeket jelentő számok k fölé nőnének, ami nem lehetséges. Ezzel igazoltuk, hogy a mondott irányítás megfelelő.

14. *Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n csúcsú véges egyszerű gráf, akkor*

$$\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n.$$

1. Megoldás: Mivel egy jó színezésben minden színosztály független pontok halmaza, és a gráf kiszínezhető jól $\chi(G)$ színnel, van olyan független halmaz, aminek mérete legalább $\frac{n}{\chi(G)}$. Ez a független halmaz a komplementer gráfban klikk, így minden pontját más színnel kell színezni, vagyis $\chi(\bar{G}) \geq \frac{n}{\chi(G)}$. Ebből átrendezéssel következik az állítás.

2. Megoldás: Színezzük ki G-t jól $\chi(G)$ színnel és $\bar{G}$-t szintén jól $\chi(\bar{G})$ színnel. Minden $v \in V(G)$-re az első színezésben jelölje a v csúcs színét $c(v)$, a másodikban $k(v)$. Rendeljük hozzá most minden v csúcshoz a $(c(v), k(v))$ rendezett színpárt. E színpárok semelyik két csúcsra sem egyezhetnek meg, hiszen bármely két csúcs össze van kötve G és $\bar{G}$ egyikében, így ott különböző színűeknek kell lenniük. Vagyis az összes lehetséges színpárok száma legalább n, ami éppen a bizonyítandó állítás. [L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993, 9.5.b; ott hivatkozva: E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum, Amer. Math. Monthly 63 (1956), 175–177.]

15. *Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n csúcsú, egyszerű, r-reguláris gráf, akkor*

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1.$$

Megoldás: A feltételekből adódik, hogy $\Delta(G) = r$ és $\Delta(\bar{G}) = n - r - 1$. Felhasználva, hogy $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ és $\chi(\bar{G}) \leq \Delta(\bar{G}) + 1$, azt kapjuk, hogy $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq r + 1 + (n - r - 1) + 1 = n + 1$.

Megjegyzés: Az itt bizonyított egyenlőtlenség a regularitás feltételezése nélkül is igaz. (Erről bővebben ld. L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993, 9.5.b első részét, ill. az ottani hivatkozást: E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum, Amer. Math. Monthly 63 (1956), 175–177.)

16. *Igaz-e, hogy minden véges egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való pontszínezése, melyben az egyik színosztály $\alpha(G)$ pontot tartalmaz?*

Megoldás: Nem. Tekintsük azt a 6 csúcsú fát, melynek két harmadfokú pontja van (ld. a 28. feladat utáni második ábrát). Ennek (egyetlen) legnagyobb független halmazát a négy elsőfokú pont alkotja, de azokat azonosan színezve nem lehetne két színnel színezni a gráfot, noha a kromatikus száma kettő.

17. *Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k. Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont (G-beli) távolsága legalább négy. Mutassuk meg, hogy az A-beli csúcsok tetszőleges $k+1$ színnel való színezése kiegészíthető az egész G gráf $k+1$ színnel való jó színezésévé. (Kiegészítésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A-beli csúcsok a megadott $(k+1)$-színezésük szerinti színt kapják.)*

Megoldás: Legyen adott A-nak egy tetszőleges $(k+1)$-színezése. Tekintsük G-nek egy jó színezését az első k színnel (a feltételek szerint ilyen van), az ebben nem szereplő $(k+1)$-edik színt nevezzük kéknek. Nézzük sorra az A-beli csúcsok színét ebben a k-színezésben. Ha valamelyiknek a színe megegyezik az előre megadott színével, az jó nekünk, nem teszünk vele semmit. Ha valamely $a \in A$ színe nem egyezik meg az előre megadott színével, akkor átszínezzük arra. Ha van olyan szomszédja, ami ugyanilyen színű, azt pedig (mindegyik ilyet) átszínezzük kékre. (Vegyük észre, hogy ha magát a-t színeztük kékre, akkor a szomszédaihoz nem nyúltunk, hiszen azok közt eredetileg egy sem kék, átszínezve pedig még nem lehettek a távolságra vonatkozó feltétel miatt. Ha ugyanis átszíneztük volna valamelyiket, akkor vagy az maga is A-beli volna, vagy szomszédja lenne egy másik A-beli csúcsnak is. Mindkét esetben két egymástól legfeljebb kettő távolságra levő A-beli csúcsra bukkannánk, ilyenek azonban nem létezhetnek.) Állítjuk, hogy miután A minden csúcsát sorra vettük, egy kívánt színezésünk lesz. Megmutatjuk, hogy így van. Az, hogy az A-beli pontok a kívánt színűek, világos, hiszen, amelyik nem olyan volt, átszíneztük olyanra. Az is világos, hogy a felhasznált színek száma nem több, mint $k+1$. Azt kell tehát csak belátni, hogy a kapott színezés valóban jó színezés. Mivel egy jó k-színezésből indultunk ki, csak olyan csúcsoknál lehet probléma, amiket átszíneztünk. Az A-beli csúcsoknál nem lehet baj, mert az ő átszínezésük után rögtön minden velük szomszédos ugyanolyan színű pontot is átszíneztünk, ezeket mindig kékre. Elég tehát azt megmutatni, hogy kék csúcsok között nem fut él. Az A-beli pontok távolságára vonatkozó feltételből következik, hogy minden csúcs legfeljebb egy A-beli csúcsnak szomszédja. (Különben lenne két A-beli csúcs egymástól legfeljebb kettő távolságra.) Ha két kék csúcs két különböző A-beli csúcsnak szomszédja, akkor ismét a távolságra vonatkozó feltétel miatt, ezek nem lehetnek szomszédosak. (Különben a két A-beli csúcs távolsága legfeljebb három volna.) Ha két kék csúcs ugyanazon A-beli csúcsnak szomszédja, akkor viszont azért színeztük mindkettőt kékre, mert mindkettőnek az eredeti színe megegyezett közös A-beli szomszédjuk előírt színével. Vagyis az eredeti k-színezésben azonos színűek voltak, s mivel az jó színezés volt, nem lehetnek összekötve. Végül, ha egy A-beli csúcs maga kék, annak szomszédai között senkit nem színeztünk át kékre. Semelyik két kék csúcs között nem fut tehát él. Ezzel a bizonyítást befejeztük. [M. O. Albertson, You can't paint yourself into a corner, J. Combin. Theory Ser. B, 73 (1998), 189–194.]

18. *A $V(G) = \{1, 2, \ldots, 1023\}$ ponthalmazon definiáljuk a G gráfot úgy, hogy benne k és m akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha nem egyenlők és egyikük osztója a másiknak. Határozzuk meg a $\chi(G)$ kromatikus szám értékét.*

Megoldás: A 2^k alakú számok mind osztják egymást, így a szereplő 10 ilyen alakú szám egy klikket alkot. (A 10 abból adódik, hogy 2^k minden $k = 0, 1, \ldots, 9$-re szerepel.) Emiatt $\chi(G) \geq 10$. Másrészt, a 2^k és $2^{k+1} - 1$ közötti csúcsok színezhetők mind ugyanazon színnel, hiszen közülük bármely kettő hányadosa kisebb 2-nél, vagyis egyik sem lehet másiknak többszöröse. Ezért az adott gráf színezéséhez elegendő is a 10 szín.

19. *Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{128}\}$. A v_i és v_j pontok pontosan akkor alkossanak élet G-ben, ha i és j legnagyobb közös osztója nem 1. Határozzuk meg G kromatikus számát.*

Megoldás: A páros számok klikket alkotnak G-ben, így a kromatikus szám legalább 64. Ennyi színnel már ki is színezhető a gráf a következő módon. Színezzük ki a páros számokat csupa különböző színnel, a páratlanokat pedig az utánuk következő páros szám színével. A kromatikus szám tehát 64.

20. *Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{19}\}$. A v_i és v_j pontok pontosan akkor alkossanak élet G-ben, ha indexeik közül a nagyobbikat a kisebbikkel elosztva az eredmény kettőhatvány. Határozzuk meg G kromatikus számát.*

Megoldás: A kromatikus szám legalább 5, mert ennyi elemű klikket alkot az $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ halmaz. A színezéshez elég is az 5 szín. Jó színezést kapunk ugyanis, ha az i-vel jelölt csúcsot a legnagyobb, i-nél nem nagyobb kettőhatvánnyal azonos színűre színezzük.

21. *Egy gráf csúcsai legyenek egy n-szer n-es sakktábla mezői, ahol $n \geq 2$. Az éleket alkossák az (oldalukkal) szomszédos mezőkből álló párok. Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?*

Megoldás: A kérdezett kromatikus szám 2. Kevesebb nem lehet, hiszen a gráfnak vannak élei. Hogy két szín elég a jó színezéshez, azt a hagyományos fekete-fehér színezés mutatja.

22. *Egy négyzetrácsban legyen egy lépés az, ha egy négyzetből átmegyünk egy vele közös éllel rendelkező másik négyzetbe. A 100-szor 100-as rácsban mennyi az a legkevesebb szín, amivel a négyzetek kiszínezhetők úgy, hogy az egymásból pontosan két lépéssel elérhető mezők különböző színűek legyenek?*

Megoldás: A minimálisan szükséges színek száma 4. Hogy legalább ennyi, azt onnan láthatjuk, hogy könnyen megadható négy olyan mező, melyek páronként két lépéssel érhetők el egymásból. Az i-edik oszlop és j-edik sor találkozásánál levő mezőt (i, j)-vel jelölve, ilyen az $(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)$ mezőnégyes. Hogy négy szín elég, azt egy jó színezés megadásával igazoljuk, a megadáshoz továbbra is az előbbi jelölést használjuk. Ha i páratlan, akkor színezzük (i, j)-t pirosra ha $i + j + 1$ vagy $i + j + 2$, kékre, ha $i + j$ vagy $i + j + 3$ osztható 4-gyel. Páros i esetén ugyane kritérium alapján színezzünk egy mezőt zöldre vagy sárgára. Könnyen ellenőrizhető, hogy így az azonos színű mezők vagy szomszédosak, vagy legalább három lépés távolságra vannak egymástól, tehát a színezés jó lesz.

23. *Legyenek a G gráf csúcsai egy $n > 1$ elemű halmaz részhalmazai. Két csúcs pontosan akkor legyen összekötve G-ben, ha a nekik megfelelő A és B részhalmazok szimmetrikus differenciája páratlan számú elemet tartalmaz. (Két halmaz szimmetrikus differenciája a pontosan az egyikük által tartalmazott elemek halmaza.) Mennyi G kromatikus száma?*

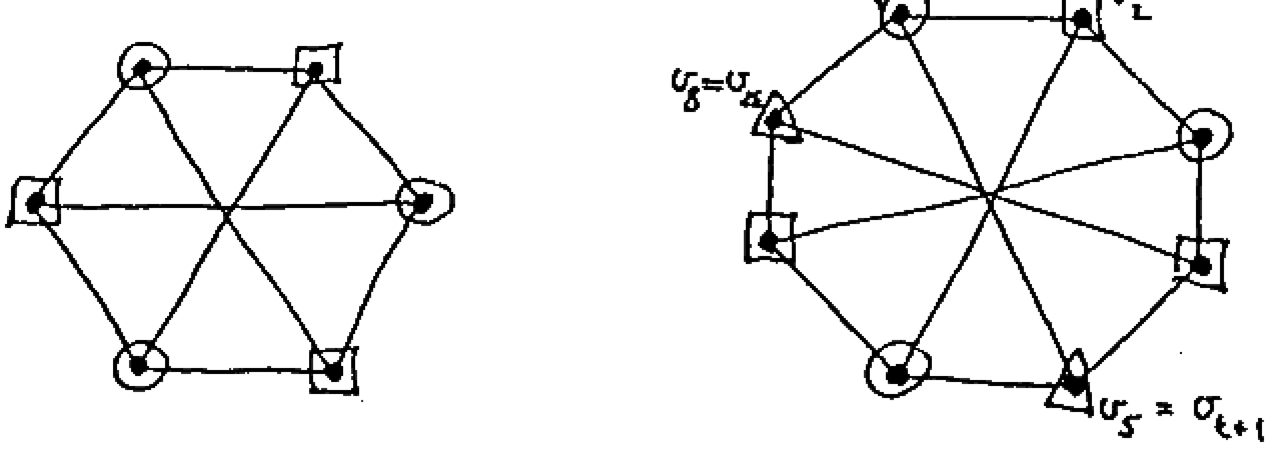
Megoldás: Két részhalmaz szimetrikus differenciája pontosan aszerint tartalmaz páros vagy páratlan számú elemet, hogy a két részhalmaz elemszámának paritása egyező vagy különböző. Emiatt a G-ben élt alkotó részhalmazpárok közül mindig pontosan egy páros és pontosan egy páratlan elemszámú. Tehát a páros elemszámú halmazokat kékre, a páratlan elemszámúakat pirosra színezve jó színezést kapunk. Eszerint G kromatikus száma legfeljebb kettő. Kevesebb nyilván nem lehet, hiszen a gráfnak van éle.

24. *A G_k gráf ($k \geq 2$) egy $(v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k})$ Hamilton-körből, valamint a k darab további $\{v_1, v_{k+1}\}, \{v_2, v_{k+2}\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_{2k-1}\}\{v_k, v_{2k}\}$ élből áll. Határozzuk meg minden k-ra G pont- és élkromatikus számát.*

Megoldás: A kromatikus szám 4, ha $k = 2$, egyéb esetekben 2 ha k páratlan és 3 ha k páros. A $k = 2$ eset világos, ekkor $G = K_4$. A Hamilton-körön kívüli éleket hívjuk átlóknak. Ha $k \geq 3$ és páratlan, akkor a csúcsokat a Hamilton-kör mentén felváltva színezve a behúzott átlók végpontjai is különböző színűek, tehát a gráf két színnel színezhető. Mivel vannak élei, a kromatikus száma 2. Ha k páros, akkor a $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ csúcsok páratlan kört alkotnak. A kromatikus szám így legalább 3. Hogy három szín elegendő is a színezéshez azt kétféleképpen is megmutatjuk.

Egyrészt hivatkozhatunk a Brooks-tételre: Mivel a maximális fokszám 3, és a gráf sem nem teljes, sem nem páratlan kör, a Brooks-tételből következik, hogy a kromatikus száma 3.

Másrészt elég könnyen meg is adhatunk egy három színnel való jó színezést: Legyen v_{k+1} és v_{2k} színe zöld, v_1-től v_k-ig, valamint v_{k+2}-től v_{2k-1}-ig pedig felváltva legyenek a csúcsok pirosak és kékek olyan módon, hogy v_1 és v_{k+2} legyen piros. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy így összekötött csúcsok nem kapnak azonos színt.



Az élkromatikus szám minden k esetén három, ugyanis a Hamilton-kör éleit felváltva két színnel, az átlókat egy harmadik színnel színezve jó színezést kapunk, ugyanakkor két szín nem lehet elég, hiszen minden fokszám 3.

25. *Legyen adva a síkon véges számú egyenes, melyek közül semelyik három sem metszi egymást egy pontban. Tekintsük az egyenesek metszéspontjait egy G gráf csúcsainak, és ugyanezen gráf élei legyenek az egyes egyeneseken szomszédosan elhelyezkedő metszéspontokból léterejött csúcspárok.*

Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

Megoldás: Válasszunk ki egy irányt a síkon, ami egyik olyan egyenessel sem párhuzamos, amit G valamely két csúcsa meghatároz. Tekintsünk egy ezen irányban meghúzott egyenest, amely a síkot két olyan félsíkra bontja, melyek közül az egyik a gráf valamennyi csúcsát tartalmazza. (Ez annyit jelent, hogy az új egyenest 'elég messze' húzzuk meg. Mivel csak véges sok egyenes és így véges sok metszéspont van, ez mindig megtehető.) Csúsztassuk most ezt az egyenest gondolatban a gráf csúcsai felé. Ha elérünk egy pontot, jelöljük meg, és haladjunk tovább. Ezt folytassuk egészen addig, amíg a gráf minden csúcsát meg nem jelöltük. Ekkor színezzük ki mohón a gráf csúcsait megjelölésük sorrendjében. Vegyük észre, hogy valahányszor egy csúcsot megjelölünk, szomszédai között legfeljebb két már korábban megjelölt csúcs lehet, ez adódik a gráf konstrukciójából és a csúsztatott egyenes megválasztásának módjából. Ezért a mondott sorrend szerinti mohó színezés során sohasem leszünk olyan helyzetben, hogy valamely csúcsnál már három szín is tiltott lenne, amikor ki akarjuk színezni. Ezért három szín biztosan elég a színezéshez. [L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993, 9.57; ott hivatkozva: H. Sachs, Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I–II, Teubner, 1970–1972.]

26. *Legyen $k \le \frac{n}{2}$ és jelölje $Kn(n,k)$ a következő gráfot. $Kn(n,k)$ csúcsai az $\{1,2,\dots n\}$ halmaz összes k-elemű részhalmazai. Két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a két megfelelő k-elemű részhalmaz diszjunkt. ($Kn(n,k)$ az n,k paraméterű ún. Kneser-gráf, erre utal a jelölés.)*

Mutassuk meg, hogy $\chi(Kn(n,k)) \le n-2k+2$.

Megoldás: Megadunk a csúcsoknak egy jó színezését $n-2k+2$ színnel. Ez elegendő is, hiszen egy ilyen színezés léte bizonyítja az állítást.

Minden olyan csúcsot, melyre az általa jelölt részhalmaz legkisebb eleme nem nagyobb $n-2k+1$-nél, színezzünk ezzel a legkisebb elemmel mint színnel. Az összes többi csúcsot színezzük egyetlen $(n-2k+2)$-edik színnel.

A felhasznált színek száma valóban $n-2k+2$, megmutatjuk még, hogy a megadott színezés jó. Ha két csúcs színe azonos, és ez a szín nem az utolsóként mondott szín, akkor a két csúcsnak megfelelő részhalmaznak ugyanaz a legkisebb eleme és így nem lehetnek diszjunktak, következésképp nincsenek összekötve a gráfban. Ha két csúcs megegyező színe az $(n-2k+2)$-edik szín, akkor a két csúcsnak megfelelő két részhalmaz egyike sem tartalmaz $(n-2k+2)$-nél kisebb elemet. Az ilyen részhalmazok viszont mindannyian a $2k-1$ elemű $\{n-2k+2, n-2k+3, \dots, n\}$ halmaz részhalmazai, s mivel ők k eleműek, bármely kettőnek van legalább egy közös pontja. Tehát az utolsó szín sem fordulhat elő egy él két végpontján, vagyis a megadott színezés valóban jó színezés.

Megjegyzés: A fenti gráfok névadója, Kneser fogalmazta meg sejtésként, majd Lovász László bizonyította, hogy a feladatban szereplő becslés pontos, vagyis $Kn(n,k)$ kromatikus száma egyenlő $(n-2k+2)$-vel.

Definíció: Egy G gráf élgráfjának nevezzük és általában $L(G)$-vel jelöljük azt a gráfot, amelyre $V(L(G)) = E(G)$ és $E(L(G)) = \{\{e,f\} : e \ne f, e \cap f \ne \emptyset\}$. Vagyis: az $L(G)$ gráf csúcsai a G élei, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor van összekötve, ha az általuk reprezentált éleknek van közös végpontja (de a két él nem azonos).

27. *Mennyi az n-csúcsú teljes gráf élgráfja komplementerének kromatikus száma? (Röviden: $\chi(\overline{L(K_n)}) = ?$)*

Megjegyzés: A talán természetesebbnek látszó $\chi(L(K_n)) = ?$ kérdést (kicsit más jelöléssel) lásd mint 36. feladatot.

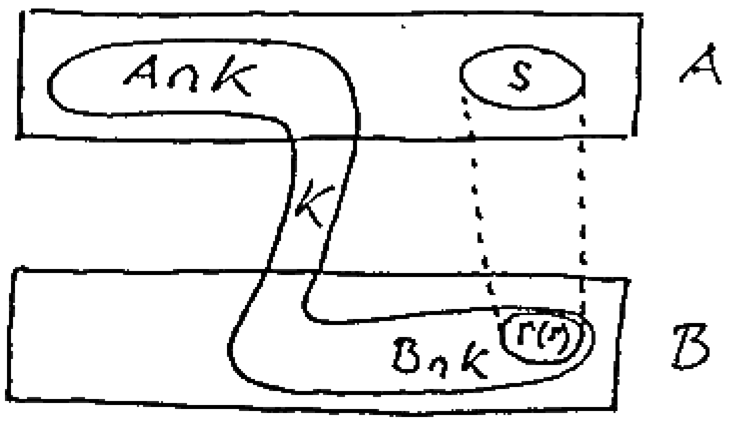
Megoldás: Megmutatjuk, hogy ha n legalább 3, akkor $\chi(\overline{L(K_n)}) = n-2$. (A kimaradó $n = 1, 2$ esetek triviálisan megválaszolhatóak.) Először megadunk egy jó színezést $n-2$ színnel. Legyenek K_n csúcsai $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mivel $\overline{L(K_n)}$ pontjai K_n éleinek felelnek meg, a színezést megadhatjuk úgy, hogy K_n éleinek színét definiáljuk. A szabály most az, hogy két él akkor lehet azonos színű, ha van közös végpontjuk (ekkor lesznek belőlük összekötetlen pontok az élgráf komplementerében). Színezzük az $\{i, j\}$ élt a $k = \min\{i, j\}$ jelű színnel, ha $k > 3$, és az 1 jelű színnel, ha $k \leq 3$. Ez a színezés egy háromszöget színez az 1-es színnel, és $n-3$ csillagot a többi $n-3$ színnel. Minden színosztály páronként metsző élekből áll, vagyis a színezés $\overline{L(K_n)}$ pontjainak jó színezését definiálja. A felhasznált színek száma $n-2$, így ezzel azt láttuk be, hogy $\chi(\overline{L(K_n)}) \leq n-2$.

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség bizonyításához vegyük észre, hogy a jelen feltételek melletti színezésnél egy-egy színosztály élei csakis háromszöget vagy csillagot alkothatnak. Legyen egy optimális színezésben a csillagok száma k. Minden csillagnak van egy 'középpontja', és feltehetjük, hogy ezzel a k színnel minden olyan élet kiszíneztünk, amiben valamely ilyen középpont szerepel mint az illető él egyik végpontja. (Ha nem így lenne, az így kimaradó élet hozzávehetnénk ahhoz a csillaghoz, aminek középpontját tartalmazza.) Ezen k színosztály elhagyásával tehát még egy K_{n-k} gráfunk maradt, ennek élei vannak a háromszögeket alkotó színosztályok színeivel színezve. Mivel egy háromszög három élt tartalmaz, ez azt jelenti, hogy még legalább $\frac{\binom{n-k}{2}}{3}$ színosztályra van szükség. Ha indirekt feltesszük, hogy $n-2$-nél kevesebb színt használtunk, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{\binom{n-k}{2}}{3} < n-2-k$. Ebből $r = n-k$ helyettesítés után átrendezve azt kapjuk, hogy $r^2 - 7r + 12 < 0$, ami $(r-3)(r-4) < 0$-val ekvivalens. Utóbbi viszont csak akkor állna fenn, ha r a $(3, 4)$ nyílt intervallum eleme volna, ami, r egész szám lévén, lehetetlen. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $n-2$ szín valóban szükséges.

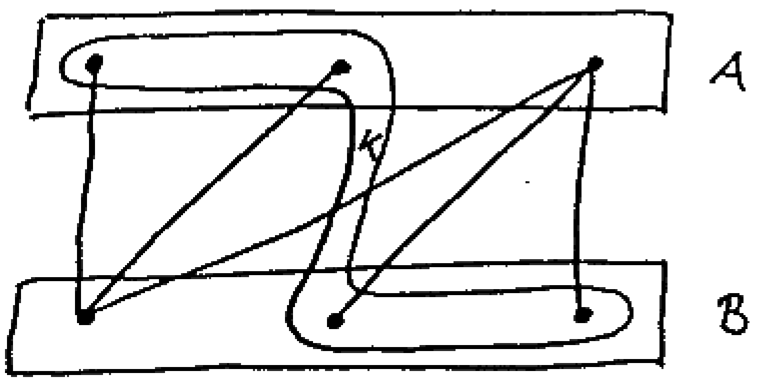
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $\overline{L(K_n)}$ azonos a $Kn(n, 2)$ Kneser-gráffal, a fenti megoldásban megadott színezés pedig az erről szóló, előző feladatban $Kn(n, k)$ színezésére megadott $n-2k+2$ színt használó színezés idevonatkozó speciális esete. Az ottani megjegyzésben említettük, hogy Lovász egy mély tétele szerint $\chi(Kn(n, k)) = n-2k+2$. A fenti feladatban ennek a $k = 2$ esetre vonatkozó speciális esetét láttuk be.

28. *Mutassuk meg, hogy ha G páros gráf, akkor $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, vagyis G komplementerében a kromatikus szám és a klikkszám egyenlő.*

Megoldás: Válasszunk ki $\bar{G}$-ben egy maximális K klikket és színezzük ki ennek pontjait a szükséges $\omega(\bar{G})$ színnel. A két (G-ben) független halmazt, melyek között G minden éle fut, nevezzük A-nak és B-nek. Feladatunk azt megmutatni, hogy $A - K$ és $B - K$ is kiszínezhető új szín felhasználása nélkül. Mivel $\bar{G}$-ben A is és B is klikkek, $A - K$ színezéséhez csak $(K \cap B)$-beli, $B - K$ színezéséhez csak $(K \cap A)$-beli színeket használhatunk. Megmutatjuk, hogy K előbbi színezése valóban kiterjeszthető $(A - K)$-ra csupán $(K \cap B)$-beli színeket használva. Egy-egy $(A - K)$-beli pont csak olyan színt kaphat, amilyen színű szomszédja nincs K-ban (a $\bar{G}$ gráfban), vagyis csakis valamely G-ben vele összekötött pont színét. Ugyanakkor minden $(A - K)$-beli pontnak más-más színt kell kapnia, mert $\bar{G}$-ben $A - K$ is klikk. Eszerint $A - K$ minden pontjához kell egy csak őhozzá rendelt párt találnunk $(K \cap B)$-ben, amivel G-ben szomszédos. Ez pontosan annyit jelent, hogy egy $(A - K)$-t lefedő párosításra van szükségünk a G-ben az $(A - K) \cup (B \cap K)$ halmaz által feszített páros gráfban. Ha létezik ilyen párosítás, akkor ki tudjuk terjeszteni K színezését $(A - K)$-ra, ha nem létezik, akkor nem. Azt kell tehát megmutatni, hogy ilyen párosítás létezik. Ennek szükséges és elégséges feltétele a Hall-tétel feltételének teljesülése, ezt kell tehát ellenőriznünk. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan S részhalmaza $(A - K)$-nak, aminek G-beli $(B \cap K)$-ba eső szomszédainak $\Gamma(S) := N_G(S) \cap (B \cap K)$ halmazára $|\Gamma(S)| < |S|$. Ekkor $(K - \Gamma(S)) \cup S$ klikk ($\bar{G}$-ben), ráadásul nagyobb K-nál, ami ellentmond K választásának. Ezzel igazoltuk, hogy K színezése kiterjeszthető $(A - K)$-ra. A és B szerepét felcserélve pontosan ugyanígy igazolható az is, hogy ez a színezés $(B - K)$-ra is kiterjeszthető, és mivel a két kiterjesztés különböző színeket használ, együttesen is végrehajthatók. Ezzel megadtuk $\bar{G}$ egy jó színezését $\omega(\bar{G})$ színnel, amiből $\chi(\bar{G}) \le \omega(\bar{G})$ következik. Mivel az ellentétes irányú egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ezzel igazoltuk a bizonyítandót.



Megjegyzés: Gyakori hiba annak (a bizonyítást egyébként nem lényegesen könnyítő) feltételezése, hogy $\bar{G}$ legnagyobb klikkje A-val vagy B-vel azonos. Ez nem feltétlenül igaz, egyszerű ellenpélda az a fa, aminek hat csúcsa van, és ezek között kettő (szükségképpen szomszédos) harmadfokú. (V. ö. 16. feladat.) Ebben a gráfban két háromelemű halmaz között futnak az élek, a legnagyobb független halmaz (tehát a komplementerbeli legnagyobb klikk) viszont négy csúcsot tartalmaz.



29. *Legyen G és H két különböző gráf diszjunkt csúcshalmazokkal és állítsunk elő belőlük egyetlen F gráfot úgy, hogy meglévő éleiket meghagyjuk, és további élekként beveszünk minden olyan pontpárt, melynek egyik tagja G, másik tagja*

H csúcsai közül való. (Röviden: G minden csúcsát összekötjük H minden csúcsával.) Mutassuk meg, hogy $\chi(F) = \chi(G) + \chi(H)$.

Megoldás: Mivel F-ben minden G-ből származó csúcs (ezek halmazát jelölje A) és minden H-ból származó csúcs (ezek halmazát jelölje B) össze van kötve, egyetlen A-ban használt szín sem jelenhet meg B-ben. Az A-beli csúcsok színezéséhez kell és elég $\chi(G)$ szín, hasonlóan a B-beliekéhez kell és elég $\chi(H)$ szín. Az előbbi meglátás szerint így szükség van legalább $\chi(G) + \chi(H)$ színre. Ha A-n megvalósítjuk G egy optimális színezését, majd B-n csupa ezektől különböző színnel H egy optimális színezését, akkor F-nek jó színezését kapjuk, így ennyi szín elegendő is, vagyis $\chi(F) = \chi(G) + \chi(H)$.

30. *Mutassuk meg, hogy ha G_1 és G_2 két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon és $G_1 \cup G_2$ a $(V, E(G_1) \cup E(G_2))$ módon megadható gráfot jelöli, akkor $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.*

    Megoldás: Egy korábban már látott megoldást általánosítunk. (V. ö. 14. feladat.) Színezzük ki G_1-et jól $\chi(G_1)$ színnel és G_2-t szintén jól $\chi(G_2)$ színnel. Minden $v \in V$-re az első színezésben jelölje a v csúcs színét $c(v)$, a másodikban $k(v)$. Rendeljük hozzá most minden V-beli v csúcshoz a $(c(v), k(v))$ rendezett színpárt. E színpárok semelyik két $G_1 \cup G_2$-ben összekötött csúcsra sem egyezhetnek meg, hiszen bármely két ilyen csúcs össze van kötve G_1 és G_2 legalább egyikében, és így ott különböző színűeknek kell lenniük. Vagyis az összes lehetséges színpárok $\chi(G_1)\chi(G_2)$ száma legalább annyi, amennyi szín a $G_1 \cup G_2$ gráf jó színezéséhez szükséges. Ez éppen a bizonyítandót jelenti. [L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993, 9.3.]

31. *Egy G gráf élhalmaza felbontható három olyan diszjunkt részre, melyek mindegyike páros gráfot alkot. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 8$.*

    Megoldás: Ha az előző feladat állítását alkalmazzuk két lépésben, éppen a bizonyítandót kapjuk. Kicsit részletesebben: legyen a három páros gráf F_1, F_2 és F_3. Az előző feladat szerint $\chi(F_1 \cup (F_2 \cup F_3)) \leq \chi(F_1)\chi(F_2 \cup F_3) \leq \chi(F_1)\chi(F_2)\chi(F_3) = 8$.

32. *Legyen G_1 és G_2 két véges egyszerű gráf. Definiáljuk általuk az alábbi F gráfot. F csúcsai az összes olyan rendezett (u, v) párok, melyekre $u \in V(G_1)$ és $v \in V(G_2)$. Két ilyen csúcs, (u_1, v_1) és (u_2, v_2) akkor és csak akkor van összekötve F-ben, ha $\{u_1, u_2\} \in E(G_1)$ és $\{v_1, v_2\} \in E(G_2)$ is teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(F) \leq \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.*

    Megoldás: Megadjuk F egy jó színezését $\chi(G_1)$ színnel. Ehhez tekintsük G_1 egy optimális színezését, ebben az x csúcs színét jelölje $c(x)$. Most F minden (u, v) csúcsát színezzük $c(u)$-val. Ha valamely (u, v) és (z, t) csúcsok F-ben összekötöttek, akkor u és z is azok G_1-ben, ezért $c(u) \neq c(z)$, és így a színezésünk valóban jó lesz. Ez igazolja, hogy $\chi(F) \leq \chi(G_1)$. Ugyanezzel a gondolatmenettel megmutatható, hogy $\chi(F) \leq \chi(G_2)$. Az utóbbi két egyenlőtlenségből pedig már következik az állítás.

33. *Legyen G_1 és G_2 két véges egyszerű gráf, melyek kromatikus száma három. Definiáljuk általuk az F gráfot ugyanúgy, ahogyan az előző feladatban.*

    Bizonyítsuk be, hogy F kromatikus száma is három.

Megoldás: Az előző feladat megoldásából következik, hogy $\chi(F) \leq 3$.

Be kell még látnunk, hogy F nem színezhető 3-nál kevesebb színnel, ami avval ekvivalens, hogy nem páros, azaz tartalmaz páratlan kört. Mutatunk F-ben egy páratlan kört. Mivel $\chi(G_1) = \chi(G_2) = 3$, G_1 és G_2 is tartalmaz páratlan kört. Legyenek ezek csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}$, illetve, $v_1, v_2, \ldots v_{2l+1}$. Tekintsük most F-ben az

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_m, v_m)$$

alakú csúcsokat, ahol az u-k indexeiben $\pmod{2k+1}$, a v-k indexeiben $\pmod{2l+1}$ értelmezzük az összeadást. Ebben a sorozatban minden tag szomszédja F-ben az előtte és utána következőnek, és (u_m, v_m) után akkor fog újra (u_1, v_1) következni először, ha m a $2k+1$ és $2l+1$ számok legkisebb közös többszöröse. A tekintett csúcsok tehát megadnak egy ilyen hosszúságú kört, és mivel két páratlan szám legkisebb közös többszöröse is páratlan, e kör páratlan hosszú.

Jelölés: Egy G gráf *élkromatikus számát* (vagy más néven: kromatikus indexét) $\chi'(G)$-vel jelöljük. $\chi'(G)$ tehát az a legkisebb pozitív egész k szám, amire igaz, hogy a gráf élei kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a közös végponttal rendelkező élek színe különböző. (Érdemes megjegyezni, hogy $\chi'(G)$ nem más, mint a G gráf élgráfjának kromatikus száma. Az élgráf definícióját ld. a 27. feladat előtt.)

34. *Legyen G 3-reguláris gráf, amire $\chi'(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton-köre.*

Megoldás: Tekintsük a feltételek szerinti G gráf éleinek egyetlen három színnel való színezését, a felhasznált színeket nevezzük kéknek, pirosnak és zöldnek. Hagyjuk el a piros éleket. A megmaradó gráfban minden fokszám kettő, így ez a gráf diszjunkt körök uniója. (Még azt is tudjuk, hogy diszjunkt páros körök uniója, mert minden körünk élei jól színezettek kékkel és zölddel.) Tegyük fel, hogy a körök száma nagyobb egynél. Ekkor az egyik körben a kék és a zöld színt felcserélve (a többi körben viszont változatlanul hagyva), majd a piros éleket visszatéve, G éleinek egy olyan jó színezését kapjuk, ami az előbbiből nem áll elő a színek egyszerű permutálásával. Mivel a feltételek szerint ilyen színezés nem létezhet, a piros élek elhagyása után megmaradó körök száma csak egy lehet. Mivel viszont ez az egy kör minden pontot érint (mindenütt van kék és zöld él), Hamilton-körnek kell lennie.

35. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi'(G)$ értékét.

Megoldás: A Vizing-tételből tudjuk, hogy $\chi'(G)$ értéke csak $\Delta(G)$ vagy $\Delta(G)+1$ lehet. Reguláris gráf esetében egy $\Delta(G)$ színnel való élszínezés azt jelentené, hogy minden csúcsnál minden szín megjelenik, vagyis az összes színosztály teljes párosítást alkot. Ha a gráf csúcsainak száma páratlan, akkor nem lehet benne teljes párosítás. Tehát páratlan csúcsú reguláris gráf élkromatikus száma mindenképpen $\Delta(G) + 1$. A jelen feladat gráfjára ez azt jelenti, hogy $\chi'(G) = 101$.

36. *Adjuk meg $\chi'(K_n)$ értékét minden egynél nagyobb pozitív egész n-re.*

Megoldás: Először azt mutatjuk meg, hogy ha $n > 1$ páratlan szám, akkor $\chi'(K_n) = n$. Ez az előző feladat megoldásában használt gondolatmenethez hasonló okoskodásból következik az alábbi módon. K_n-ben minden fokszám (így a maximális is) $n-1$, így a Vizing-tétel szerint az élkromatikus szám csak $n-1$ vagy n lehet. Ha $n-1$ lenne, akkor minden színnek meg kellene jelennie minden csúcsnál, vagyis az azonos színű élek teljes párosítást alkotnának, ami egy páratlan csúcsszámú gráfban lehetetlen. Ezért $\chi'(K_n)$ nem lehet $n-1$, így egyetlen lehetséges értéke n.

Most megmutatjuk, hogy páros n esetén $\chi'(K_n) = n-1$. Az $n = 2$ esetre ez azonnal látszik, ha $n > 2$, akkor az előbbiekből tudjuk, hogy $\chi'(K_{n-1}) = n-1$. Jelöljük ki a K_n gráf egyik csúcsát, nevezzük ezt x-nek, és tekintsük az x elhagyásával kapható K_{n-1} gráf egy élszínezését $n-1$ színnel. Ennél az élszínezésnél minden csúcsnál pontosan egy szín nem fordul elő, és ez a szín minden csúcsra más. (Utóbbi abból következik, hogy az $n-1$ színnel $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ élet csak úgy lehet kiszínezni, ha vagy minden szín pontosan $\frac{n-2}{2}$ él színe, vagy van olyan szín, ami ennél több élnek is színe. Mivel páros n (tehát páratlan $(n-1)$) esetén K_{n-1}-ben nincs $\frac{n-2}{2}$-nél több független (tehát azonos színnel színezhető) él, csak az előbbi eset lehetséges.) Nézzük most az eredeti K_n x-ből kiinduló éleit. Minden $\{x, a\}$ élet színezzünk olyan színűre, amilyen szín az előbb tekintett színezésben a-nál nem fordul elő. Mivel ez a hiányzó szín minden $a \in V(K_n) - \{x\}$ esetén más és más, így minden x-ből kiinduló élet más színnel színeztünk. Az x-től különböző pontoknál nyilván nem lesz két azonos színű él az $\{x, a\}$ tipusú élek színének megválasztása miatt. Vagyis amit kaptunk, az K_n éleinek egy jó színezése $n-1$ színnel. Ezért páros n-re $\chi'(K_n) \leq n-1$. Ugyanakkor $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n) = n-1$, tehát páros n-re $\chi'(K_n) = n-1$ amint állítottuk.

37. *Legyen G Hamilton-körrel rendelkező síkbarajzolható gráf. A négyszíntétel felhasználása nélkül mutassuk meg, hogy G duálisa kiszínezhető 4 színnel.*

Megoldás: Jelölje G duálisát G^*. A G-beli Hamilton-körnek G^*-ban egy vágás felel meg, jelölje az ehhez tartozó élek halmazát H. Megmutatjuk, hogy ha H-t elhagyjuk G^*-ból, akkor a megmaradó gráfban nem lesz kör. Indirekt tegyük fel, hogy mégis marad egy C kör, ennek G^* duálisában, tehát G-ben egy vágás felelne meg, mégpedig olyan, melynek egyetlen éle sem tartozik a H-beli éleknek megfelelő Hamilton-körhöz. Olyan vágás viszont nyilván nem létezhet, aminek egy Hamilton-körrel nincsen közös éle (a Hamilton-kör révén összefüggő maradna a gráf a vágásélek elhagyása után is), tehát az indirekt feltevés hamis.

A H vágás két diszjunkt halmazra osztja $V(G^*)$-ot, legyenek ezek A és B. Az előbb azt láttuk, hogy sem az A-n sem a B-n feszített részgráf nem tartalmaz kört, tehát erdő, így két színnel kiszínezhető. Színezzük az A-n feszített erdőt jól pirossal és kékkel, a B-n feszített erdőt pedig két másik színnel. Ekkor a H-beli élek visszatétele után is jó marad a színezés, és mivel négy színt használtunk, ez bizonyítja az állítást. [L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993, 9.53.]

38. *Legyen G olyan 3-reguláris gráf, melyben van elvágóél. Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.*

Megoldás: Vizing tétele szerint az élkromatikus szám vagy 3 vagy 4. Tegyük fel, hogy 3, és tekintsünk egy jó élszínezést 3 színnel. Ekkor minden csúcsnál mindegyik szín megjelenik. Legyen e egy elvágóél, az elhagyása után keletkező két részgráf G_1 és G_2. A színezésünkben szereplő három színt hívjuk pirosnak, kéknek, zöldnek, e színe legyen piros. A kék élek mindegyikére igaz, hogy vagy G_1 két pontját köti össze, vagy G_1 egyetlen pontját sem érinti. Mivel minden pontnál van kék él, ebből következik, hogy $|V(G_1)|$ páros. Másrészt, piros élvégpont páratlan sok van G_1-ben, hiszen e-nek G_1-be eső végpontja ilyen, és e az egyetlen olyan piros él, aminek egyetlen végpontja esik G_1-be. Hozzátéve, hogy minden csúcsnál van piros él, adódik, hogy $|V(G_1)|$ páratlan, ellentmondásban az előbbiekkel. Ezért $\chi'(G)$ nem lehet 3, tehát valóban csak 4 lehet.

39. *Bizonyítsuk be Tait tételét, miszerint a négyszíntétel ekvivalens az alábbi (*) jelű állítással:*

(*) Ha G 3-reguláris, elvágóélmentes síkbarajzolható gráf, akkor $\chi'(G) = 3$.

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy a négyszíntételből következik (*). Legyen G a (*) állításban szereplő feltételeknek eleget tevő gráf. Tekintsük G egy síkrajzát. A négyszíntétel szerint a G rajzán kialakult tartományok (vagyis G duálisának csúcsai) kiszínezhetők négy színnel úgy, hogy szomszédosak ne legyenek azonos színűek. Tekintsük a tartományok egy ilyen színezését, a felhasznált színeket pedig jelölje 00, 01, 10, és 11. Két ilyen szín "összege" legyen a koordinátánkénti mod 2 összeg, vagyis például $10 + 11 = 01$. Színezzük most G minden élét az általa határolt két tartomány színének összegével. Mivel nincsen elvágóél, minden él két különböző tartományt határol, így minden él színe két különböző szín összegeként áll elő. Ebből következik, hogy a 00 sosem fog fellépni, tehát az éleket így három színnel színezzük. Mivel a gráf 3-reguláris, bármely két egymáshoz csatlakozó él határol egy közös tartományt, és egy olyat, amit a másik nem, de utóbbi kettő is szomszédos, így különböző színű. Mindebből az következik, hogy egy közös végponttal rendelkező e és f él színe $a + b$ és $a + c$ alakban áll elő, ahol a, b, c mindegyike a tartományok 4-színezéséhez használt színek valamelyikét jelenti, és a különböző betűk, különböző színt jelentenek. Könnyű meggondolni, hogy két ilyen összeg sosem lesz egyenlő, tehát az élek jól lesznek színezve. Mivel $\chi'(G) \geq \Delta(G) = 3$, ezért ezzel igazoltuk, hogy $\chi'(G) = 3$, ha a négyszíntétel fennáll.

Azt kell még igazolnunk, hogy a (*) állításból is következik a négyszíntétel. Ehhez legyen F' tetszőleges egyszerű síkbarajzolható gráf, melynek tekintsük egy síkrajzát. Ha az ezen létrejövő tartományok nem mind háromszögek, akkor a több oldalú tartományokon húzzunk be átlókat úgy, hogy a rajz továbbra is síkbeli legyen (tehát az átlók se keresztezzenek sem korábbi éleket, sem egymást) és folytassuk ezt addig, amíg minden tartomány háromszög. Az így létrejött új síkbarajzolható gráf legyen F. Ha megmutatjuk, hogy F kiszínezhető négy színnel amennyiben (*) igaz, akkor nyilván F' is kiszínezhető négy színnel amennyiben (*) igaz. Mivel F' tetszőleges egyszerű síkbarajzolható gráf volt, ez a négyszíntétel igazolását jelenti (*) feltevése mellett. (A gráf egyszerű voltának feltételezése nem igazi megszorítás: a hurokéleket mindenképpen ki kell tiltani ahhoz, hogy értelme legyen a csúcsok jó színezéséről beszélni, a párhuzamos élek esetleges jelenléte pedig nyilvánvalóan nem okoz lényegi különbséget és csak a tárgyalás egyszerűsítése végett tekintettünk el tőlük.)

Tekintsük F fenti síkrajzához tartozó (geometriai) duálisát, legyen ez D. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha (*) igaz, akkor D tartományai színezhetők jól 4 színnel, ez ugyanaz, mintha F csúcsainak négy színnel való színezhetőségét bizonyítanánk. Mivel F rajzán minden tartomány háromszög, D 3-reguláris gráf, és származtatásából következően síkbarajzolható gráf is. D nem tartalmazhat elvágóélet, mert ennek F-ben egy hurokél felelne meg, ilyen pedig F-ben nem volt. D tehát teljesíti a (*)-ban szereplő feltételeket. Ha tehát (*) igaz, akkor D élei színezhetők jól 3 színnel. Tekintsük az élek egy ilyen színezését, ebből konstruáljuk meg a tartományok színezését 4 színnel. Lényegében a bizonyítás első részében tárgyalt módszert alkalmazzuk visszafelé. Legyenek az élek színezéséhez használt színek 01, 10 és 11. A tartományokat evvel a három és a negyedik 00 színnel fogjuk színezni. Színezzünk egy kiválasztott tartományt (mondjuk) 00-val. Ezután ha egy tartománynak valamely szomszédját már kiszíneztük, akkor őt színezzük a szomszéd tartomány színének és a két tartományt határoló él színének koordinátánkénti mod 2 összegével. Meg fogjuk mutatni, hogy ez a definíció jó, vagyis egy tartomány színének ugyanaz adódik, bármilyen más tartományokon keresztül jutunk is el hozzá. Ha ezt bebizonyítjuk, készen leszünk, ekkor ugyanis automatikusan adódik, hogy szomszédos tartományok különböző színűek, a felhasznált színek száma pedig legfeljebb négy.

Tegyük fel tehát, hogy valamely tartományhoz két különböző úton is eljuthatunk. A két út együtt egy kört (igazából egy F-beli kört) határoz meg. A tartomány színét az egy-egy út mentén az "átlépett" tartományhatárok (D-beli élek) színének koordinátánkénti mod 2 összege adja. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ez az összeg az úttól független. Ez viszont avval ekvivalens, hogy egy kör mentén véve ezt az összeget, mindig 00 adódik. Ezt látjuk be. Tekintsünk tehát egy kört (F-beli hagyományos, illetve D-ben szomszédos tartományok által alkotott körről van szó), és az ezt átszelő (D-beli) éleket. A tekintett kör két részre osztja a síkot (egy körön belüli és egy körön kívüli részre), az előbbi élek azok, amelyeknek mindkét részben van egy-egy végpontja. Tekintsük a körön belüli csúcsokat. Mivel minden fokszám három, mindegyikből pontosan egy 01, pontosan egy 10 és pontosan egy 11 színű él indul ki. A körön belüli 01, 10 és 11 színű élvégpontok száma tehát vagy mind páros, vagy mind páratlan. Az olyan élek, amiknek mindkét végpontja a körön belül van, páros számmal járulnak hozzá ehhez az összeghez, vagyis a kört átszelő adott színű élek száma aszerint páros vagy páratlan, hogy a körön belül hány pont van. Vagyis az ilyen élek száma vagy mindhárom színben páros, vagy mindhárom színben páratlan. Viszont páros sok 01 koordinátánkénti összege 00, és ugyanez mondható páros sok 10 és páros sok 11 esetén is. Ezek együttes összege is 00 tehát. Páratlan sok 01, páratlan sok 10 és páratlan sok 11 koordinátánkénti összege pedig egyenlő a három szín, 01, 10 és 11, koordinátánkénti összegével, ami szintén 00. Ezzel beláttuk a bizonyítandót. [P. G. Tait, On the colouring of maps, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 10, 501–503, 729, 1878–1880; (T. R. Jensen, B. Toft, Graph Coloring Problems, John Wiley and Sons, New York, 1995, hivatkozása alapján.)]

Megjegyzés: A fenti okoskodásban hamisan tűnhet "nagy ötletnek" a színek megfeleltetése a kettő hosszú bináris sorozatoknak. Az ötlet fontos része "csak" annyi, hogy a kétféle színezést egymásból kapjuk olyan módon, hogy a tartományok a, b, c, d színeit összeadva adódik az élek színe és viszont. Ehhez az a, b, c, d elemeken egy olyan csoport struktúrára van szükségünk, ami teljesíti, hogy a három nem-egység elem mindegyike másodrendű, és közülük tetszőleges kettőnek az összege a harmadik. Ilyen csoport van, ez az ún. Klein-féle csoport (mely a D_2 diéder csoporttal izomorf). A kettő hosszú bináris vektorokkal és koordinátánkénti mod 2 összeadásukkal ennek a csoportnak egy *reprezentációját* kapjuk. Ez a struktúra tehát lényeges eleme a bizonyításnak, de nem kötődik szigorúan a kettő hosszú bináris vektorokhoz.

Perfekt gráfokkal kapcsolatos feladatok

40. *Legyen G az a gráf, amit úgy kapunk, hogy egy nyolc hosszúságú körben a másodszomszédos pontokat is összekötjük. (G-nek tehát 8 csúcsa és 16 éle van.) Perfekt-e a G gráf?*

Megoldás: Nem. Könnyen ellenőrizhető, hogy a gráfban a legnagyobb klikk mérete 3, a legnagyobb független halmaz elemszáma pedig 2. Utóbbi miatt $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = 4$, ami tehát nagyobb a klikkszámnál.

41. *Mutassuk meg, hogy az intervallumgráfok perfektek. (G intervallumgráf, ha csúcsai megfeleltethetők a számegyenes különböző intervallumainak úgy, hogy két intervallum pontosan akkor messe egymást, ha a megfelelő pontok szomszédosak G-ben.)*

Megoldás: Tekintsük egy intervallumgráf intervallumokkal való reprezentációját. Az intervallumokat rakjuk sorba aszerint, hogy melyik kezdődik előbb, vagyis I jöjjön előbb a sorrendben, mint J, ha I baloldali végpontja a számegyenesen kisebb számot jelent, mint J baloldali végpontja. Ha a baloldali végpontok egybeesnek, akkor a két intervallum sorrendjét tetszés szerint eldönthetjük. Most színezzük az intervallumainkat mohón a megadott sorrendben. Ez azt jelenti, hogy ha már $(k-1)$ színt használtunk, k-adikat csak abban az esetben fogunk használni, ha olyan intervallumhoz érünk, melynek minden eddig használt színre van közös pontja olyan színű (tehát már színezett) intervallummal. Ez a megadott sorrend miatt csak úgy lehet, ha most színezendő intervallumunk kezdőpontja legalább $(k-1)$ másik intervallumnak is pontja. Ez azt jelenti, hogy ez a $k-1$ intervallum és a most színezendő egy k pontú klikket alkot a gráfban. Beláttuk tehát, hogy ha a színezéshez k szín kell, akkor $\omega(G) \geq k$, vagyis $\omega(G) \geq \chi(G)$, ami viszont csak egyenlőséggel teljesülhet. Mivel egy intervallumgráf tetszőleges feszített részgráfja is intervallumgráf, az előbbi egyenlőség a feszített részgráfokra is igaz, és így a gráf valóban perfekt.

42. *Mutassuk meg, hogy az összehasonlítási gráfok perfektek. (G összehasonlítási gráf, ha van olyan részben rendezett halmaz, melynek elemei megfeleltethetők G csúcsainak úgy, hogy két elem pontosan akkor összehasonlítható, ha a megfelelő csúcsok össze vannak kötve G-ben.)*

Megoldás: Legyen G összehasonlítási gráf, melyben az éleket irányítsuk is meg a reprezentált részben rendezett halmazban érvényes reláció szerint a 'kisebb' csúcs felé. Az így kapott irányított gráf aciklikus (nincs benne irányított kör). Jelölje a leghosszabb irányított út hosszát ebben a gráfban t. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\chi(G) = t = \omega(G)$. Színezzük 1-gyel G azon csúcsait, melyekből kifelé nem megy él. Elhagyva ezeket a pontokat, a most nyelővé vált pontokat színezzük kettővel, és így tovább. Ezen a módon egy jó színezést kapunk, hiszen ha két csúcs egyikéből sem indul kifelé él, akkor egymással nem lehetnek összekötve. A felhasznált színek száma éppen t, hiszen minden $i > 1$ színre igaz, hogy az i színű pontok mindegyikéből vezet él $i-1$ színű pontba. (Ha nem így lenne, már korábban kiszíneztük volna.) Beláttuk tehát, hogy t színnel van jó színezés, azaz $\chi(G) \leq t$. Tekintsünk most egy leghosszabb (irányított) utat. A részben rendezés tranzitív volta miatt, az ehhez tartozó pontok közül bármely kettő összehasonlítható, így ezek a pontok a gráfban egy klikket alkotnak. Eszerint $\omega(G) \geq t \geq \chi(G)$. Mivel azonban $\omega(G)$ nem lehet $\chi(G)$-nél több, mindenütt egyenlőség áll. Mivel egy összehasonlítási gráf minden feszített részgráfja is összehasonlítási gráf, a fentivel beláttuk az ilyen gráfok perfektségét.

Megjegyzések:

(1) A jelen feladat állítását és a Perfekt Gráf Tételt (G perfekt, ha $\bar{G}$ perfekt) felhasználva új bizonyítás adható az intervallumgráfok perfektségére (ld. előző feladat). Azt kell csak észrevenni, hogy egy intervallumgráf komplementere összehasonlítási gráf. Nevezetesen annak a részben rendezett halmaznak összehasonlítási gráfja, amit az intervallumokon a "teljesen balra van a másiktól" relációval definiálhatunk.

(2) Érdemes észrevenni a szoros (és ha már felfigyeltünk rá, nyilvánvaló) kapcsolatot a fenti bizonyítás és a 13. feladat között.

43. *Mutassuk meg, hogy egy minimális imperfekt gráfnak nem lehet* 200 *csúcsa. (G minimális imperfekt, ha imperfekt, de tetszőleges csúcsát elhagyva perfekt gráfhoz jutunk.)*

Segítség: Használjuk fel Lovász tételét, mely szerint egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgráfjára fennáll, hogy $\alpha(G')\omega(G') \geq |V(G')|$.

Megoldás: A fent említett Lovász-tétel alapján az mondható, hogy ha G minimális imperfekt gráf, akkor a tételbeli reláció fennáll minden *valódi* feszített részgráfjára azok perfektsége miatt. Ugyanakkor nem állhat fenn minden feszített részgráfjára, hiszen ő maga nem perfekt, és ez csak úgy lehetséges, ha G-re magára nem áll. Eszerint $\alpha(G)\omega(G) < |V(G)|$, de tetszőleges $v \in V(G)$-re $\alpha(G-\{v\})\omega(G-\{v\}) \geq |V(G-\{v\})| = |V(G)|-1$. Mivel $\alpha(G) \geq \alpha(G-\{v\})$ és $\omega(G) \geq \omega(G-\{v\})$, mindez csak úgy lehetséges, ha $\alpha(G)\omega(G) = |V(G)|-1$. Ha G 200 csúcsú minimális imperfekt gráf volna, akkor tehát $\alpha(G)\omega(G) = 199$-nek kellene teljesülnie. Mivel 199 prímszám, ebből az következne, hogy $\alpha(G)$ és $\omega(G)$ egyike 1, vagyis G vagy teljes, vagy üres gráf. Mivel a teljes és az üres gráf is perfekt, ez ellentmondana G imperfektségének. Ezzel az állítást igazoltuk.

44. *Legyenek G_n csúcsai az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok, és kettőt akkor kössünk össze, ha relatív prímek.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G_n) = \omega(G_n)$.*

b) *Mutassuk meg, hogy ha n elég nagy, akkor G_n nem lesz perfekt.*

Megoldás:

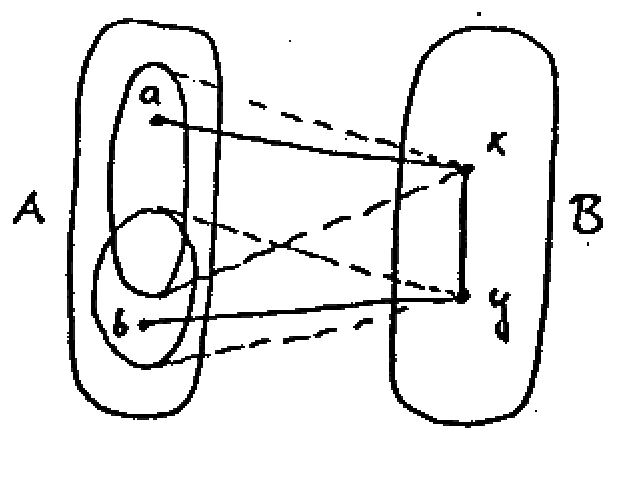
a) Színezzük G_n csúcsai közül az 1-et a c_0, az i-edik legkisebb prímet a c_i színnel. Az eddig színezett csúcsok egy klikket alkotnak, így elég megmutatni, hogy az egész gráf kiszínezhető további szín felhasználása nélkül. Ha minden $k \in V(G)$ csúcsot a prímtényezős felbontásában szereplő valamely prím színére színezünk, akkor azonos színű csúcsok sosem lesznek relatív prímek, tehát a színezés jó lesz.

b) Tekintsük a 6, 35, 22, 15, 77 csúcsok által feszített részgráfot, ami egy öt hosszú kör. Ez nem perfekt, és $n \geq 77$-re minden G_n-ben fellép.

[Hajnal Péter, Gráfelmélet, Polygon, Szeged, 1997, 11.1.9.]

45. *Nevezzünk egy gráfot keresztbe metszőnek, ha tetszőleges maximális (nem bővíthető) klikkje és tetszőleges maximális (nem bővíthető) független halmaza tartalmaz közös pontot. G öröklődően keresztbe metsző, ha minden feszített részgráfja keresztbe metsző. Mutassuk meg, hogy egy gráf akkor és csak akkor öröklődően keresztbe metsző, ha nem tartalmaz P_4-gyel (azaz a 4 csúcsú úttal) izomorf feszített részgráfot.*

Megoldás: Mivel P_4 tartalmaz egy maximális klikket és egy maximális független halmazt, amik nem metszik egymást, öröklődően keresztbe metsző gráfban nem lehet feszített P_4. Azt kell még megmutatnunk, hogy ha egy gráfban nincsen feszített P_4, az biztosan öröklődően keresztbe metsző (ezt mostantól *ökm*nek rövidítjük.) Tegyük fel, hogy G nem ökm, azt fogjuk megmutatni, hogy akkor tartalmaz feszített P_4-et. Ha G nem ökm, akkor tartalmaz egy A nem bővíthető független halmazt és egy B nem bővíthető klikket, melyekre $A \cap B = \emptyset$. A bővíthetetlensége miatt B minden pontjának kell legyen szomszédja A-ban. Tekintsük a B-beli x és y pontok A-beli $K := N(x) \cap A$ és $L := N(y) \cap B$ szomszédságát. Ha K és L egyike sem tartalmazza a másikat, akkor $\exists a \in K - L$ és $\exists b \in L - K$, melyekre tehát $\{a, x\}, \{b, y\} \in E(G)$, míg $\{a, y\}, \{b, x\} \notin E(G)$. Eszerint az a, x, y, b pontok egy P_4-et feszítenek, ekkor tehát készen vagyunk. (Itt azt is kihasználtuk, hogy A független, és B klikk, amiből $\{a, b\} \notin E(G)$ és $\{x, y\} \in E(G)$ következik.) Csak akkor nem vagyunk készen, ha B-nek bármely két pontjához azok A-beli szomszédsága olyan, hogy egyik tartalmazza a másikat. Ekkor viszont van ezen szomszédságok között legkisebb, ami az összes többiben benne van. Ha ez a legkisebb szomszédság üres, akkor mégis van B-nek olyan pontja, melynek nincs szomszédja A-ban, ami ellentmondás. Ha ez a legkisebb szomszédság nemüres, akkor tartalmaz legalább egy pontot. Ez viszont minden B-beli pontnak szomszédja tehát B-hez hozzávéve egy B-t tartalmazó nagyobb klikket kapnánk, ami B bővíthetetlenségének mond ellent. Tehát csak az az eset lehetséges, amikor a mutatott P_4 tényleg megjelenik. Ezzel az állítást igazoltuk.



46. *Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban nincs P_4-gyel (azaz a 4 csúcsú úttal) izomorf feszített részgráf, akkor a gráf perfekt.*

Megoldás: A bizonyításban kihasználjuk az előző feladatban bizonyított állítást. Ennek alapján elég azt bizonyítanunk, hogy az öröklődően keresztbe metsző (ökm) gráfok perfektek. Legyen G ilyen gráf. Tekintsük egy maximális független halmazát, és színezzük ennek pontjait az első színnel, majd töröljük őket a gráfból. Az ökm tulajdonság miatt ezzel minden maximális teljes részgráfnak is töröltük egy-egy csúcsát, vagyis a klikkszám eggyel csökkent. A megmaradt gráf szintén ökm tulajdonságú (hiszen az eredetinek feszített részgráfja), így az eljárást megismételhetjük, és folytathatjuk egészen addig, amíg minden pontot ki nem színeztünk. Mivel a klikkszám minden lépésben eggyel csökkent (de amíg van pont, addig legalább egy), éppen annyi színt használtunk, amennyi a klikkszám eredetileg volt, tehát G színezhető $\omega(G)$ színnel. Ugyanez a feszített részgráfokról is elmondható, mivel azok is ökm tulajdonságúak. Ez azt jelenti, hogy az ökm gráfok valóban perfektek. [D. Seinsche, On a property of the class of n-colorable graphs, J. Combin. Theory Ser. B, 16 (1974), 191–193.]

47. *Nevezzük két gráf klikkmenti összeragasztásának az alábbi konstrukciót. Legyen G_1 és G_2 két véges egyszerű gráf, melyekben kiválasztunk egy-egy azonos méretű klikket, és ezek pontjait (tetszőleges egy-egyértelmű hozzárendeléssel) azonosítjuk egymással, miközben a két gráf egyéb részeit változatlanul meghagyjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha G_1 és G_2 perfekt gráfok, és F egy klikkmenti összeragasztottjuk, akkor F is perfekt.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy $\omega(F) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$ és $\chi(F) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Az első egyenlőség annak folyománya, hogy F-nek tetszőleges klikkje G_1 és G_2 valamelyikében is klikk. A második egyenlőség bizonyításához színezzük ki G_1-et az $1, 2, \ldots, k_1 := \chi(G_1)$ és G_2-t az $1, 2, \ldots, k_2 := \chi(G_2)$ színekkel. Színezéseinkben permutáljuk úgy a színeket, hogy a közös klikkbe eső pontok mindkét színezésben ugyanazt a színt kapják. Ezután a két gráf színezésével együtt is összeragasztható, amit kapunk az F-nek egy jól színezett példánya. Tehát $\chi(F)$ nem nagyobb k_1 és k_2 közül a nagyobbiknál. Ezzel a fenti két egyenlőséget beláttuk. Mivel G_1 és G_2 perfektek voltak, ebből $\chi(F) = \omega(F)$ is következik.

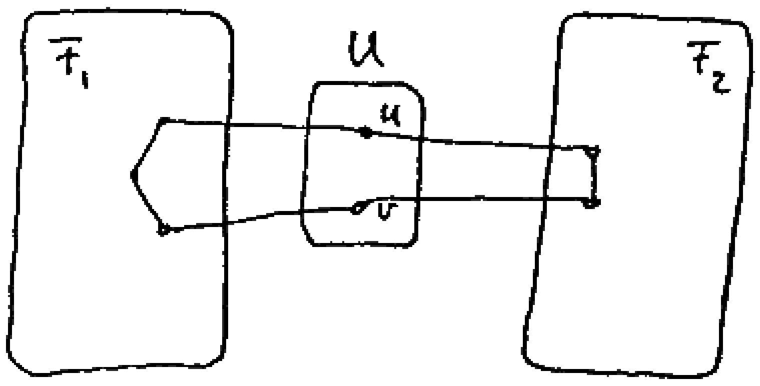
Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\chi(F') = \omega(F')$ is áll F-nek tetszőleges F' feszített részgráfjára. Ez pedig a fentihez hasonlóan adódik abból, hogy F tetszőleges feszített részgráfja is klikkmenti összeragasztása G_1 és G_2 egy-egy feszített részgráfjának (esetleg egy zérus pontszámú klikk mentén).

48. *Egy G gráfot merevkörűnek nevezünk, ha minden háromnál hosszabb körében van 'átló', azaz a körnek van két nemszomszédos pontja, amelyek élet alkotnak. Az előző feladat eredményét felhasználva igazoljuk, hogy a merevkörű gráfok perfektek.*

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy minden merevkörű gráf előáll teljes gráfokból a klikkmenti összeragasztás műveletének véges sokszori egymásutánjával. Felhasználva az előző feladat eredményét és azt, hogy a teljes gráfok perfektek, ezzel készen is leszünk.

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen G merevkörű gráf n ponton, és tegyük fel, hogy n-nél kevesebb csúcs esetén már igazoltuk az állítást.

Az indukció kezdetével nem lesz baj, mert a teljes gráfok perfektek, és egyetlen ponton csak teljes gráf létezik. Feltehetjük, hogy G összefüggő, hiszen ha az állítás komponensenként igaz, akkor általában is igaz. Legyen $U \subseteq V(G)$ a csúcsok minimális elvágó részhalmaza, vagyis olyan, amelynek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét, de ha U-nak csak valamely részhalmazát hagyjuk el, összefüggő marad. Ha nincs ilyen, akkor G teljes, és így készen vagyunk. Mostantól tehát feltesszük, hogy van ilyen U. Nevezzünk az U elhagyása után létrejövő komponensek közül kettőt F_1-nek és F_2-nek, az $F_1 \cup U$ és $F_2 \cup U$ gráfokat pedig G_1-nek és G_2-nek. (Az $F_i \cup U$-t úgy értjük, hogy abban az F_i-beli, az U-beli és az U és F_i közötti élek is jelen vannak.) Azt fogjuk megmutatni, hogy U klikk G-ben, ebből következik, hogy G a G_1 és G_2 gráfok klikkmenti összeragasztása. Mivel G_1 és G_2 is szükségképpen merevkörű, az indukciós feltevés szerint ők előállnak a kívánt módon. Az előző mondat állításával együtt ebből már következik, hogy G is előáll ugyanígy.



Tegyük fel indirekt, hogy U nem alkot klikket G-ben, azaz van két pontja, u és v, melyek nincsenek összekötve. U választása miatt u-nak is és v-nek is van szomszédja F_1-ben és F_2-ben is. Ez azt jelenti, hogy G_1-ben és G_2-ben is van út u és v között. Vegyük a legrövidebb ilyen utakat. Ezek uniója egy kör, melynek legalább két U-n kívül eső pontja van, így a hossza legalább négy. Nemszomszédos csúcsai között pedig nem lehet él, mert egy ilyen él vagy rövidítené az egyik u–v utat, amit eleve legröviebbnek választottunk, vagy egy F_1-beli csúcsot kötne össze egy F_2-belivel (ellentmondva annak, hogy U elvágó halmaz), vagy u-t kötné össze v-vel, ami szintén ellentmondás. Ezzel bebizonyítottuk az állítást. [Hajnal-Surányi (1958), Berge (1961), illetve, Dirac (1961) eredménye; (T. R. Jensen, B. Toft, Graph Coloring Problems, John Wiley and Sons, New York, 1995 hivatkozása alapján.)]

A Mycielski konstrukcióval kapcsolatos feladatok

Mycielski-konstrukció: Legyen M_2 az egyetlen élből álló két csúcsú gráf. Ha M_k már adott és csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, akkor belőle az alábbiak szerint konstruáljuk meg M_{k+1}-et:

$$V(M_{k+1}) = \{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n, w\}$$

$$E(M_{k+1}) = E(M_k) \cup \{\{u_i, v_j\} : \{v_i, v_j\} \in E(M_k)\} \cup \{\{w, u_i\} : i = 1, \ldots, n\}$$

Vagyis: A v_i pontok az eggyel kisebb indexű Mycielski gráfot feszítik, az u_i pontok egymás közt függetlenek és pontosan azokkal a v_j csúcsokkal van mindegyikük összekötve, amelyikkel a 'párjuk', az azonos indexű v_i csúcs, továbbá w össze van kötve minden u_i-vel, de semmi mással.

E konstrukció fontos tulajdonsága, hogy nem növeli a klikkszámot, viszont minden lépésben eggyel növeli a kromatikus számot.

49. *Jelölje M_k a Mycielski konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. (M_2 az egyetlen élet tartalmazó kétcsúcsú gráf, M_3 az 5 hosszú, húr nélküli kör.) Bizonyítsuk be, hogy $k > 2$ esetén $\nu(M_k) = \frac{|V(M_k)|-1}{2}$*

Megoldás: Előszöris jegyezzük meg, hogy $k > 2$-re $|V(M_k)| = 2|V(M_{k-1})|+1$, azaz páratlan, ez a konstrukcióból adódik. Eszerint teljes párosítás biztosan nincs M_k-ban, $\nu(M_k)$ elképzelhető legnagyobb értéke $\frac{|V(M_k)|-1}{2}$. Elég tehát azt belátni, hogy ekkora párosítás tényleg van. Ezt indukcióval igazoljuk. Az állítás $k = 3$ esetén könnyen ellenőrizhető módon igaz. Tegyük fel, hogy igaz M_k-ra, megmutatjuk M_{k+1}-re. Legyen egy M_k-beli maximális párosítás által le nem fogott egyetlen pont v_0. Legyen továbbá ezen párosítás valamely éle $\{v_i, v_j\}$. Ezt M_{k+1}-ben "cseréljük le" a $\{v_i, u_j\}, \{v_j, u_i\}$ élpárra. (Itt a konstrukció leírásánál szokásos jelölést használtuk: u_r az M_{k-1}-beli v_r csúcs 'ikertestvére'.) Ha ezt minden az M_k-beli maximális párosításbeli élre megtesszük, akkor egy olyan párosítást kapunk, ahol v_0, a hozzátartozó u_0 és az összes u_j-vel összekötött w csúcs kivételével minden csúcsnak van párja. Ehhez a párosításhoz hozzávehető még a $\{u_0, u\}$ él, így már csak egy pont marad pár nélkül, vagyis a párosítás mérete valóban az elképzelhető legnagyobb.

50. *Jelölje M_k ismét a Mycielski konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?*

Megoldás: Csak $k = 3$-ra. Könnyű ellenőrizni, hogy M_2-ben nincs, $M_3 = C_5$-ben pedig van Euler-kör. A konstrukcióból adódik, hogy M_k egyik csúcsának fokszáma éppen M_{k-1} csúcsainak számával egyenlő, és hogy M_k csúcsainak száma $k \geq 2$-re páratlan. Eszerint M_k-nak minden $k \geq 3$-ra van páratlan fokszámú csúcsa, így nem lehet Euler-köre.

51. *Jelölje M_k ismét a k-adik Mycielsky-gráfot. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-utat?*

Megoldás: Belátjuk, hogy $k > 3$-ra nincsen Euler-út M_k-ban. (A kisebb értékekre kipróbálással eldönthető: M_2-ben van, M_3-ban Euler-kör van, szigorúan nyílt Euler-vonal nem létezik.) Megmutatjuk, hogy $k > 3$ esetén kettőnél több páratlan fokú csúcs van M_k-ban, ebből következik a fenti állítás. Az M_{k+1} gráf M_k-t feszítő csúcsai legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_m$, azok "párjai" pedig $u_1, u_2, \ldots, u_m$, míg a további csúcs legyen w. A konstrukcióból adódik, hogy ha a v_i-nek megfelelő csúcs fokszáma M_k-ban d, akkor u_i fokszáma M_{k+1}-ben $d+1$, és v_i fokszáma M_{k+1}-ben $2d$. Ebből pedig az következik, hogy a v_i-k fokszáma $k = 3$-tól kezdve páros szám, és így az ezen számoknál 1-gyel nagyobb u_i-fokszámok páratlan számok $k = 4$-től kezdve. Mivel pedig a u_i-k száma $k = 4$ esetén 5, majd mindig több, M_k kettőnél jóval több páratlan fokszámú csúcsot tartalmaz.

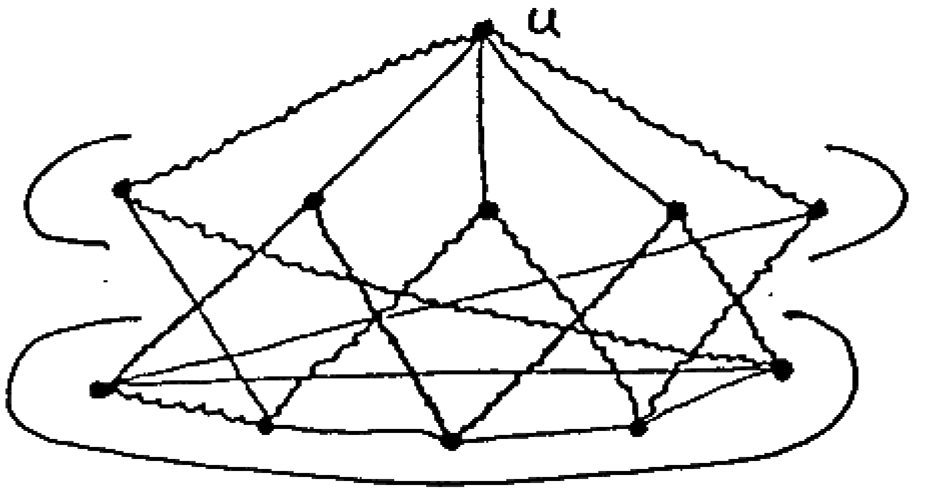
52. *Jelölje M_k ismét a k-adik Mycielski-gráfot. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Hamilton-kört?*

Megoldás: M_1 egyetlen pontból áll, itt még nincs értelme Hamilton-körről beszélni, $M_2 = K_2$ nyilván nem tartalmaz Hamilton-kört, $M_3 = C_5$ pedig maga egy egyszerű kör, tehát tartalmaz. Megmutatjuk, hogy M_k minden $k > 3$-ra is tartalmaz Hamilton-kört. Teljes indukcióval bizonyítunk. Már láttuk, hogy az állítás igaz $k = 3$-ra, feltesszük, hogy igaz $k = n$-re. Tekintsük M_{n+1}-et, ennek M_n-et feszítő csúcsai legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_m$, azok "párjai" $u_1, u_2, \ldots, u_m$, a további csúcs pedig w. Legyen az M_n-beli Hamilton-kör $v_1 - v_2 - \ldots - v_m - v_1$. Ekkor az alábbi felsorolásban szomszédos csúcsok között mindenütt van él, és azok éppen M_{n+1} egy Hamilton-körét adják:

$$v_1 - u_2 - v_3 - u_4 - v_5 - u_6 - \ldots - u_{m-1} - v_m - u_1 - w - u_m -$$

$$-v_{m-1} - u_{m-2} - v_{m-3} - u_{m-4} - \ldots - u_3 - v_2 - v_1$$

Figyeljük meg, hogy felhasználtuk azt a tényt, miszerint n páratlan. Ez $n \geq 3$-ra valóban teljesül. A fenti Hamilton-kör létezése igazolja az állítást.



Megjegyzés: A Hamilton-kör létezése és páratlan volta azonnal adja, hogy $\nu(M_k) \geq \frac{|V(M_k)|-1}{2}$ és $\tau(M_k) \geq \frac{|V(M_k)|+1}{2}$ ha $k \geq 3$. Ezért az utóbbi feladat megoldását ismerve lényegesen rövidebben megoldhatjuk a korábbi, $\nu(M_k)$-ra vonatkozó feladatot. A $\tau(M_k)$-ra kapott fenti érték szintén pontos, ami abból látható, hogy a u_i csúcsok független halmazt alkotnak, így a többi $\frac{|V(M_k)|+1}{2}$ csúcs minden élet lefog.

Listaszínezéssel kapcsolatos feladatok

Definíció (Vizing (1976), Erdős, Rubin, Taylor (1979)): Egy G gráf minden $v \in V(G)$ csúcsához legyen adott egy $L(v)$ színlista. Azt mondjuk, hogy G színezhető az adott listákról, ha van a csúcsoknak olyan jó színezése, ahol a v csúcs $c(v)$ színére fennáll, hogy $c(v) \in L(v)$ minden $v \in V(G)$-re. A G gráf $ch(G)$-vel jelölt *listaszínezési száma* az a legkisebb k pozitív egész, amire fennáll, hogy akárhogyan adunk meg a csúcsokhoz olyan $L(v)$ listákat, amikre $|L(v)| \geq k$ teljesül, G színezhető lesz az adott listákról. (A listaszínezési szám neve angolul *choice number*, innen származik a $ch(G)$ jelölés.)

53. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráfra fennáll $ch(G) \geq \chi(G)$.*

Megoldás: Legyenek a listák azonosak. Ha a rajtuk szereplő színek száma k, akkor egy jó színezés a listákról G-nek egy k színnel való jó színezését adja. Vagyis, ha $k < \chi(G)$, akkor ilyen színezés nem létezhet, tehát $ch(G) \geq \chi(G)$.

54. *Mutassuk meg, hogy $ch(K_{2,4}) > 2$, ami igazolja, hogy $ch(G) > \chi(G)$ lehetséges.*

Megoldás: Legyenek a két független halmazba eső csúcsok a, b, illetve, x, y, z, t. Mutatunk olyan kételemű színlistákat, amikről a gráf nem színezhető jól, ezek léte igazolja, hogy $ch(K_{2,4}) > 2$. Legyen $L(a) = \{1,2\}, L(b) = \{3,4\}$, a másik független halmaz pontjaira pedig $L(x) = \{1,3\}, L(y) = \{1,4\}, L(z) = \{2,3\}, L(t) = \{2,4\}$. Mármost akárhogyan is választanánk ki az a és b csúcsok színét a listájukról, két olyan színt fogunk használni, ami a másik négy pont valamelyikének teljes színlistáját adja. Mivel ez a pont a-val is és b-vel is szomszédos, őt nem lesz módunk jól színezni.

55. *Mutassuk meg, hogy $ch(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Megoldás: Az állítás azt jelenti, hogy tetszőleges G gráf csúcsaira tetszőleges $\Delta + 1$ elemű listákat írva e listákról lesz jó színezése G-nek. Tekintsünk egy ilyen listákkal adott G gráfot, és színezzük a csúcsait mohón: haladjunk a pontokon valamilyen sorrendben, és minden újonnan tekintett pontot színezzük ki a listája egy olyan színével, ami a pont szomszédságában már kiszínezett pontoknak adott színek között nem szerepel. Ha minden pontot kiszíneztünk álljunk le. Ha ezen a módon a színezést be tudjuk fejezni, akkor nyilván jó színezést kapunk, probléma csak az lehet, ha elakadunk. Ez viszont nem fordulhat elő, hiszen minden pontnak legfeljebb $\Delta(G)$ szomszédja van, a listák pedig legalább eggyel több eleműek, vagyis mindig lesz rajtuk olyan szín, amit még a színezendő pont szomszédságában nem használtunk.

Megjegyzés: A fentihez hasonlóan, több olyan, a kromatikus számra vonatkozó tétel, aminek a bizonyításában a mohó színezésé a főszerep, igaz marad $ch(G)$-re is. A fentiek alapján nem nehéz igazolni például, hogy $ch(G) \leq \max\{\delta(H) : H \subseteq G\} + 1$. Hasonlóan belátható a Brooks tétel megfelelője is: ha G nem teljes gráf, vagy páratlan kör, akkor $ch(G) \leq \Delta(G)$.

56. *Határozzuk meg $ch(K_n)$ értékét.*

Megoldás: Az előző feladatban bizonyított $ch(G) \leq \Delta(G)+1$ egyenlőtlenségből következik $ch(K_n) \leq (n-1) + 1 = n$. A korábban belátott $ch(G) \geq \chi(G)$ egyenlőtlenségből pedig $ch(K_n) \geq n$ adódik. A két egyenlőtlenség alapján tehát $ch(K_n) = n$.

57. *Határozzuk meg* $ch(K_{3,3})$*-at.*

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy $K_{3,3}$ csúcsaihoz rendelhetünk olyan kételemű listákat, amelyekről nem színezhető ki jól. Ebből következik, hogy $ch(K_{3,3}) > 2$. Legyenek a csúcsok a, b, c, d, e, f, ahol a, b, c és d, e, f alkossa a $K_{3,3}$ két független halmazát. A listák pedig legyenek: $L(a) = L(d) = \{1,2\}$, $L(b) = L(e) = \{1,3\}$, $L(c) = L(f) = \{2,3\}$. Próbáljuk meg a gráfot kiszínezni ezekről a listákról. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a színe (ezentúl x színét $c(x)$ jelöli) 1 lesz. Ekkor szükségképpen $c(e) = 3$, emiatt pedig $c(c) = 2$. Ekkor viszont d-t már nem tudjuk a-tól is és c-től is különbözőre színezni. $ch(K_{3,3}) \leq 3$ következik például a Brooks-tételből, melynek bizonyítása szó szerint érvényben marad akkor is, ha a $ch(G)$ paraméterre vonatkoztatjuk a kromatikus szám helyett (ld. az 55. feladatot és az azt követő megjegyzést.) Mindebből adódik, hogy $ch(K_{3,3}) = 3$.

58. *Mutassuk meg, hogy* $ch(C_k) = \chi(C_k)$.

Megoldás: Ha k páratlan, akkor az állítás adódik a $\chi(G) \leq ch(G) \leq \Delta(G) + 1$ egyenlőtlenségekből, mivel a két szélen álló érték ilyenkor egyenlő. Ha k páros, akkor $ch(C_k) > 1$ triviális volta miatt azt kell belátnunk, hogy kettes listákról egy páros kör mindig színezhető. Ha az összes lista egyforma, akkor a két szereplő színt felváltva használva kapunk egy jó színezést. Megmutatjuk, hogy ha nem minden lista ugyanazt a két színt tartalmazza, akkor is van jó színezés. Ilyenkor biztosan van két szomszédos csúcs, melyek listái különböznek, legyen két ilyen csúcs u és v. Színezzük u-t a listájának egy olyan színével, ami v listáján nem szerepel (u és v választása miatt van ilyen). Ezután u-nak a v-től különböző szomszédját, majd annak másik szomszédját, és így tovább, színezzük, míg körbe nem érünk. Minden v-től különböző pontot olyan helyzetben színezünk így, amikor még csak egy szomszédja színezett, ezért a listáján levő két szín egyike még biztosan nem tiltott, avval kiszínezhetjük. Amikor v-hez érünk, akkor v-nek már mindkét szomszédja színezett, de ezek egyike, u, olyan színnel van színezve, ami v listáján nem szerepel. Ezért a v listáján levő két szín közül is legfeljebb egy tiltott, a másikkal kiszínezhetjük v-t.

59. *Mutassuk meg, hogy ha G hurokélmentes síkbarajzolható gráf, akkor* $ch(G) \leq 6$.

Megoldás: Feltehetjük, hogy G egyszerű gráf, hiszen hurokélmentes, a többszörös éleknek pedig semmilyen hatása nincs a színezésre nézve. Tudjuk, hogy egy G egyszerű síkbarajzolható gráfra $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$, és ezért kell lennie legfeljebb ötödfokú pontnak a gráfban. Legyen az n csúcsú G síkbarajzolható gráf minimális fokú pontja v_n. A v_n elhagyásával megmaradó gráf minimális fokú pontja v_{n-1}, és így tovább. Ha most a csúcsokat előbb adott indexeik növekvő sorrendjében színezzük, akkor minden csúcsra olyankor kerül sor, amikor még legfeljebb 5 szomszédja van kiszínezve. Ezért egy 6 elemű színlistán mindig található lesz olyan szín, amivel még színezhető. Ez pontosan azt jelenti, hogy $ch(G) \leq 6$.

Megjegyzés: C. Thomassen bebizonyította, hogy a fentinél erősebb $ch(G) \leq 5$ egyenlőtlenség is mindig igaz, ha G síkgráf. Ugyanakkor M. Voigt megmutatta, hogy létezik olyan síkgráf, amire $ch(G) > 4$, vagyis a síkgráfok körében előforduló legnagyobb $ch(G)$ érték pontosan 5.

60. *Mutassuk meg, hogy ha G élgráf, akkor $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$.*

Megoldás: Legyen G az F gráf élgráfja, ekkor $\Delta(G) \leq 2(\Delta(F) - 1)$. A mohó színezés révén $ch(G) \leq \Delta(G) + 1$ (ld. 55. feladat), ugyanakkor tudjuk, hogy $\chi(G) = \chi'(F) \geq \Delta(F)$. Mindezeket összerakva adódik $ch(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq 2\Delta(F) - 1 \leq 2\chi(G) - 1$.

61. *Jelölje $K_2^{(n)}$ azt a $2n$ csúcsú gráfot, melynek komplementere egy teljes párosítás. Mutassuk meg, hogy $ch(K_2^{(n)}) = n$.*

Megoldás: Mivel $K_2^{(n)}$ tartalmaz n pontú klikket, adódik, hogy $ch(K_2^{(n)}) \geq n$. Megmutatjuk, hogy n elemű listákról a gráf mindig színezhető. Ez az állítás $n = 1$ esetén triviális, teljes indukcióval tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz. Tekintsük $K_2^{(k+1)}$-et a csúcsain adott tetszőleges $(k + 1)$ elemű listákkal. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy van-e olyan összekötetlen csúcspár, amelyhez tartozó két lista nem diszjunkt. Ha van ilyen, akkor e csúcspár két tagját színezzük ki listáik egy közös elemével, majd töröljük őket a gráfból, a felhasznált közös színt pedig az összes olyan listáról, amin még rajta volt. Ezáltal egy $K_2^{(k)}$ gráfhoz jutottunk, melynek minden pontjához adott egy legalább k elemű színlista (mivel az eredetileg $k + 1$ elemű listáról legfeljebb egy elemet töröltünk). Innen a színezés az indukciós feltevés szerint befejezhető.

A másik eset az, amikor minden összekötetlen pontpár két pontjának listája diszjunkt. Ekkor csak olyan színezés lehet jó, ami minden pontot különböző színűre színez. Legyen $F = (A, B, E)$ a következő páros gráf. $A := V(K_2^{(n)})$, $B := \cup_{v \in A} L(v)$, vagyis az összes a listákon előforduló szín halmaza, és legyen $\{u, c\} \in E(F)$ pontosan akkor, ha $c \in L(u)$, vagyis minden A-beli csúcsot a listáján szereplő színekkel kötünk össze F-ben. A fenti megfigyelés (miszerint minden pontot más színnel kell színezni) azt jelenti, hogy $K_2^{(n)}$ pontosan akkor lesz színezhető a megadott listákról, ha a most definiált páros gráfban van A-t lefedő párosítás. Megmutatjuk, hogy van. Ennek pontos feltételét a Hall-tétel megadja, azt kell tehát ellenőriznünk, hogy ez a feltétel teljesül. A feltétel azt mondja, hogy tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$, ahol $N(X)$ az X-beli csúcsok szomszédainak halmaza. Megmutatjuk, hogy ez teljesül. Ha $|X| \leq n$, akkor a feltétel azért teljesül, mert minden pont listáján n szín van, tehát már egyetlen pont szomszédsága is n méretű, $|N(X)|$ ennél kisebb nem lehet. Ha $|X| > n$, akkor viszont biztos, hogy X tartalmazza A-nak két a $K_2^{(n)}$-ben összekötetlen csúcsát. Ezek listája mostani feltevésünk szerint diszjunkt, tehát e két pontnak F-ben együttesen legalább $2n$ szomszédja van. Ilyenkor tehát $|N(X)| \geq 2n \geq |X|$, ahol az utolsó egyenlőtlenség annak folyománya, hogy $|A| = 2n$ és $X \subseteq A$. Ezzel beláttuk, hogy a kívánt színezés létezik. [P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, Congr. Numer. 26 (1979), 125–157.]