Bevezető matematika B próba zárthelyi feladatok

1) **(6 pont)** Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög kerülete 36 cm. Hány centiméter hosszúak a háromszög oldalai?

2) **(7 pont)** Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést ($|x| \neq |y|$):
$$\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x - y}\right) \div \left(1 - \frac{x - y}{x + y}\right)$$

3) **(6 pont)** Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést (x > 0):
$$\sqrt{\frac{x \cdot \sqrt{x}}{x^{-2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^{-1}}}$$

4) **(6 pont)** Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:
$$\sqrt{64^{1-\log_8 10}} + 5^{\log_{25} 4/_{100}}$$

5) **(6 pont)** Anikó és Bendegúz együtt 4 óra alatt lennének képesek lenyírni a füvet a kertben. Külön-külön hány órába telne nekik megcsinálni, ha tudjuk, hogy Bendegúz kétszer annyi idő alatt tudja megcsinálni, mint Anikó?

6) **(6 pont)** Hol (vagy mely x értékre) lesz az $f(x) = -4x^2 + 12x - 7$ függvény értéke maximális, és mennyi a maximum értéke?

7) **(6 pont)** Milyen *p* valós paraméter esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke?
$$x^2 - p\,x + (3p - 5) = 0$$

8) **(7 pont)** Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 2} \geq 0$$

Bevezető matematika B próba zárthelyi megoldások

1) **(6 pont)**
Háromszög kerülete felhasználva:
$(a_2-d)+a_2+(a_2+d)=36 \rightarrow 3a_2=36 \rightarrow a_2=12cm$ **(1p)**
Pitagorasz-tétel alkalmazása (mert derékszögű háromszög):
$(a_2-d)^2+{a_2}^2=(a_2+d)^2 \rightarrow \; {a_2}^2-2a_2d+d^2={a_2}^2+2a_2d+d^2 \rightarrow {a_2}^2=4a_2d$ **(2p)**
Helyettesítés:
$12^2=4(12)d \rightarrow 144=48d \rightarrow d=3cm$ **(1p)**
$a_1=9cm \quad a_2=12cm \quad a_3=15cm$ **(2p)**
(Nem jár pontlevonás azért, ha lemarad a *cm*)

2) **(7 pont)**
$\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x-y}\right)\div\left(1-\frac{x-y}{x+y}\right)=\left(\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}-\frac{2y}{x-y}\right)\div\left(\frac{x+y-x+y}{x+y}\right)$
(2p)
$=\;\left(\frac{2xy-2y(x+y)}{(x+y)(x-y)}\right)\div\left(\frac{2y}{x+y}\right)=\frac{-2y^2}{x-y}\cdot\frac{1}{2y}$ **(1+2p)**
$=\;\frac{-y}{x-y}$ **(2p)**

3) **(6 pont)**
$\sqrt{\frac{x\cdot\sqrt{x}}{x^{-2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^{-1}}}=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^{-2}}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{-1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{-2}{2}}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{-1}{4}}}$ **(2p)**
$=\frac{x^{\frac{2}{4}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{-4}{4}}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{3}{4}-\left(\frac{-4}{4}\right)+\frac{1}{4}}$ **(2p)**
$=x^{\frac{8}{4}}=x^2$ **(2p)**

4) **(6 pont)**
$\sqrt{64^{1-log_8 10}}+5^{log_{25}{}^{4}/_{100}}=\sqrt{\frac{64}{64^{log_8 10}}}+\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{log_{25}{}^{4}/_{100}}$ **(2p)**
$=\frac{8}{\sqrt{8^{2log_8 10}}}+25^{\frac{1}{2}log_{25}{}^{4}/_{100}}=\frac{8}{\sqrt{8^{log_8 100}}}+25^{log_{25}{}^{2}/_{10}}$ **(2p)**
$=\frac{8}{\sqrt{100}}+\frac{2}{10}=\frac{8}{10}+\frac{2}{10}=1$ **(2p)**

5) (6 pont)

$Anikó = \frac{1}{x}$ $Bendegúz = \frac{1}{2x}$ **(2p)**

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$ **(1p)**

$\rightarrow \frac{4}{x} + \frac{4}{2x} = 1 \rightarrow \frac{4}{x} + \frac{2}{x} = 1 \rightarrow 4 + 2 = 1x \rightarrow x = 6$ **(2p)**

Anikónak 6 óra kell, Bendegúznak pedig 12 óra kell. **(1p)**

6) (6 pont)

Teljes négyzetté alakítással:

$f(x) = -4x^2 + 12x - 7 = -4\left(x^2 - 3x + \frac{7}{4}\right) = -4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{7}{4}\right)$

(2p)

$= -4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{2}{4}\right) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$ **(1p)**

f-nek maximuma van a $\frac{3}{2}$-nél, és a maximum értéke $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$ **(2+1p)**

7) (6 pont)

Az egyenletnek pontosan akkor van két valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív, tehát $D > 0$. **(1p)**

$D = -p^2 - 4(3p - 5) = p^2 - 12p + 20$ **(1+1p)**

E másodfokú polinom gyökei $p_1 = 10$ és $p_2 = 2$ **(1p)**

$D = (p - 2)(p - 10) > 0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $p < 2$ vagy $p > 10$ **(2p)**

8) (7 pont)

$\frac{x^2+5x-6}{x-2} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(x+6)(x-1)}{x-2} \geq 0$ **(1p)**

A számláló előjele: $-6 < x < 1$ esetén negatív, $x > 1$ vagy $x < -6$ esetén pozitív **(2p)**

A nevező előjele: $x < 2$ esetén negatív, $x > 2$ esetén pozitív. **(1p)**

A tört nulla, ha: $x = -6$ vagy, $x = 1$ **(1p)**

Így az egyenlőtlenség megoldása $-6 \leq x \leq 1$ vagy $x > 2$ **(2p)**

(Ha az intervallumok jók, de a végpontok nem akkor -1 pont)