Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Mérnök informatikus szak
2010. január 15.
Megoldás

1. A_i : az i-edik játékhoz 1 db új, és 2 db használt labdát veszünk ki, $i = 1, 2, 3$.

   A kérdezett valószínűség: $\mathbf{P}(A_1 A_2 A_3)$ (1 pont)

   A szorzási szabályt használva:
   $\mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2)$ (3 pont)

   $\mathbf{P}(A_1) = \frac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}}$ (2 pont)

   $\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{7}{2}}{\binom{15}{3}}$ (2 pont)

   $\mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{\binom{7}{1}\binom{8}{2}}{\binom{15}{3}}$ (2 pont)

2. $F_X(x) = 1 - e^{-2t}, t > 0$ (1 pont)

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(3X^2 < t\right) && \text{(1 pont)} \\ &= \mathbf{P}\left(X < \sqrt{\frac{t}{3}}\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{t}{3}}\right) && \text{(1 pont)} \\ &= 1 - e^{-2\sqrt{\frac{t}{3}}} \end{aligned}$$

   $f_Y(t) = \left(1 - e^{-2\sqrt{\frac{t}{3}}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{3t}} e^{-2\sqrt{\frac{t}{3}}}$ (1-1 pont)
   ha $t > 0$, különben 0. (1 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}\left(3X^2\right) = 3\mathbf{E}\left(X^2\right) = 3\left(\boldsymbol{\sigma^2} X + (\mathbf{E}X)^2\right) && \text{(2 pont)} \\ &= 3\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) && \text{(2 pont)} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   /**vagy** a várható értékre másképp $\mathbf{E}(Y) = \int t f_Y(t)dt$ (2 pont) = ... (2 pont)/

3. $\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X - Y < 0)$ (1 pont)

   Felhasználva, hogy független normálisok összege és különbsége is normális eloszlású, $X - Y$ is normális eloszlású lesz. (2 pont)

A paraméterek:
$\mathbf{E}(X-Y)=\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(Y)=1$ (1 pont)
Mivel függetlenek: (1 pont)
$\sigma^{\mathbf{2}}(X-Y)=\sigma^{\mathbf{2}}(X)+\sigma^{\mathbf{2}}(Y)=13$ (1 pont)
Tehát $X-Y\in N\left(1,\sqrt{13}\right)$.
Így

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X<Y) &= \mathbf{P}(X-Y<0)=F_{X-Y}(0) \qquad \text{(1 pont)}\\ &= \Phi\left(\frac{0-1}{\sqrt{13}}\right) \qquad \text{(2 pont)}\\ &= 1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \qquad \text{(1 pont)}\end{aligned}$$

4. Hárommal oszthatót úgy dobhatunk, ha vagy hatost, vagy hármast dobunk, ezért $Y=X+Z$, ahol Z a 3-as dobások száma. (2 pont)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y\mid X) &= \mathbf{E}(X+Z\mid X)=\mathbf{E}(X\mid X)+\mathbf{E}(Z\mid X) \qquad \text{(1 pont)}\\ &= X+\mathbf{E}(Z\mid X) \qquad \text{(2 pont)}\end{aligned}$$

$Z\in B\left(10-i,\frac{1}{5}\right)$, ha $X=i$, (2 pont)
hiszen a $10-i$ nem hatos dobásnál mindig $\frac{1}{5}$ az esélye a hármasnak.
Ezért $\mathbf{E}(Z\mid X=i)=(10-i)\frac{1}{5}$ (1 pont)
és így $\mathbf{E}(Y\mid X)=X+(10-X)\frac{1}{5}=\frac{10+4X}{5}$. (2 pont)

5. A υ paraméter egy T becslése torzítatlan, ha $\mathbf{E}(T)=\upsilon$. (1 pont)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T_1) &= 2\mathbf{E}\left(\overline{X}_n\right)=2\mathbf{E}(X_i) \qquad \text{(1 pont)}\\ &= 2\frac{\upsilon}{2}=\upsilon \qquad \text{(1 pont)}\end{aligned}$$

tehát T_1 torzítatlan.
Mivel $X_n^*=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$, ezért
$F_{X_n^*}(t)=(F_{X_i}(t))^n=\left(\frac{t}{\upsilon}\right)^n$ (2 pont)
Deriválva: $f_{X_n^*}(t)=n\left(\frac{t}{\upsilon}\right)^{n-1}\frac{1}{\upsilon}$ (1 pont)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n^*) &= \int_0^\upsilon t f_{X_n^*}(t)dt=\int_0^\upsilon n\left(\frac{t}{\upsilon}\right)^n dt\\ &= n\left[\frac{1}{n+1}\upsilon\left(\frac{t}{\upsilon}\right)^{n+1}\right]_0^\upsilon=\frac{n}{n+1}\upsilon\end{aligned}$$

(2 pont)

$\mathbf{E}(T_2) = \frac{n+1}{n}\mathbf{E}(X_n^*) = v$, tehát T_1 torzítatlan.

Egy T becslés hatásosabb egy T' becslésnél, ha kisebb a szórása. (2 pont)

6. Egyenlőtlenség helyesen (5 pont)

   bizonyítás (5 pont)