3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal   2006/07 A3

1. Oldja meg az $y'(x) + x^3 y^2(x) = 0$, $y(0) = 4$ kezdeti érték problémát!
MO. Szeparábilis: $\int \frac{dy}{y^2} = -\int x^3\, dx \rightsquigarrow \frac{1}{y(x)} = \frac{x^4}{4} + c \rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{\frac{x^4}{4}+c} \rightsquigarrow y(x) = \frac{4}{x^4+c}$. Ezzel
$4 = y(0) = \frac{4}{0+c} \rightsquigarrow c = 1 \rightsquigarrow y(x) = \frac{4}{1+x^4}$.

---

2. Határozza meg az $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{4x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!
MO. **(1)** A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda = 2$, így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_{hA}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. **(2)** Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = Ae^{4x}$ alakban keressük (általában, ha az inhomogenitás $e^{ax}(p(x)\sin bx + q(x)\cos bx)$ alakú, akkor a megoldást $x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx)$ alakban keressük, ahol $P(x)$ és $Q(x)$ a $p(x)$ és $q(x)$ polinomok fokszáma közül a nagyobb fokszámúval megegyező fokszámú határozatlan együtthatós polinom és m az $a + bj$ multiplicitása a karakterisztikus egyenletre vonatkoztatva. Itt most $a = 4$, $b = 0$, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, így, mivel az $a + bj = 4$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, $m = 0$, azaz $x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx) = e^{4x} A$). Ezzel tehát $y = Ae^{4x}$, $y' = 4Ae^{4x}$, $y'' = 16Ae^{4x}$, amit az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $e^{4x}A(16 - 16 + 4) = e^{4x}$. Ebből $A = \frac{1}{4}$, tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása $y_{ip} = \frac{1}{4}e^{4x}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iA} = y_{hA} + y_{ip} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{4x}$.

---

3. Legyen $m > 0$, és K a háromdimenziós térben az a $z = m$ síkban elhelyezkedő R sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyen van. Számítsa ki a $v(r) = r$ $(r \in \mathbb{R}^3)$ vektor–vektor függvény felületmenti integrálját K-n!

MO. Legyen $n = k$ a körlap normálisa, v_n pedig v–nek n–re eső vetülete. Ekkor a körlapon mindenütt $v_n = m$ így $\int_K v\, df = \int_K v_n\, |df| = \int_K m\, |df| = m \int_K |df| = m \cdot R^2\pi = R^2 m\pi$. (Jelölések: $\int_F v\, df$ a v felületmenti, $\int_F v\, |df|$ a v felszín szerinti integrálja, és felhasználtuk, hogy $\int_F v\, df = \int_F v_n\, |df|$.)

VAGY: a körlap egyenlete: $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m)$, $(u \in [0,R],\ v \in [0,2\pi]) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow r_u \times r_v = (0,0,u)$, $v(r(u,v)) = r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow v(r(u,v)) \cdot r_u \times r_v = m\,u \rightsquigarrow \int_K r\, df = \int_0^R \int_0^{2\pi} m\, u\, dv\, du = m\, 2\pi \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^R = m\, 2\pi \frac{R^2}{2} = R^2 m\pi.$$

---

4. Legyen $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $g(0,0) = 0$, továbbá $f(z) = f(x+jy) = g(x,y) + jg(x,y)$.
Állapítsa meg, hogy az origóban: **a)** fennállnak–e a Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek **b)** deriválható-e az f függvény!

MO. **a)** Igen: $u(x,y) = v(x,y) = g(x,y) \rightsquigarrow u(0,y) = u(x,0) = v(0,y) = v(x,0) = 0 \rightsquigarrow u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$. **b)** Nem: $u(x,y) = v(x,y) = g(x,y)$ nem deriválható az origóban, hiszen nem is folytonos itt: $\lim_{x\to 0} g(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 0} g(x,0)$.

---

5. Adja meg az $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ függvény $z = 1$ és $z = 0$ körüli összes Laurent sorát!
MO.

(a) $z = 1$: $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z \neq 1$ **(b)** $z = 0$: **(1)** $f(z) = \dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{n+1}}$, $|z| > 1$

6.
(a) Mit nevezünk integráló tényezőnek/multiplikátornak?
(b) Mit neveznk egy tenzor/lineáris operátor skalárinvariánsának?
(c) Mit nevezünk egy komplex függvény izolált szinguláris pontjának?

MO. **(a)** Ha egy $g(x,y(x)) + y'(x)h(x,y(x)) = 0$ alakú diff. egyenlet nem egzakt, de a $\mu(x,y)g(x,y(x)) + y'(x)\mu(x,y)h(x,y(x)) = 0$ már az, akkor a $\mu(x,y)$-t integráló tényezőnek hívjuk.
(b) A tenzor valamely (bármely) bázisbeli mátrixának főátlójában szereplő számok összege a tenzor skalárinvariánsa (mely bázisfüggetlen mennyiség).
(c) Ha a függvény z_0-ban nem reguláris és van olyan környezete, hogy abban a függvény z_0 kivételével már reguláris, akkor z_0 a függvény izolált szinguláris pontja.