

VIIIAB05 - Szabályozástechnika

Tranziensek, szabályozási kör stabilitása

Kiss Bálint

Irányítástechnika és Informatika Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. február 23.



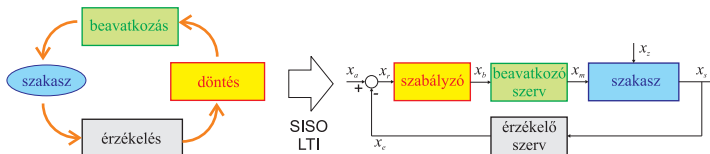
Az előző két előadás nyomán

a hallgató

- 1 képes megfogalmazni a szabályozástechnika vizsgálódásainak tárgyát és elmagyarázni alapfogalmait,
- 2 ismeri a szabályozási kör elemeit,
- 3 ismeri a szabályozási körök osztályozásának egyes szempontjait és minőségi jellemzőit,
- 4 átlátja, milyen módon kapható meg egy szakasz átviteli függvénye,
- 5 képes meghatározni egy átviteli függvény erősítését és típusszámát
- 6 képes meghatározni a statikus pontosságot és a zavarelnyomást a körerősítés és a kör típuszáma alapján,



Az előző két előadás nyomán

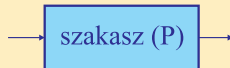


Szabályzó átvitele



$$W_C(s) = \frac{K_C}{s^{i_C}} W_{C1}(s)$$

Szakasz átvitele



$$W_P(s) = \frac{K_P}{s^{i_P}} W_{P1}(s)$$

Hurokátvitel

$$W_o(s) = W_C(s)W_P(s) = \frac{K_C K_P}{s^{i_C} s^{i_P}} W_{C1}(s)W_{P1}(s) = \frac{K}{s^i} W_{o1}(s)$$



Az előző két előadás nyomán

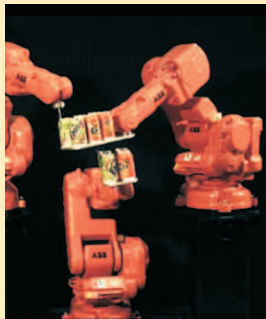
Szakasz átvitelének meghatározása

- 1 Fizikai törvényszerűségek alapján, differenciálegyenletekből
- 2 Be és kimenetek méréseiből, illesztéssel

Példa: DC motor átvitele

- 1 bemenet: feszültség a motor kapcsain
- 2 kimenet: motor tengelyének szögelfordulása
- 3 Villamos egyenlet a forgó rész tekercselésére
- 4 Mechanikai egyenlet a forgó inerciára

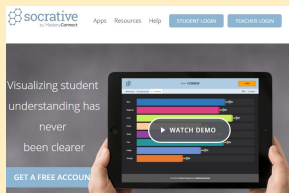
Alkalmazás: robot egyik csuklójának átvitele



Robot tengelyek koordinált mozgása

Quiz (előző részekből)

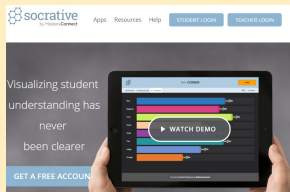
A www.socrative.com használatával



Room name: **SZABTECH**

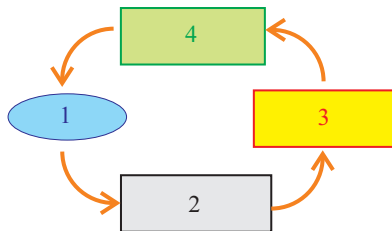
Quiz (előző részekből)

A www.socrative.com használatával



STUDENT LOGIN

Room name: **SZABTECH**



1. kérdés: az irányítási hurok elemei

- A. 1:szakasz 3:beavatkozás 2:döntés 4:érzékelés
- B. 1:beavatkozás 2:döntés 3: szakasz 4:érzékelés
- C. 1:érzékelés 2:szakasz 3:döntés 4:beavatkozás
- D. 1:szakasz 2:érzékelés 3:döntés 4:bevatakozás

Quiz (ismétlő)

Adottak az alábbi átviteli függvények

$$W(s) = \frac{3}{s+6} \quad W(s) = \frac{2s^2 + 3s + 10}{0,5s^2 + s + 2} \quad W(s) = \frac{1}{100s^2 + 10s + 1}$$

Az ugrásválaszok (átmeneti függvények) tulajdonságait vizsgáljuk. A kezdeti állapotok nullák.

2. kérdés: Mely állítások igazak?

- A. A **kék** átviteli függvénynél a végérték 3.
- B. A **zöld** átviteli függvénynél a kezdeti érték 0,01.
- C. A **zöld** kéttárolós lengő tag csillapítása 0,5.
- D. A **kék** egytárolós tag időállandója 1.
- E. A **piros** átviteli függvénynél a kezdeti érték 4.



Quiz (ismétlő)

Adottak az alábbi átviteli függvények

$$W(s) = \frac{3}{s+6} \quad W(s) = \frac{2s^2 + 3s + 10}{0,5s^2 + s + 2} \quad W(s) = \frac{1}{100s^2 + 10s + 1}$$

Az ugrásválaszok (átmeneti függvények) tulajdonságait vizsgáljuk. A kezdeti állapotok nullák.

2. kérdés: Mely állítások igazak?

- A. A **kék** átviteli függvénynél a végérték 3. **HAMIS** (0,5)
- B. A **zöld** átviteli függvénynél a kezdeti érték 0,01. **HAMIS** (0)
- C. A **zöld** kéttárolós lengő tag csillapítása 0,5. **IGAZ**
- D. A **kék** egytárolós tag időállandója 1. **HAMIS** (1/6)
- E. A **piros** átviteli függvénynél a kezdeti érték 4. **IGAZ**



Quiz (előző részekből)



Drebbel



Airy



Watt



Hurwitz



Nyquist



Shannon

Quiz (előző részekből)



Drebbel



Airy



Watt



Hurwitz



Nyquist

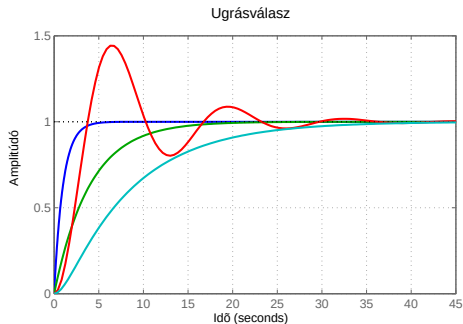


Shannon

3. kérdés: Melyikük lányának férjéhez fűződik stabilitási kritérium?

- A. Claude Shannon
- B. James Watt
- C. Egyik sem
- D. Cornelis Drebbel
- E. Sir George Airy
- F. Mindegyik

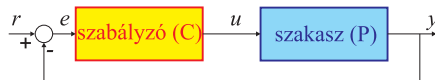
Quiz (előző részekből)



4. kérdés: Melyik zárt körű transziensnél legkisebb az IAE?

- A. Piros
- B. Zöld
- C. Kék
- D. Ciánkék

Quiz - előző részekből



Kérdés

Adott egy szabályozási kör az alábbi átviteli függvényekkel

$$W_C(s) = \frac{3}{4} \frac{4s + 1}{s + 1} \quad W_P(s) = \frac{2}{s} \frac{2}{4s + 1}$$

Igaz-e az alábbi állítás: a szakasz bemenetén ható egységugrás zavarás esetén a maradó hiba 0.

A harmadik előadás célja

A hallgató

- 1 átlátja a szabályozási kör tranzienseit befolyásoló tényezőket
- 2 tisztában van a szabályozási kör stabilitásának jelentőségével,
- 3 ismeri az argumentum elvből levezethető Nyquist-kritériumot és az abból adódó Bode-kritériumot,
- 4 ismeri vágási frekvencia és a fázistartalék definícióját és kapcsolatukat a stabilitással,
- 5 ismeri az algebrai Hurwitz-kritériumot.

Tartalom

- 1 A tranziensek
 - Pólus-zérus elrendezés
 - Gyökhelygörbe
- 2 A stabilitás fogalma
- 3 Kritériumok
 - A Nyquist-kritérium
 - A Bode-kritérium
 - A Hurwitz-kritérium



Tranziensek

Pólusok és tranziensek

A tranziensek minőségét a pólusok határozzák meg. A pólusok a

$$1 + W_o(s) = 0$$

$$s^i Q_{o1}(s) + K P_{o1}(s) = 0$$

egyenletek megoldásai. (Itt $P_{o1}(s)$ a $W_{o1}(s)$ átviteli függvény számlálója, $Q_{o1}(s)$ pedig a nevezője.)

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy $K = 0$ esetén a gyökök a felnyitott kör átvitelének ($W_o(s)$) pólusai és $K = \infty$ esetén a gyökök a felnyitott kör átvitelének ($W_o(s)$) zérusai.



Tranziensek vizsgálata

Eszközök

- 1 Pólus-zérus elrendezés (**pole-zero map**)
- 2 Gyökhelygörbe (**Root locus**)
- 3 Nyquist-diagram és Bode-diagram (**Nyquist plot and Bode plot**)



Hendrik Bode
(1905-1982)



Harry Nyquist
(1889-1976)



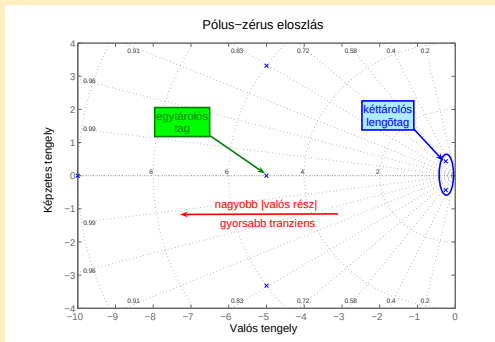
Tartalom

- 1 A tranziensek
 - Pólus-zérus elrendezés
 - Gyökhelygörbe
- 2 A stabilitás fogalma
- 3 Kritériumok
 - A Nyquist-kritérium
 - A Bode-kritérium
 - A Hurwitz-kritérium



Pólus-zérus elrendezés

W_{yu} pólusai és zérusai



Megjegyzés

Az átviteli függvény egytárolós és kéttárolós tagok kombinációja.



Tranziensek

Valós pólusokhoz tartozó tranziens - egytárolós tag

$$v_{egytarolos}(t) = 1 - e^{-t/T}$$

(egységugrás bemenet mellett)

Póluspárokhoz tartozó tranziens - kéttárolós lengőtag

$$v_{kettarolos}(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi)$$

(egységugrás bemenet mellett)

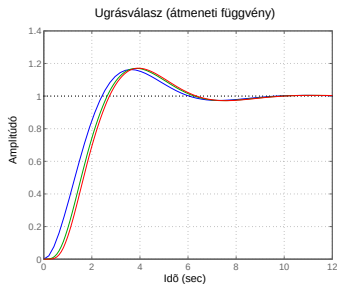
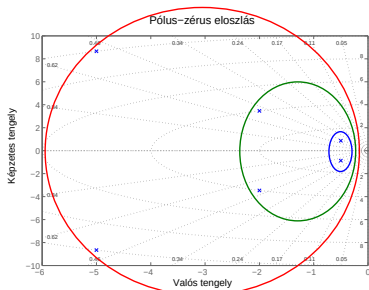
Eredő tranziens

Az egytárolós és kéttárolós tagokhoz tartozó tranziensek lineáris kombinációja. (Minden pólus szigorúan a bal félsíkon, egyszeres multiplicitással.)

Domináns póluspár

Melyik póluscsoporthoz tartozó tranziens a leginkább meghatározó?

A leglassúbbé a leginkább meghatározó, domináns (hiszen a többi tranziens gyorsabban lejár szódik). A leglassúbb póluspár van a legközelebb a képzetes tengelyhez.



Közelítés domináns póluspárral

A közelítés elve

Egységugrás bemenet mellett a zárt kör tranziense jól közelíthető a domináns póluspárhoz tartozó tranzienssel. A tranziens minőségét viszont a T és ξ paraméterekből számolni tudjuk.

Túllövés

$$\Delta v = \exp \left(\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

Első maximum és a beállási (2%) idők

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad T_{2\%} = \ln \frac{50}{\xi \omega_0}$$



Tartalom

- 1 A tranziensek
 - Pólus-zérus elrendezés
 - Gyökhelygörbe
- 2 A stabilitás fogalma
- 3 Kritériumok
 - A Nyquist-kritérium
 - A Bode-kritérium
 - A Hurwitz-kritérium

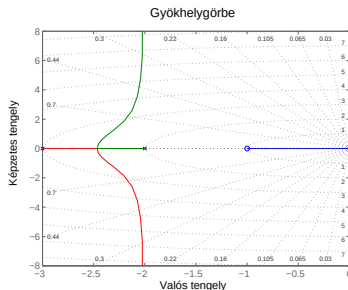


Gyök helygörbe

Leírás

A zárt kör pólusainak vándorlása a komplex síkon a K körerősítés változtatásával (pozitív K -ra, $0 < K < \infty$).

$$s^i Q_{o1}(s) + K P_{o1}(s) = 0$$



Gyök helygörbe tulajdonságai

Legyen $W_o(s)$ számlálójának fokszáma m és nevezőjének fokszáma n .

- ① Mivel az átviteli függvény együtthatói valósak, a gyök helygörbe szimmetrikus a valós tengelyre.
- ② Ágainak száma megegyezik $W_o(s)$ nevezőjének fokszámaival (n).
- ③ Végtelenbe tartó ágainak száma megegyezik a nevező és a számláló fokszámainak különbségével ($n - m$).
- ④ Végtelenbe tartó ágak aszimptotái egy pontban metszik egymást:

$$\sigma_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Re } p_i - \sum_{i=1}^m \text{Re } z_i}{n - m}.$$
- ⑤ A végtelenbe tartó aszimptoták valós tengellyel bezárt szögei:

$$\theta_i = \frac{2i+1}{n-m} 180^\circ.$$
- ⑥ A valós tengely egy a pontja a gyök helygörbe egy ágának pontja, ha a tőle jobbra eső valós pólusok és zérusok száma páratlan.



Lineáris rendszerek stabilitása

Fogalom

A rendszer válasza ($y(t)$) korlátos marad minden véges kezdeti feltételre és korlátos bemenetre ($u(t)$).

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad x_0 = x(0)$$

Zéro bementi stabilitás - zero input stability

$y(t)$ korlátos tetszőleges x_0 ($\|x_0\| < \infty$) mellett, ha $u(t) \equiv 0$. Feltétel: nincs pólus a jobb félsíkon, az origóban és nincs többszörös pólus a képzetes tengelyen.

Zéro állapot stabilitás - zero state stability

$y(t)$ korlátos tetszőleges korlátos $u(t)$ mellett, ha $x_0 = 0$. Feltétel: nincs pólus a jobb félsíkon és a képzetes tengelyen.



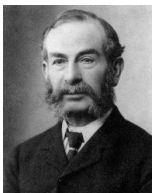
Stabilitás

Definíció

Egy lineáris időinvariáns, folytonos idejű rendszert **STABIL**nak mondunk, ha minden pólusa a komplex számsík bal félsíkjára esik.

A stabilitás jelentősége

Csak a stabil szabályozási körök bírnak gyakorlati jelentőséggel, ezért a stabilitás elsődleges elvárás a szabályozások tervezésekor.



Edward J. Routh



Adolf Hurwitz



Harry Nyquist



Hendrik W. Bode



Stabilitás bonyolultabb rendszereknél - rakéta

stabilitás, ha $v > v_{min}$

V2 kísérletek (2. VH.)



Stabilitásból következő tulajdonságok

Aszimptotikus sajátválasz

Stabil rendszert tetszőleges **nem nulla kezdeti feltételről** indítva a kimenet aszimptotikusan a nullához tart.

Korlátos válasz korlátos bemenetre

Stabil rendszer bemenetére korlátos jelet adva **nulla kezdeti értékek mellett** a kimenet korlátos.

Igazolás

Mindez adódik az

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

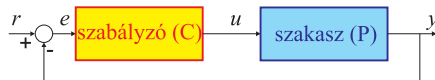
$$y = Cx + Du$$

állapotegyenlet megoldásából

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad x_0 = x(0)$$

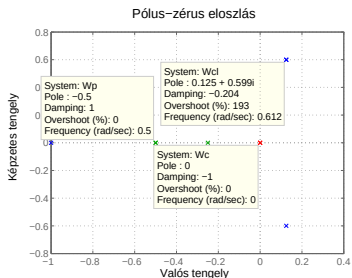


A stabilitás és a visszacsatolás



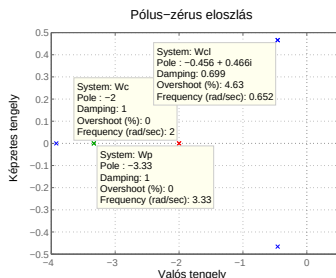
Stabil szakasz de labilis zárt kör

$$W_P(s) = \frac{1}{(2s+1)(4s+1)} \quad W_C(s) = \frac{3}{s}$$



Labilis szakasz de stabil zárt kör

$$W_P(s) = \frac{1}{(2s-1)(0.3s+1)} \quad W_C(s) = \frac{1.5}{0.5s+1}$$



Tartalom

- 1 A tranziensek
 - Pólus-zérus elrendezés
 - Gyökhelygörbe
- 2 A stabilitás fogalma
- 3 **Kritériumok**
 - **A Nyquist-kritérium**
 - A Bode-kritérium
 - A Hurwitz-kritérium



A Nyquist-kritérium

Használata

A felnyitott kör átviteli függvényének Nyquist-diagramja alapján következtetünk a zárt kör stabilitására.

Egy korábbi tétel a komplex analízis területéről

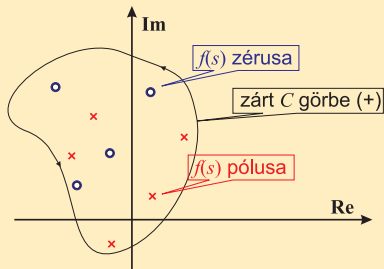
Argumentum elv: adott egy $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény és egy zárt, pozitív orientáltságú C görbe. Akkor C képe az f leképezés alatt pontosan annyszor veszi körbe a képsík origóját, amennyi az $f(s)$ függvény C görbe által bezárt zérusainak és pólusainak különbsége. Képlettel:

$$\oint_C \frac{f'(s)}{f(s)} ds = 2\pi i(Z - P) \quad \text{EKVSZ}(f(C), 0) = Z - P$$

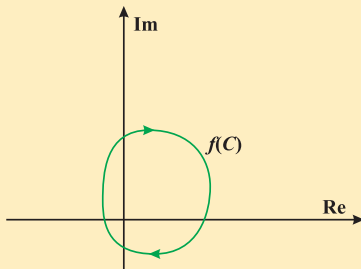


Az argumentum elv: illusztráció

f pólusai, zérusai és egy C görbe



C görbe képe



(Itt $Z-P=4-5=-1$, tehát $f(C)$ az óramutató járásával megegyező irányban egyszer veszi körbe az origót.)

A Nyquist-görbe

A Nyquist-görbe egy zárt görbe képe

Egy átviteli függvény Nyquist-görbéje a jobb félsíkot bezáró görbe képe az átviteli függvényre. Vigyázat: ez a görbe negatív irányítottságú.

A zárt kör pólusai

Legyen $W_o(s) = \frac{P_o(s)}{Q_o(s)}$. Legyen továbbá az argumentum elvben szereplő $f(s)$

$$f(s) = 1 + W_o(s) = 1 + \frac{P_o(s)}{Q_o(s)} = \frac{P_o(s) + Q_o(s)}{Q_o(s)}$$

Számlálójának gyökei a zárt rendszer pólusai.

Kérdés (stabilitás)

Van-e $f(s) = 1 + W_o(s)$ -nek zérusa a jobb félsíkon? (Ekkor ugyanis a zárt kör labilis.)

A zárt kör pólusai

Kiindulás

Ismert $W_o(s)$ és ismert a jobb félsíkon található pólusok száma ($Q_o(s)$ gyökeinek száma), ez legyen P .

Alkalmazzuk az argumentum elvet

$f(s) = 1 + W_o(s)$ Nyquist-görbéje annyiszor veszi körbe előjelesen az origót, amennyi $P - Z$ értéke, ahol Z a zárt kör labilis pólusainak száma, azaz $1 + W_o(s)$ zérusainak száma. Ha tehát $Z = 0$ (ez jelenti a stabilitást), akkor $f(s)$ Nyquist-görbéje pontosan P -szer veszi körbe az origót pozitív irányultsággal (óramutató járásával ellentétes irányban).

Kis kozmetika

Mivel $W_o(s) = f(s) - 1$, ezért ha $W_o(s)$ Nyquist-görbét tekintjük, akkor a **-1** körüljárását kell vizsgálnunk.

Nyquist-kritérium

Adott a felnyitott kör $W_o(s)$ átviteli függvénye, amelynek P pólusa van a jobb félsíkon. A zárt kör akkor és csak akkor stabil, ha $W_o(s)$ Nyquist-görbéje pontosan P -szer kerülje meg a komplex számsík -1 pontját az óramutató járásával ellentétes irányban.

Következmény (egyszerűsített Nyquist-kritérium)

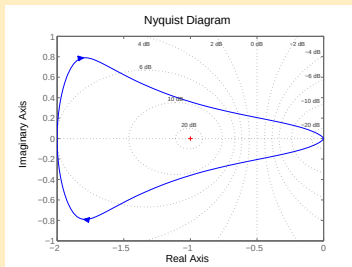
Ha a $W_o(s)$ felnyitott kör átviteli függvényének nincsen pólusa a jobb félsíkon, akkor a stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy $W_o(s)$ Nyquist-görbéje ne kerülje meg a -1 pontot.

Nyquist-kritérium - példa

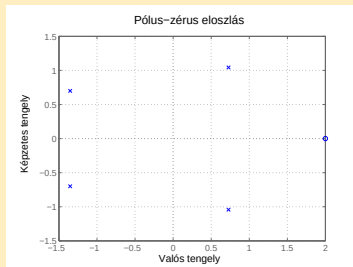
A vizsgált szabályozási kör

Legyen a felnyitott kör átviteli függvénye $W_o(s) = 3 \frac{s-2}{0,8s^4+s^3+0,8s+3}$

Stabil-e a zárt kör?



$W_o(s)$ Nyquist-diagrammja



$W_o(s)$ pólus-zérus eloszlása



Nyquist-kritérium - példa

$W_o(s)$ pólusai

Az ábráról leolvasható, hogy a felnyitott kör átviteli függvényének két pólusa van a jobb félsíkon, tehát $P = 2$.

A stabilitás feltétele

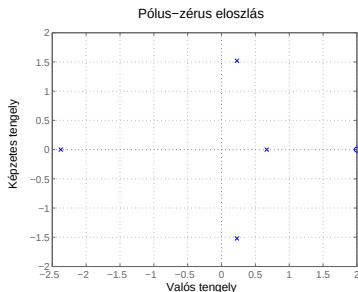
A stabilitás feltétele, hogy $W_o(s)$ Nyquist-görbéje a -1 pontot az óramutató járásával ellentétesen kétszer vegye körbe.

Labilis pólusok száma

$P - Z = -1$, tehát $Z = 3$.

Következtetés

A görbe a -1 pontot az óramutató járásával megegyező irányban veszi körbe, ezért a zárt kör labilis.



Egyszerűsített Nyquist-kritérium

Tegyük fel

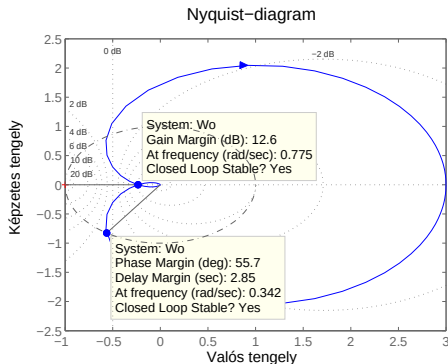
- 1 $W_o(s)$ -nek csak a bal félsíkon van pólusa és legfeljebb az origóban.
- 2 $W_o(s)$ Nyquist-görbéje egy ponton metszi az egységgörte.

Stabilitás jellemzése

- 1 fázistartalék: φ_m (phase margin)
- 2 erősítés tartalék G_m (gain margin)

Kérdés

Körerősítés hatása φ_m -re és G_m -re?



Egyszerűsített Nyquist-kritérium

Vágási frekvencia

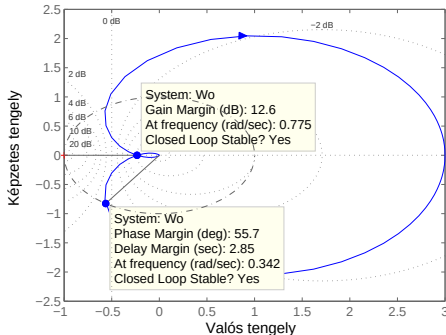
A (erősítés) vágási frekvencia (**gain crossover frequency**) az a frekvencia, ahol a Nyquist-görbe metszi az egységkört, azaz ahol a hurokerősítés egységnyi.

Kérdés

A fázis vágási frekvencia (**phase crossover frequency**) az a frekvencia, ahol a Nyquist-görbe eléri a negatív valós féltengelyt, azaz ahol a fázistolás $-\pi$.

$$W_o(s) = \frac{3}{(s+1)(3s+1)(5s+1)}$$

Nyquist-diagram



Tartalom

- 1 A tranziensek
 - Pólus-zérus elrendezés
 - Gyökhelygörbe
- 2 A stabilitás fogalma
- 3 **Kritériumok**
 - A Nyquist-kritérium
 - **A Bode-kritérium**
 - A Hurwitz-kritérium



Bode-kritérium

Használata

A felnyitott kör $W_o(s)$ átviteli függvényéből következtethetünk a zárt kör stabilitására, ha

- 1 $W_o(s)$ minden pólusa a bal félsíkon van (esetleg az origóban) és
- 2 nincs egynél több olyan körfrekvencia, hogy $\|W_o(j\omega_C)\| = 1$

Megjegyzés

A Bode-kritérium a Nyquist-kritérium speciális esete.

Megjegyzés

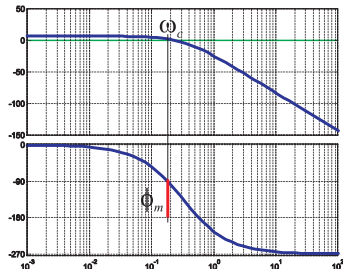
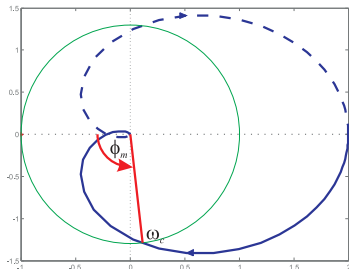
A Bode-diagramon az egységkört a $0dB$ tengely jeleníti meg és az (erősítés) vágási frekvencia (ω_C) az a frekvencia, ahol az amplitúdómenet metszi a $0dB$ tengelyt.



Bode-kritérium

Megjegyzés

Akkor nem vesszük körbe a -1 pontot, ha a görbe korábban már bekerült az egységkörön belülre, azaz a vágási frekvenciához -180° -nál nagyobb fázistolás tartozik.



$$\text{STABILITÁS} \Leftrightarrow \phi_m > 0 \quad (\phi_m = \pi + \varphi(\omega_c))$$



Tartalom

- 1 A tranziensek
 - Pólus-zérus elrendezés
 - Gyökhelygörbe
- 2 A stabilitás fogalma
- 3 **Kritériumok**
 - A Nyquist-kritérium
 - A Bode-kritérium
 - **A Hurwitz-kritérium**



A Hurwitz-kritérium

Használata

A zárt kör karakterisztikus egyenlete alapján következtetünk a zárt kör stabilitására.

Zárt kör karakterisztikus egyenlete

A szokásos jelöléssel

$$W_o(s) = \frac{P_o(s)}{Q_o(s)}$$

így a zárt kör pólusai a

$$P_o(s) + Q_o(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.



A Hurwitz-kritérium

Kérdés

Milyen feltételeket kell teljesíteniük az a_i együtthatóknak, hogy a karakterisztikus egyenlet minden gyöke a bal félsíkra essen?

- 1 Ha $\forall i \in (0, n)$ teljesül, hogy $a_i > 0$ és



A Hurwitz-kritérium

Kérdés

Milyen feltételeket kell teljesíteniük az a_i együtthatóknak, hogy a karakterisztikus egyenlet minden gyöke a bal félsíkra essen?

- ① Ha $\forall i \in (0, n)$ teljesül, hogy $a_i > 0$ és
- ② az alábbi $(n \times n)$ ún. Hurwitz-séma

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & \\
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \\
 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \\
 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \\
 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
 \end{array}$$

minden főátlóra támaszkodó aldeterminánsa pozitív

akkor $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ minden gyöke a bal félsíkra esik.

