**ANALÍZIS(1)** **VIZSGADOLGOZAT I. rész** **2003. jan. 3.**

Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (16 pont)**

a) Írja le a számsorozatokra vonatkozó rendőrelvet és bizonyítsa be!

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+8} = ?$

c) Igaz-e az alábbi állítás?

$$\sqrt[n]{n+8} \sim \sqrt[n]{n}$$

a.)

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_n \to A & \text{és} & a_n \le c_n \le b_n \\ b_n \to A & & \forall n \in \mathbb{N} \end{pmatrix} \implies (c_n \to A)}$$

B $N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$

Ha $n > N(\varepsilon)$ :

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad \text{és} \quad A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$$

$$\implies A - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < A + \varepsilon.$$

Tehát $c_n \to A$. ∎

b.)

$$1 < \sqrt[n]{n+8} \le \sqrt[n]{n+8n} = \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{9}}\ \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\implies} c_n = \sqrt[n]{n+8} \to 1$$

c.) Akkor igaz, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+8}}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Ez pedig igaz, mert $\sqrt[n]{n} \to 1$ (nevezetes sorozat) és az előbb beláttuk, hogy $\sqrt[n]{n+8} \to 1$.

**2. feladat (16 pont)**

Abszolut vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n^2+1}$$

A felhasznált, sorokkal kapcsolatos tételeket is írja le!

$\sum^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+1} = \sum^{\infty} c_n$ nem konvergens, mert

$c_n > \frac{3n}{n^2+n^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{n}$ és $\frac{3}{2}\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ div. $\underset{\text{minoráns krit.}}{\implies} \sum^{\infty} c_n$ div.

a 1030103/1

Tehát nem abszolut konvergens a sor. Viszont Leibniz típusú és így konvergens. Ugyanis

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n : \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \underbrace{\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\to 3} = 0$$

És $c_{n+1} \le c_n$ is teljesül, mert

$$\frac{3(n+1)+1}{(n+1)^2+1} \le \frac{3n+1}{n^2+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$(3n+4)(n^2+1) \le (3n+1)(n^2+2n+2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{3n^3}+3n+4n^2+4 \le \cancel{3n^3}+6n^2+6n+n^2+2n+2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le 3n^2+5n-2 = \underbrace{n(3n+5)}_{\ge 8}-2 \quad \text{igaz } \forall\, n\text{-re}$$

Tehát feltételesen konvergens a sor.

Minoráns kritérium:

(T) Ha $0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n$-re és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

Leibniz kritérium:

(T)

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \quad , \qquad c_n > 0$$

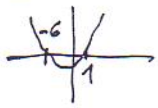
Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent $(c_n)$) monoton fogyóan tart 0-hoz ($c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

**3. feladat (15 pont)**

$$f(x) = e^{2x^3+15x^2-36x+2}$$

a) Keresse meg a függvény monotonitási intervallumait!
b) Hol van lokális szélsőértéke $f$-nek és milyen jellegű?
c) Van-e $f$-nek abszolut maximuma illetve minimuma a $[0,2]$ intervallumon? Ha igen, határozza meg!

a.) $f'(x) = e^{2x^3+15x^2-36x+2}(6x^2+30x-36) = \underbrace{e^{\cdots}}_{>0} \cdot 6 \cdot \underbrace{(x+6)(x-1)}$



| | $(-\infty,-6)$ | $-6$ | $(-6,1)$ | $1$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f$ | ↗ | lok. max | ↘ | lok. min. | ↗ |

$f$ mon. növő: $(-\infty, -6]$ ill. $[1, \infty)$ -en
$f$ mon. csökkenő: $[-6, 1]$ intervallumon.

b.) $x = -6$ -ban lok. maximum van
$x = 1$ -ben lok. minimum van

c.) $f$ folytonos $[0,2]$ -őn $\Rightarrow \exists$ minimuma és maximuma ezen az intervallumon

$f(0) = e^2$, $f(2) = e^6$ és $f(1) = e^{-17}$ jöhet szóba
$\Rightarrow$ min $= e^{-17}$ ; max $= e^6$

**4. feladat (9 pont)**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2-x}, & \text{ha } x > 2 \\ x \cdot \sin(\pi x - 2\pi), & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

a) $f'(x) = ?$

b) Írja fel az $f$ függvény $x_0 = \dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

a.) $f(2) \nexists \Rightarrow f'(2) \nexists$. Egyébként mindenütt deriválható:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2-x}\right)^2} \dfrac{-1}{(2-x)^2} (-1), & \text{ha } x > 2 \\ \sin(\pi x - 2\pi) + x \cdot \pi \cdot \cos(\pi x - 2\pi), & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

( $\sin(\pi x - 2\pi) = \sin \pi x$ miatt egyszerűbben is írható)

b.) $y_e = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

$y_e' = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = x$

**5. feladat (12 pont)***

a)

$$f(t) = \begin{cases} t^3, & \text{ha } t \in [0,1) \\ 1, & \text{ha } t \geq 1 \end{cases}$$

Határozza meg az $F(x)$ függvényt, ha

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{ha} \quad x \in I = (0, \infty)$$

Folytonos-e, differenciálható-e az $F$ függvény az $x_0 = 1$ pontban? $F'(x) = ?$

b) Írja le az integrálszámítás II. alaptételét!

a.) Ha $x \leq 1$: $F(x) = \int_0^x t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^x = \frac{x^4}{4}$

Ha $x > 1$: $F(x) = \int_0^1 t^3\,dt + \int_1^x 1\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 + t\Big|_1^x = \frac{1}{4} + x - 1$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{3}{4}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$K_{1,\delta}$-ban $f$ folytonos, ezért az integrálszámítás II. alaptétele értelmében $F$ folytonos és differenciálható $x = 1$-ben.

$F'(x) = f(x)$, ha $x > 0$

Az integrálszámítás II. alaptétele

b.) T

$$f \in R_{[a,b]}; \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

1. Az integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-ben.
2. Ha még $f$ folytonos is $x_0 \in (a,b)$-ben, akkor $F$ differenciálható $x_0$-ban és

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

an1 030103/4.

**6. feladat (12 pont)***

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dx = ?$

a.) $\dfrac{1}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1} \rightarrow 1 = A(x+1) + B(x-3)$

$x=-1:\ B=-\frac{1}{4}\ ;\ x=3:\ A=\frac{1}{4}$

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-3| - \ln|x+1|\right) + C$$

b.) $$\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_4^\omega \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\lim_{\omega\to\infty}\left(\ln|x-3| - \ln|x+1|\right)\Big|_4^\omega =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\omega\to\infty}\Big(\underbrace{\ln(\omega-3) - \ln(\omega+1)}_{\ln\frac{\omega-3}{\omega+1} = \ln\frac{1-3/\omega}{1+1/\omega} \to 0} - (\ln 1 - \ln 5)\Big) = \frac{\ln 5}{4}$$

**7. feladat (10 pont)***

$$\int_3^{10} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx = ?$$

$t = \sqrt[3]{x-2}$ helyettesítéssel dolgozzon!

$t = \sqrt[3]{x-2} \rightarrow x = t^3+2 \rightarrow dx = 3t^2\,dt$

$x=3:\ t=\sqrt[3]{1}=1\ ;\ x=10:\ t=\sqrt[3]{10-2}=2$

$$I = \int_1^2 \frac{(t^3+2)^2}{t}\,3t^2\,dt = \int_1^2 \underbrace{(t^6+4t^3+4)\cdot 3t}_{3t^7+12t^4+12t}\,dt =$$

$$= \left(3\frac{t^8}{8} + 12\frac{t^5}{5} + 12\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 3\cdot\frac{2^8}{8} + \frac{12}{5}2^5 + 6\cdot 2^2 - \left(\frac{3}{8} + \frac{12}{5} + 6\right)$$

**8. feladat (10 pont)***

a) $\displaystyle\int (x+4)\,e^{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int (x+4)\,e^{x^2+8x}\,dx = ?$

a.) $$\int (x+4)e^{3x}\,dx = (x+4)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$$

$u = x+4 \quad v' = e^{3x}$

$u' = 1 \quad v = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$= (x+4)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

an1 030103/5.

b.) $\frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+8)\, e^{x^2+8x}}_{f' e^f} dx = \frac{1}{2} e^{x^2+8x} + C$

*Pótfeladatok (csak az elégséges (indokolt! esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):*

**9. feladat (10 pont)**

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x} - 3x\right) = ?$

b) Írja fel az $f(x) = \sqrt{9x^2+2x}$ függvény lineáris aszimptotáját a $+\infty$-ben!

a.) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^2+2x-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x}+3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3} = \frac{1}{3}$

b.) $y_a = Ax + B$

$A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9+\frac{2}{x}} = 3$

$B = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x} - 3x\right) = \frac{1}{3}$

ℒ. a.)!

$y_a = 3x + \frac{1}{3}$

**10. feladat (10 pont)**

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sh} 3x)^{(1/\arcsin 2x)} = ?$$

$\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sh}3x)^{\frac{1}{\arcsin 2x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{\arcsin 2x}\ln(1+\operatorname{sh}3x)} = e^{3/2}$, mert

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sh}3x)}{\arcsin 2x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\operatorname{sh}3x}\operatorname{ch}3x \cdot 3}{\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2} = \frac{3}{2}$