ANALÍZIS 1. **II. ZÁRTHELYI** **2012. november 15.**
Mérnök informatikus szak β-variáns Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (8 pont)
A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{x\to 2+} \frac{3}{4x-8} = \infty.$$

Legyen $P > 0$.

$$\frac{3}{4x-8} =_{\mathbf{3p}} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2} > \mathbf{2p} P,$$

ha $0 < x - 2 < \frac{4}{3}P$, tehát $\delta(P) = \frac{4}{3}P$. (**3 pont**)

---

2. feladat (22 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arsh}(x-1)}{\arccos(x^5)}, \qquad b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(5x)}, \qquad c)\ \lim_{x\to 0+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

---

a) $\lim_{x\to 1-} \operatorname{arsh}(x-1) = \lim_{x\to 1-} \arccos(x^5) =_{\mathbf{3p}} 0$, így alkalmazható a l'Hospital szabály

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arsh}(x-1)}{\arccos(x^5)} \overset{\mathbf{3p}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(x-1)^2}}}{\frac{-5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{1-x^{10}}}{-5x^4\sqrt{1+(x-1)^2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} 0.$$

b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(5x)} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{5x}+e^{-5x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{7x}-e^{3x}}{e^{10x}+1} \overset{\mathbf{2p}}{=} 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)$ (**1 pont**), de

$$\lim_{0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} =_{\mathbf{3p}} \lim_{x\to 0} e^{\ln(\sin x)\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(\sin x)\operatorname{tg} x}.$$

A kitevőben lévő $0 \cdot \infty$ típusú határértékre alkalmazható a l'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to 0+} \ln(\sin x)\operatorname{tg} x \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x \cos x}{\sin x} = 0,$$

így $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$

3. feladat (15 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & \text{ha } x \in [0, \pi] \\ \\ \dfrac{\sin(4x)}{x}, & \text{ha } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

függvénynek?

A függvény folytonos függvények hányadosa, így csak $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ és $x = \pi$ pontokban van szakadása. (**4 pont**)

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin(4x)}{x} = 4 \lim_{x \to 0-} \frac{\sin(4x)}{4x} = 4,$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1,$$

így a függvénynek az $x = 0$ pontban véges ugrása van. (**4 pont**)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm} \frac{\sin x}{x \cos x} = \mp\infty,$$

így a függvénynek az $x = \frac{\pi}{2}$ pontban másodfajú szakadása van. (**4 pont**)

$$\lim_{x \to \pi-} f(x) = \lim_{x \to \pi-} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{tg} \pi}{\pi} = 0 = \frac{\sin(4\pi)}{\pi} = \lim_{x \to \pi+} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x \to \pi+} f(x),$$

így a függvénynek az $x = \pi$ pontban megszüntethető szakadása van. (**3 pont**)

---

4. feladat (18 pont)
Igazolja, hogy az

$$f(x) = \pi - 3 \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(2x) - 1)$$

függvény invertálható a teljes értelmezési tartományon, és adja meg az inverzfüggvényt, annak értelmezési tartományát, értékkészletét és deriváltját.

$f'(x) = -3\dfrac{2\,\mathrm{ch}\,x}{1+(\mathrm{sh}(2x)-1)^2} < 0$, ha $x \in D_f \overset{\mathbf{2p}}{=} \mathbb{R}$, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő, így invertálható (**4 pont**) (vagy mert szigorúan monoton függvények kompozíciója).

$$y = \pi - 3\,\mathrm{arctg}(\mathrm{sh}(2x)-1) \Leftrightarrow \frac{\pi - y}{3} = \mathrm{arctg}(\mathrm{sh}(2x)-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \mathrm{tg}\,\frac{\pi-y}{3} = \mathrm{sh}(2x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arsh}\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{\pi-y}{3}\right),$$

vagyis $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arsh}\left(1+\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi-x}{3}\right)$ (**4 pont**), ha $x \in R_f \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(\pi - 3\cdot\frac{\pi}{2}, \pi - 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, vagyis $D_{f^{-1}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right]$, $R_{f^{-1}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \mathbb{R}$, és

$$\left(f^{-1}\right)'(x) \overset{\mathbf{4p}}{=} \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi-x}{3}\right)}\cdot\frac{-1}{3}}{\sqrt{1+\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{\pi-x}{3}\right)^2}}.$$

---

5. feladat (11 pont)

Hol folytonos illetve differenciálható az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Írja fel a deriváltat, ahol létezik!

Az $x = 0$ ponton kívül a függvény differenciálható függvények kompozíciója és szorzata, vagyis differenciálható (**2 pont**), így folytonos is (**1 pont**). $x \neq 0$ esetén tehát

$$f'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, és a sin függvény korlátos, így a függvény folytonos az $x = 0$ pontban is, hiszen $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. (**2pont**)

A differenciálhányados definíciója alapján:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \overset{\mathbf{1p}}{=} 0,$$

vagyis f mindenhol differenciálható.

6. feladat (13 pont)
a) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

függvény monoton növő illetve monoton csökkenő.
b) Felveszi-e a függvény a minimumát a $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$ intervallumon? Ha igen, számolja ki a minimumot.

---

a) $D_f = (0, \infty)$, mert a nevező mindig pozitív.

$$f'(x) \stackrel{\mathbf{2p}}{=} \left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x}\right) e^{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{\mathbf{2p}}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x} > 0 \stackrel{\mathbf{2p}}{\Leftrightarrow} x > 1,$$

	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

3 pont

b) f folytonos függvények hányadosa, a nevező mindig pozitív, így alkalmazható a második Weierstrass tétel, mely szerint folytonos függvény korlátos és zárt intervallumon felveszi a minimumát, vagy a lokális minimumhelyen, vagy az intervallum határán (**2 pont**). A minimum értéke tehát:

$$\min\left(f\left(\frac{1}{4}\right), f(1), f(4)\right) = \min\left(2\sqrt{e}, e, \frac{e^2}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2 pont

---

7. feladat (13 pont)
Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

függvény konvex illetve konkáv.

---

a) $D_f = \mathbb{R}$, és

$$f''(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2)}\right)' \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cup$	infl.pont	$\cap$	infl.pont	$\cup$	infl.pont	$\cap$

7 pont

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (8 pont)
Számolja ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x-1-(x^2-x+1))}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Adja meg az

$$f(x) = \left(x^3+e^x\right)^{\operatorname{tg} x}$$

függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban.

$f(0) = 1$

$$f'(x) = \left(\left(x^3+e^x\right)^{\operatorname{tg} x}\right)' = \left(e^{\ln\left(x^3+e^x\right)\operatorname{tg} x}\right)' = \left(x^3+e^x\right)^{\operatorname{tg} x}\left(\ln\left(x^3+e^x\right)\operatorname{tg} x\right)' =$$

$$= \left(x^3+e^x\right)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}\operatorname{tg} x + \ln(x^3+e^x)\frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

így $f'(0) = 0$, tehát az érintő egyenlete $y = 1$.