1	2	3	4	5	6	$\sum$

FelsMatInf_AlkAlg 0. vizsga 18-12-18 Neptun: ____________ **Név:** ______________________________

A vizsga feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden papírlap jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 12.

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

a) Van-e értelme üres vektorhalmaz lineáris kombinációjáról beszélni, és ha igen, mit értünk rajta?

a $\mathbf{0}$-vektort

b) *(2 pont)* Tudjuk, hogy x és y között $y = ax^2+bx+c$ alakú kapcsolat van, keressük az együtthatókat, amihez $n > 3$ mérést végzünk, melyek eredményei az (x_i, y_i) számpárok $(i = 1, \dots, n)$. A mérések pontatlanságai miatt nem létezik mindegyiket kielégítő másodfokú polinom. Írjuk fel azt az egyenletrendszert, melynek megoldásaként az a, b, c együtthatókra a legjobb becslést kapjuk.

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

c) Mi az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének merőlegese ha $\mathbf{A}$ komplex mátrix?

$\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}})$

d) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ kongruens $\mathbf{B}$-vel, és $\mathbf{A}$ tehetetlensége $(3, 4, 5)$. Ismerjük-e $\mathbf{B}$ rangját, és ha igen, mennyi?

igen, 7 (= pozitív + negatív sajátértékek száma)

e) Adjunk meg egy olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$, ahol az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\operatorname{diag}(9, 4, 1, 0)\mathbf{C}^{-1}$.

$\mathbf{B} = \mathbf{C}\operatorname{diag}(3, 2, 1, 0)\mathbf{C}^{-1}$

f) *(2 pont)* Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ mátrix két sajátértéke 1 és 2, és mindkettőnek 4 az algebrai multiplicitása, de az 1-nek 3, a 2-nek 1 a geometriai multiplicitása. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A mellékelt ábrán kössük össze irányított éllel azokat a csúcsokat amelyekhez tartozó állítások közt implikáció ($\to$) vagy ekvivalencia ($\leftrightarrow$) van. *(4 pont)*

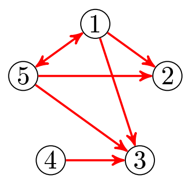
① $\mathbf{A}$ szimmetrikus

② $\mathbf{A}$ normális

③ $\mathbf{A}$ diagonalizálható

④ $\mathbf{A}$ sajátértékei különbözőek

⑤ $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható



3. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát, ahol *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 2-höz tartozó sajátaltér 1-dimenziós, így egyetlen J-blokk tartozik hozzá. (Az ált.s.v-hoz: keresünk egy vektort, amit $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ az $(1, 0, 0)$-ba, vagy amit $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2$ a $\mathbf{0}$-ba visz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{J-láncok: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, 2- és ∞-normáját! *(4 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 5$, $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

5. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris felbontását és annak felhasználásával a pszeudoinverzét! *(6 pont)*

$$\mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ vagy}$$

$$\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

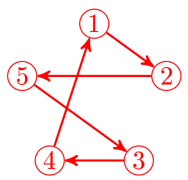
$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{U}^\mathsf{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Primitív-e az alábbi mátrix? (a választ indokoljuk néhány szóban és egy alkalmas gráffal) *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Irreducibilis, mert erősen összefüggő a gráfja (van Hamilton-köre), és a főátlójában van pozitív eleme, így primitív:



(Másként fogalmazva: bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni pontosan k-hosszú úton, ha k legalább 8, ugyanis a 2-es csúcsban lévő hurokélen (nincs berajzolva) el lehet időzni.)