Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. január 14.

1. Legyenek A és B események, melyekre .$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{3}{4}$ Mennyi annak a valószínűsége, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be?
Megoldás: A keresett valószínűség: $\mathbf{P}\left(\bar{A}B + A\bar{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) + \mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) = (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)) + (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A) - 2\mathbf{P}(AB)$,
$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B|A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$. Tehát $\mathbf{P}\left(\bar{A}B + A\bar{B}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

2. Legyenek $X \in G\left(\frac{1}{2}\right)$ és $Y \in G\left(\frac{1}{3}\right)$ függetlenek, $Z = 3X^2 - Y + 4$. Adja meg az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!
Megoldás: $\mathbf{E}(Z \mid X) = 3X^2 - \mathbf{E}Y + 4 = 3X^2 + 1$

3. Két üzemet közös raktárból látnak el nyersanyaggal. Az első üzem havonta $X \in N(150, 10)$ a másik üzem pedig az elsőtől függetlenül $Y \in N(210, 15)$ mennyiségű nyersanyagot használ fel. Mennyi legyen a nyersanyag a hónap elején a raktárban, hogy az a hónap végéig 99%-os biztonsággal fedezze a két üzem szükségletét?$(\Phi(2,34) = 0,99)$.
Megoldás: Jelöljük K-val a szükséges nyersanyagkészletet a hó elején. A két üzem által felhasznált összes nyersanyag $X+Y \in N\left(360, \sqrt{100+225}\right)$.
Teljesülnie kell a $\mathbf{P}(X + Y < K) = 0,99$ feltételnek. Ebből $\mathbf{P}(X + Y < K) = \Phi\left(\frac{K-360}{\sqrt{325}}\right) = 0,99 = \Phi(2,34)$, azaz $\frac{K-360}{\sqrt{325}} = 2,34$
$K = 2,34 \cdot \sqrt{325} + 360 \approx 402,185$

4. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ egy $E\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$ eloszlásból származó statisztikai minta. Igazoljuk, hogy az $T_1 = \overline{X}_n$ átlagstatisztika hatásosabb torzítatlan becslése a ϑ paraméternek, mint a $T_2 = n{\cdot}X_1^*$ statisztika, ahol $X_1^* = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.
Megoldás: A minta eloszlásfüggvénye:
$$F_\vartheta(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\vartheta}x}, x > 0.$$
Az X_1^* statisztika eloszlásfüggvénye:
$$F_1^*(x) = \mathbf{P}(X_1^* < x) = 1 - [1 - F_\vartheta(x)]^n = 1 - e^{-\frac{n}{\vartheta}x}, x > 0.$$
Tehát, $X_1^* \in E\left(\frac{n}{\vartheta}\right)$, amiből következik, hogy $\mathbf{E}X_1^* = \frac{\vartheta}{n} \Longrightarrow \mathbf{E}T_2 = n \cdot \frac{\vartheta}{n} = \vartheta$.
Mivel az átlagstatisztika a várhatóérték torzítatlan becslése, ezért $\mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}\overline{X}_n = \vartheta$.
Tehát mindkét statisztika torzítatlan becslése ϑ-nak. A statisztikák szórásnégyzetei:
$$\boldsymbol{\sigma}^2 T_2 = n^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 X_1^* = n^2 \cdot \frac{\vartheta^2}{n^2} = \vartheta^2,$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 T_1 = \boldsymbol{\sigma}^2 \overline{X}_n = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2 X_1}{n} = \frac{\vartheta^2}{n}.$$

Tehát a T_1 statisztika a hatásosabb torzítatlan becslés!

5. Egy dobozban 3 piros, 4 fehér és 2 zöld színű golyó van. Háromszor végrehajtunk ugyanazt kiválasztást: belenyúlunk a dobozba, kiveszünk egyszerre három golyót, és feljegyezzük a piros színű golyók számát. Ezután az újabb kiválasztás előtt visszatesszük a kivett golyókat a dobozba, és megkeverjük a tartalmat. Jelölje X_i az i-edik kiválasztáskor kapott piros színű golyók számát! *Adja meg $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ eloszlását.
   Megoldás: Az X_1, X_2, X_3 teljesen független, azonos eloszlásúak.
   $\mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{20}{84}, \mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{3\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{45}{84}, \mathbf{P}(X_i = 2) = \frac{3\binom{6}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{18}{84}, \mathbf{P}(X_i = 3) = \frac{1}{84}$
   $\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = \left(\frac{20}{84}\right)^3$
   $\mathbf{P}(Y = 1) = 3 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) + 3 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 3 \cdot \frac{45}{84} \cdot \left(\frac{20}{84}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{45}{84}\right)^2 \cdot \frac{20}{84} + \left(\frac{45}{84}\right)^3$
   $\mathbf{P}(Y = 2) = 3 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 0) + 6 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0) + 3 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1) + 3 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 0) + 3 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) + \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2) =$
   $3 \cdot \frac{18}{84} \cdot \left(\frac{20}{84}\right)^2 + 6 \cdot \frac{18}{84} \cdot \frac{45}{84} \cdot \frac{20}{84} + 3 \cdot \frac{18}{84} \cdot \left(\frac{45}{84}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{18}{84}\right)^2 \frac{20}{84} + 3 \cdot \left(\frac{18}{84}\right)^2 \frac{45}{84} + \left(\frac{18}{84}\right)^3.$
   Az utolsó eloszlásérték a komplemens-elv alapján számolható: $\mathbf{P}(Y = 3) = 1 - (\mathbf{P}(Y = 0) + \mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{P}(Y = 2))$.

6. Adja meg két változó esetében az együttes eloszlásfüggvény definícióját és tulajdonságait.
   Megoldás: $F_{X,Y}(u, v) = \mathbf{P}(X < u, Y < v), u, v \in \mathbb{R}$.
   a.) $F_{X,Y}$ mindkét változójában monoton nem csökkenő;
   b.) $F_{X,Y}$ mindkét változójában, minden pontban balról folytonos;
   c.) $\lim_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x, v) = \lim_{y \to -\infty} F_{X,Y}(u, y) = 0$ és $\lim_{xy \to -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$
   d.) Minden $a < b$ és $c < d$ esetén $F_{X,Y}(a, c) + F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) \geq 0$