A Számítástudomány alapjai

ELSŐ ZH pótlása 2012. XII. 12. 10^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Feladatok

1. Hányféleképpen lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán két-két világos és sötét futót, valamint két-két világos és sötét huszárt (összesen 8 figurát) úgy, hogy pontosan egy sötét és egy világos futó álljon világos mezőn? (Nem baj, ha a figurák esetleg ütésben állnak.)

2. Az n rekordot tartalmazó $A[1..n]$ rendezett tömbben valamelyik rekord megváltozott, de nem tudjuk, hogy melyik. Adjunk egy legfeljebb $2n$ összehasonlítást igénylő algoritmust a megváltozott tömb rendezésére.

3. Hányféleképpen lehet egy 5 méretű tömbbe úgy beleírni az $1, 2, 3, 4, 5$ rekordokat, hogy kupacot kapjunk?

4. Határozzuk meg, hogy a K_n teljes gráfnak hány C_4 részgráfja van. (Két részgráf akkor nem különbözik, ha csúcshalmazaik is **és** élhalmazaik is megegyeznek. A C_4 gráf a 4 pontú kör.)

5. Izomorfak-e a $(4, 4, 2, 2, 1, 5, 6, 1)$ ill. az $(5, 3, 3, 6, 1, 5, 6, 1)$ Prüfer-kódú fák?

6. Tegyük fel, hogy 386 politikus mindegyikére igaz, hogy a többiek közül pontosan annyit tekint nácinak, mint ahányan őróla ugyanezt gondolják. Tudjuk továbbá, hogy van olyan politikus, akit legalább egy társa nácinak mond. Igazoljuk, hogy létrehozható néhány (akár az összes) politikusból olyan bizottság, ami úgy ültethető le egy kerekasztalhoz, hogy mindenki nácinak tekinti a tőle jobbra ülőt.

Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs (2011.12.12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképpen lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán két-két világos és sötét futót, valamint két-két világos és sötét huszárt (összesen 8 figurát) úgy, hogy pontosan egy sötét és egy világos futó álljon világos mezőn? (Nem baj, ha a figurák esetleg ütésben állnak.)

   A világos mezőn álló világos futót 32-féleképp lehet elhelyezni, ezt követően a világos mezőn álló sötét futó számára 31 lehetséges hely marad, így e két futó elhelyezési lehetőségeinek száma $32 \cdot 31$. (2 pont)
   Hasonló okból ugyanennyi lehetőség van a sötét mezőn álló két futó lerakására is. (1 pont)
   A maradék 60 mezőn kell elhelyezni még két sötét és két világos huszárt. (1 pont)
   A világos huszárokat $\binom{60}{2}$-féleképp helyezhetjük el, (2 pont)
   ezt követően a sötét huszárok a fennmaradó 58 helyen $\binom{58}{2}$-féleképp rakhatók le (2 pont)
   Mivel a fenti módszerrel minden leszámlálandó állást pontosan egyszer számolunk meg, továbbá az egyes döntési lehetőségek száma független a korábbi választásainktól, a kérdezett szám pontosan $32 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 31 \cdot \binom{60}{2} \cdot \binom{58}{2} = 32^2 \cdot 31^2 \cdot \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57}{2 \cdot 2}$. (2 pont)

2. Az n rekordot tartalmazó $A[1..n]$ rendezett tömbben valamelyik rekord megváltozott, de nem tudjuk, hogy melyik. Adjunk egy legfeljebb $2n$ összehasonlítást igénylő algoritmust a megváltozott tömb rendezésére.

   Sorra összehasonlítjuk az $A(1) - A(2), A(2) - A(3), \ldots$ rekordokat. Ez összesen $n-1$ összehasonlítás. Ha $A(i) \leq A(i+1)$ teljesül minden i-re, akkor a tömbünk a változás után is rendezett maradt, így nincs szükség további összehasonlításra a rendezéshez. (3 pont)
   Ha azonban $A(i) > A(i+1)$, akkor vagy $A(i)$, vagy $A(i+1)$ változott. (2 pont)
   Ilyenkor beszúrjuk $A(i+1)$-et a tömb $A[1..i-1]$ részébe, amihez legfeljebb $i-1$ összehasonlítás kell, (2 pont)
   majd beszúrjuk $A(i)$-t a tömb $A[i+2..n]$ részébe, legfeljebb $n-(i+1) = n-i-1$ összehsonlítással. (2 pont)
   Világos, hogy a kapott tömb rendezett lesz, hisz $A(i)$ és $A(i+1)$ is a helyére kerül. Az elvégzett összehasonlítások száma pedig legfeljebb $n-1+i-1+n-i-1 = 2n-3$ volt. (1 pont)

   Mivel egyébként tömbről van szó, a két beszúrás jóval gyorsabban elvégezhető a lineáris keresésnél: $n + 2 \cdot \log_2 n$ összehasonlítás bőven elég a rendezésre.

3. Hányféleképpen lehet egy 5 méretű tömbbe úgy beleírni az $1, 2, 3, 4, 5$ rekordokat, hogy kupacot kapjunk?

   Legyen $A[1..5]$ a tömb. Világos, hogy $A(1) = 1$ hiszen ez a kupacban tárolt legkisebb rekord. (1 pont)
   A kupactulajdonságból még annyi következik, hogy az $A(2)$ rekord kisebb az $A(4)$ és $A(5)$-ben tároltnál, egyéb feltétele nincs annak, hogy kupac legyen a tömb. (2 pont)
   Ezért $A(2)$ csak 2 vagy 3 lehet. (1 pont)
   Ha $A(2) = 3$, akkor $A(4)$ és $A(5)$ a 4 és 5 értéket kapja, míg $A(3) = 2$ lesz, kizárásos alapon. (2 pont)
   Ez tehát 2 lehetőség. (1 pont)
   Ha pedig $A(2) = 2$, akkor az $A(3), A(4), A(5)$ helyre a $3, 4, 5$ rekordokat tetszőleges permutációban beírhatjuk, a kupactulajdonság teljesülni fog. (2 pont)
   Ekkor tehát $3! = 6$ lehetőségünk van a permutáció választására, (1 pont)
   a feladatbeli kérdésre a válasz tehát $2 + 6 = 8$. (1 pont)

4. Határozzuk meg, hogy a K_n teljes gráfnak hány C_4 részgráfja van. (Két részgráf akkor nem különbözik, ha csúcshalmazaik is **és** élhalmazaik is megegyeznek. A C_4 gráf a 4 pontú kör.)

   A vizsgált részgráfokat úgy számláljuk le, hogy kiválasztjuk a csúcsokat, majd a csúcsokhoz az éleket. (2 pont)
   A C_4 kör 4 csúcsát $\binom{n}{4}$-féleképpen választhatjuk ki K_n n csúcsa közül. (3 pont)
   Ha pedig már kiválasztottuk a részgráf 4 csúcsát, akkor a feszített 6 élből egy teljes párosítás éleit kell elhagyni, hogy egy kört kapjunk. A teljes párosítást meghatározza, hogy egy rögzített csúcsnak mi lesz a szomszédja. A szomszéd 3-féleképp választható, tehát 4 csúcson 3 teljes párosítás, így pontosan 3 db C_4 kör található. (4 pont)
   A K_n teljes gráfnak tehát pontosan $3 \cdot \binom{n}{4}$ db C_4 részgráfja van. (1 pont)

5. Izomorfak-e a $(4,4,2,2,1,5,6,1)$ ill. az $(5,3,3,6,1,5,6,1)$ Prüfer-kódú fák?

   Az órán olyat tanítottak, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs pontosan eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fabeli foka. (2 pont)
   Az első fának van másodfokú csúcsa (pl az 5-ös címkéjű), míg a másodiknak nincs ilyen, ezért a fák nem lehetnek izomorfak. (8 pont)

   Természetesen az is jó megoldás, ha vki dekódolja a fákat, és úgy mutatja meg, hogy azok nem izomorfak. Helyes dekódolásért $4-4$ pont jár, a nemizomorf tulajdonság megmutatásáért pedig 2.

6. Tegyük fel, hogy 386 politikus mindegyikére igaz, hogy a többiek közül pontosan annyit tekint nácinak, mint ahányan őróla ugyanezt gondolják. Tudjuk továbbá, hogy van olyan politikus, akit legalább egy társa nácinak mond. Igazoljuk, hogy létrehozható néhány (akár az összes) politikusból olyan bizottság, ami úgy ültethető le egy kerekasztalhoz, hogy mindenki nácinak tekinti a tőle jobbra ülőt.

   Legyenek a G irányított gráf csúcsai a politikusok, él pedig akkor fusson a-ból b-be, ha a nácinak tartja b-t. (1 pont)
   Azt tudjuk G-ről, hogy minden csúcsba ugyanannyi él fut, mint amennyi onnan kiindul, továbbá, hogy van olyan csúcs, amibe fut be él. (1 pont)
   Azt kell megmutatnunk G-ről, hogy tartalmaz irányított kört. (1 pont)
   Legyen v_0 olyan csúcs, amibe fut be él. Ekkor v_0-ból indul ki él a feltétel miatt, mondjuk v_1-be. Hasonló okból v_1-ből is indul él, mondjuk v_2-be, onnan v_3-ba, és így tovább. (3 pont)
   Mivel G véges gráf, előbb-utóbb lesz olyan csúcs, ami már korábban is szerepelt: $v_{i+k} = v_i$. (2 pont)
   Ekkor $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+k-1}$ irányított kör lesz G-ben, nekünk pedig pontosan ennek a létezését kellett igazolnunk.

   Természetesen a feladat tökéletesen megoldható G bevezetése nélkül is, de ha valaki csak átfogalmazza gráfokra a feladványt, már azért is jár pont.