Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. március 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van (pontosan) 4 hosszú kör.

* * * * *

Mivel a gráf egyszerű és minden pont foka legalább a csúcsszám fele, ezért Dirac tétele miatt a gráfban van Hamilton-kör. (2 pont)
Rögzítsünk egy C Hamilton-kört, ekkor a gráf további (C-hez nem tartozó) éleit tekinhetjük C átlóinak. Ezeket nevezzük „rövid", „közepes", vagy „hosszú" átlónak aszerint, hogy C mentén 1, 2, vagy 3 közbülső csúcsot ugranak át (C rövidebbik ívén vizsgálva).
Ha az átlók közt van közepes, akkor a két végpontja között futó (rövidebbik) ív C mentén az átlóval együtt 4 hosszú kört alkot. (2 pont)
A továbbiakban feltehetjük, hogy nincs közepes átló. Ha van viszont egy $\{u, v\}$ hosszú átló, akkor u-ból legalább egy további élnek kell indulnia ($\{u, v\}$-n és C élein kívül), ami tehát csak egy $\{u, w\}$ rövid átló lehet. Most C-nek a v és w közötti (egyetlen) további csúcsát z-vel jelölve megint 4 hosszú kört kapunk az u, v, z és w csúcsokat (ebben a sorrendben) bejárva. (3 pont)
A visszamaradó egyetlen eset az, amikor minden átló rövid. Ekkor viszont minden csúcshoz pontosan két rövid átló illeszkedik, így bármely csúcsból indulva és pontosan 4 rövid átlót bejárva megint 4 hosszú kört kapunk. (3 pont)

2. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges, vagyis bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legföljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha a bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legföljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban?

* * * * *

A G gráf csúcshalmaza álljon a 31 hangból és két különböző hang akkor legyen szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha legalább az egyikük magánhangzó. (2 pont)

Ekkor egy, a feladat szövegének megfelelő hangsor nem más, mint egy olyan G-beli élsorozat, amelyben minden él legfeljebb egyszer szerepelhet. (2 pont)

G-ben a magánhangzók foka 30 (mert minden más csúccsal szomszédosak), a mássalhangzóké 10 (mert a 10 magánhangzóval szomszédosak). (1 pont)

G nyilván összefüggő, hiszen csak a mássalhangzó párok nem szomszédosak, de köztük is bármely magánhangzón át vezet 2 hosszú út. (1 pont)

G összefüggő és minden pont foka páros, ezért van benne Euler-kör. (2 pont)

Mivel egy Euler-kör G minden élét tartalmazza, ezért nyilván ez felel meg a leghosszabb megengedett hangsornak. (1 pont)

Ennek hossza pedig G éleinek száma, amely (a fokszámösszeg fele, vagyis) $\frac{10 \cdot 30 + 21 \cdot 10}{2} = 255$.(1 pont)

3. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy királynak legalább két lépésre van szüksége ahhoz, hogy az egyikről a másikra jusson. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A sakkban a király egy lépésben bármely mezőről egy azzal akár közös él mentén, akár közös csúcs mentén szomszédos mezőre léphet.)

* * * * *

Hivatkozzunk a mezőkre a sakkban szokásos módon: a sorokat 1-től 8-ig számozva, az oszlopokat pedig A-tól H-ig betűzve.

Az A, C, E és G oszlopok és az 1., 3., 5. és 7. sorok kereszteződéseiben álló 16 mező klikket alkot G-ben (hiszen közülük bármelyikről indulva és a királlyal egyet lépve nem érkezhetünk egy másikra). (4 pont)

16 színnel viszont G csúcsai könnyen megszínezhetők. Ugyanis „parkettázzuk ki” a sakktáblát 16 darab 2×2-es négyzettel és adjuk mindig a közös parketta alá kerülő 4 mezőnek ugyanazt a színt. A kapott színezés nyilván jó, hiszen egy 2×2-es négyzet bármelyik mezőjéről bármely másik a király legföljebb egy lépésével elérhető. (4 pont)

Mivel G-ben van 16 csúcsú klikk, ezért $\chi(G) \geq 16$, (1 pont)

másrészt mivel G csúcsai 16 színnel színezhetők, ezért $\chi(G) = 16$. (1 pont)

4. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, G élkromatikus számát!

* * * * *

Bontsuk G éleit kétfelé: E_1 álljon az eredetileg a két 5 pontú úthoz tartozó 8 élből, E_2 pedig a két út összekötésekor létrejött élekből.

E_1 nyilván megszínezhető 2 színnel: mindkét úton felváltva használjuk a két színt. (2 pont)

E_2 pedig (a G csúcsaival) páros gráfot alkot (a két pontosztály a két út csúcshalmaza), így Kőnig tétele szerint megszínezhető 5 színnel, hiszen a páros gráfban minden pont foka 5. (2 pont)

E_1 és E_2 színezését egyesítve pedig G egy helyes élszínezését kapjuk 7 színnel. (3 pont)

G-ben a pontok foka 6 vagy 7, hiszen minden pont 1 vagy 2 E_1-beli és 5 E_2-beli élre illeszkedik.

Így G-ben a maximális fokszám 7, (1 pont)

ezért $\chi_e(G) \geq 7$. (1 pont)

Mivel azonban G éleit 7 színnel megszíneztük, ezért $\chi_e(G) = 7$. (1 pont)

Természetesen teljes értékű megoldás az is a 7-színezhetőségre, ha a Kőnig-tételre hivatkozás nélkül adja meg valaki G egy (helyes) élszínezését 7 színnel.

5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A=\{a_1,a_2,\dots,a_8\}$ és $B=\{b_1,b_2,\dots,b_8\}$. Minden $1\le i,j\le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy minimális lefogó ponthalmazt!

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az $\{a_1,a_3,a_5,a_6,b_2,b_5,b_8\}$ lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető). (5 pont)

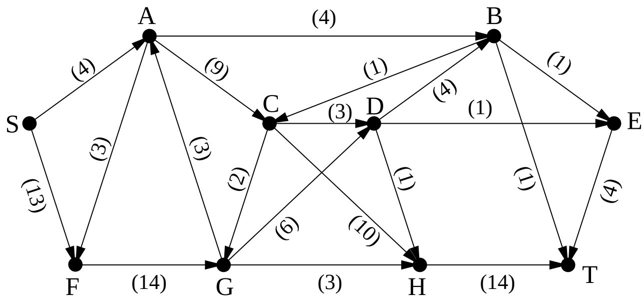
G-ben könnyű mutatni 7 élű párosítást: például az $\{a_1,b_3\}$, $\{a_2,b_2\}$, $\{a_3,b_1\}$, $\{a_4,b_5\}$, $\{a_5,b_7\}$, $\{a_6,b_4\}$ és az $\{a_7,b_8\}$ élek. (3 pont)

Így $\nu(G)\ge 7$, amiből a $\nu(G)\le\tau(G)$ összefüggés szerint 7-nél kisebb lefogó ponthalmaz nincs G-ben. (1 pont)

Így a fent megadott lefogó ponthalmaz minimális. (1 pont)

Megjegyezzük, hogy a fenti nem az egyetlen 7 elemű lefogó ponthalmaz: $\{a_1,a_3,a_6,b_2,b_5,b_7,b_8\}$ is ilyen. A minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. (A dokumentálás ugyanakkor rendkívül hasznosnak bizonyulhat egy esetleges hiba esetén, hiszen lehetővé teszi a javító számára, hogy eldöntse: elírásról, számolási hibáról vagy elvi hibáról van szó.)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és egy minimális vágást!



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 15. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (3 pont)

Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S,B,D,F,G\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S,B,D,F,G\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 15. (4 pont)

Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 15 értékű vágás bizonyítja, hogy a 15 értékű folyam maximális (1 pont)
és a 15 értékű folyam bizonyítja, hogy a 15 értékű vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam, illetve vágás maximális, illetve minimális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális, a vágás minimális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 3 pontból 1-et kapjon.) A folyam maximalitása mellett lehet úgy is érvelni, hogy a 15 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.