Valószínűségszámítás 3. vizsga megoldókulcs

1. Egy 4 cm-es szakaszon véletlenszerűen megjelölünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a keletkező három szakasz között lesz 1 cm-nél rövidebb is?

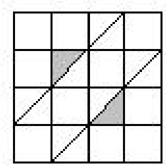
   Megoldás:

$$\mathbf{P}\,(\text{lesz} < 1 \text{ cm-es}) = 1 - \mathbf{P}\,(\text{mindegyik} \geq 1 \text{ cm-es}) \quad (3 \text{ pont})$$

   Jelölje a két kiválasztott pontot x, y. A keletkezett szakaszok:
   $a = \min\{x, y\}, b = \max\{x, y\} - \min\{x, y\}, c = 4 - \max\{x, y\}$.
   Annak a feltételrendszere, hogy mindegyik szakasz legalább 1 cm hosszú:

$$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1 \iff \begin{cases} (x < y, x \geq 1, y - x \geq 1, 4 - y \geq 1) & (3 \text{ pont}) \\ \text{vagy} & \\ (x \geq y, y \geq 1, x - y \geq 1, 4 - x \geq 1) & (3 \text{ pont}) \end{cases}$$

   Ennek megfelelő tartomány a $[0, 4] \times [0, 4]$ $-$ben (5 pont):



   $\mathbf{P}\,(\text{mindegyik} \geq 1 \text{ cm-es}) = \frac{1}{16}$. (4 pont)
   A keresett valószínűség tehát $\mathbf{P}\,(\text{lesz} < 1 \text{ cm-es}) = \frac{15}{16}$ (2 pont).

2. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} A \cos \frac{x}{2} & , \text{ ha } \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \text{különben} \end{cases} .$$

   a.) $A = ?$
   b.) Írja fel az F_X eloszlásfüggvényt!
   c.) $\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{4}\right) = ?$

   Megoldás:

   a.) (8 pont)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} A \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \left[2A \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 2A$$

   Innen $A = \frac{1}{2}$.

b.)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \quad \text{(2 pont)} \\ 1 & \text{ha } x \ge \pi \quad \text{(2 pont)} \\ \frac{1}{2}\int_0^x \cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \sin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{ha } 0 < x < \pi \quad \text{(4 pont)} \end{cases}$$

c.) (4 pont)

$$\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{4}\right) = 1-\mathbf{P}\left(X \le \frac{\pi}{4}\right) = 1-\mathbf{P}\left(X < \frac{\pi}{4}\right) = 1-F_X\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0.61732$$

3. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right) & \text{, ha } x, y \in (0,1) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki, az $f_{X|Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt és az $\mathbf{E}\left(X \mid Y = y\right)$ regressziós függvényt!

Megoldás:

$$\begin{aligned} f_X(y) &= f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{12}{5}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}y + xy^2\right]_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}y + \frac{12}{5}y^2, \quad y \in (0,1) \quad \text{(8 pont)} \end{aligned}$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right)}{\frac{4}{5} - \frac{6}{5}y + \frac{12}{5}y^2} = \frac{6\left(x^2 - xy + y^2\right)}{2 - 3y + 6y^2}, \quad x, y \in (0,1) \quad \text{(4 pont)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(X \mid Y = y\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot \frac{6\left(x^2 - xy + y^2\right)}{2 - 3y + 6y^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2 - 3y + 6y^2}\left[\frac{3}{2}x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2\right]_0^1 = \\ &= \frac{6y^2 - 4y + 3}{12y^2 - 6y + 4}, \quad y \in (0,1) \quad \text{(8 pont)} \end{aligned}$$

4. Egy termékbemutató szervezésekor $n = 1000$ meghívót küldenek szét. A tapasztalat szerint a meghívottak egymástól függetlenül $p = 0.1$ valószínűséggel fogadják el a meghívást, és jelennek meg a rendezvényen. Legalább mekkora teremben kell a rendezvényt megtartani, ha azt akarják, hogy a megjelentek mind le tudjanak ülni legalább 90%-os valószínűséggel? ($\Phi\left(1.3\right) = 0.9$).

Megoldás:

Legyen $X_i = 1$ ha az i. meghívott eljön, különben 0, és legyen m a terem kapacitása.

A kérdés az, hogy mekkora legyen m, hogy

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le m\right) \ge 0.9 \quad \text{(5 pont)}$$

A centrális határeloszlás tételből:

$$\Phi(t) \approx \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < t\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < t\sqrt{np(1-p)} + np\right) \quad \text{(8 pont)}$$

Tehát azt a legkisebb m-et keressük, melyre

$$0.9 = \Phi(t) \approx \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < t\sqrt{np(1-p)} + np\right) \le \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le m\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Azaz $t \ge 1.3$, és

$$1.3 \cdot \sqrt{1000} \cdot \sqrt{0.1 \cdot 0.9} + 1000 \cdot 0.1 \le m \quad \text{(3 pont)}$$

Innen

$$112.33 \le m$$

azaz m minimális értéke – tehát a szükséges terem minimális mérete – 113. (2 pont)

5. Legyenek X és Y függetlenek, X az 1, 2 és 3, Y pedig a 0 és az 1 értékeket veheti fel. Együttes eloszlásukról az alábbi hiányos táblázat áll rendelkezésünkre.

Y \ X	1	2	3	Y perem
0	0.06	a	b	0.3
1	c	d	0.07	e

.

Töltse ki az együttes eloszlás táblázatot! $\operatorname{cov}(3X, -Y) = ?$

Megoldás:

$$e = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{(2 pont)}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=1, Y=0) &= \mathbf{P}(X=1) \cdot \mathbf{P}(Y=0)\\ 0.06 &= (0.06 + c) \cdot 0.3\\ c &= 0.14 \quad \text{(3 pont)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=3, Y=1) &= \mathbf{P}(X=3) \cdot \mathbf{P}(Y=1)\\ 0.07 &= (0.07 + b) \cdot e\\ b &= 0.03 \quad \text{(3 pont)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0.3 &= 0.06 + a + b\\ a &= 0.21 \quad \text{(3 pont)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e &= c + d + 0.07\\ d &= 0.49 \quad \text{(3 pont)}\end{aligned}$$

Y \ X	1	2	3	Y perem
0	0.06	$0,21$	$0,03$	0.3
1	$0,14$	$0,49$	0.07	$0,7$

1.

$$\operatorname{cov}(3X,-Y) = -3 \cdot \operatorname{cov}(X,Y) = 0 \qquad \text{(3+3 pont)}$$

A második egyenlőség abból következik, hogy a függetlenség miatt $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.