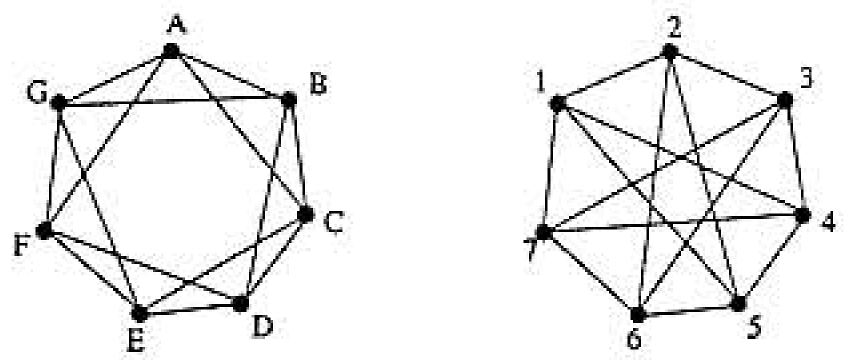
1. GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK [1]

1.1. Izomorfizmus

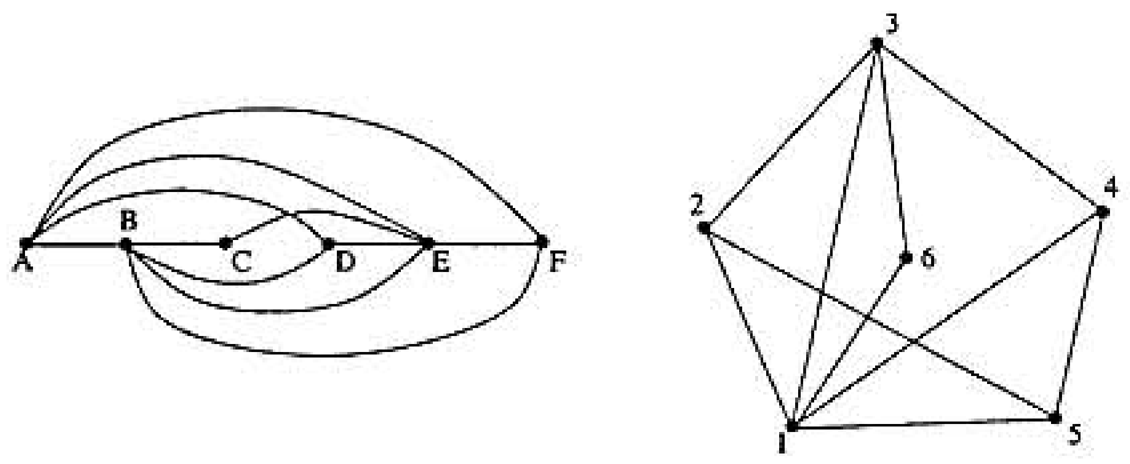
1. Feladat. *Izomorfak-e az 1. ábra gráfjai?*



1. ábra.

Megoldás: Igen, egy lehetséges bijekció a $G \mapsto 1$, $B \mapsto 2$, $D \mapsto 3$, $F \mapsto 4$, $A \mapsto 5$, $C \mapsto 6$, $E \mapsto 7$.

2. Feladat. *Izomorfak-e a 2. ábra gráfjai?*



2. ábra.

Megoldás: Nem. A bal oldali gráfban két ötödfokú pont is van (B és E), míg a jobboldaliban csak egy (az 1-es).

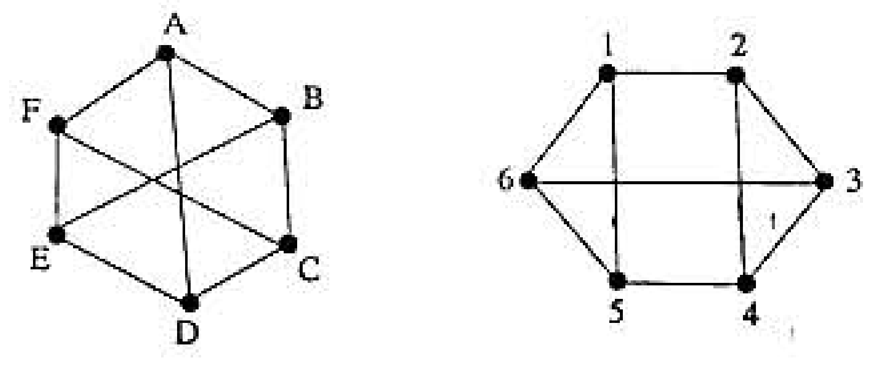
Másik lehetséges megoldás: Mindkét gráfban egyetlen másodfokú pont van, de C-nek nincs, 6-nak van negyedfokú szomszédja.

3. Feladat. *Izomorfak-e a 3. ábra gráfjai?*

Megoldás: Nem. Az ábrán bal oldalon szereplő gráf páros (a két pontosztály: B, F, D és E, C, A), míg a jobb oldali gráf nem az, hiszen tartalmaz háromszöget (pl. $1, 5, 6$).

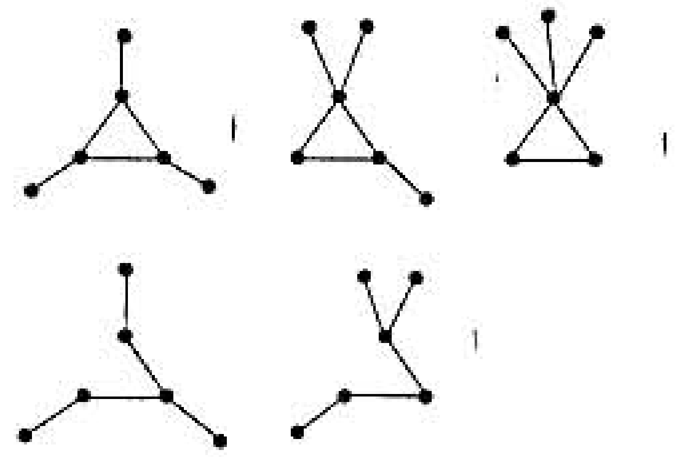
4. Feladat. *Hány darab olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő egyszerű gráf létezik, melyben pontosan három darab elsőfokú pont van?*

[1] © BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék, Budapest, 2002.



3. ábra.

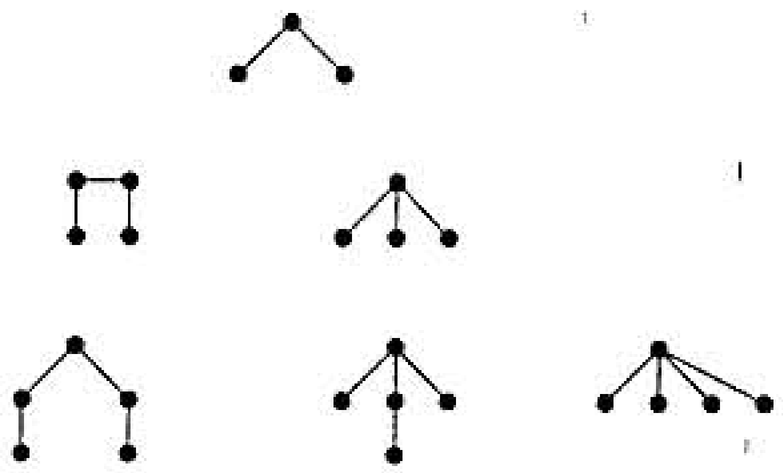
Megoldás: A 3 elsőfokú ponton túl három pont van a gráfban, amelyek nem lehetnek elsőfokúak. Ezek vagy egy 3 pontú teljes gráfot, vagy egy 3 pontú utat alkothatnak. A 3 pontú teljes gráfhoz a három elsőfokú pont háromféleképp vehető hozzá. A 3 pontú út esetén kötelező egy-egy elsőfokú pontot az út végéhez tenni és két lehetőség marad a harmadiknak. A 4. ábrán látható az 5 nem izomorf ilyen gráf.



4. ábra. *Az öt nem izomorf gráf.*

5. Feladat. *Rajzolja fel az összes 3, 4 és 5 pontú fát! (Az izomorfakat – amelyek a pontok cseréjével egymásba mennek – csak egyszer.)*

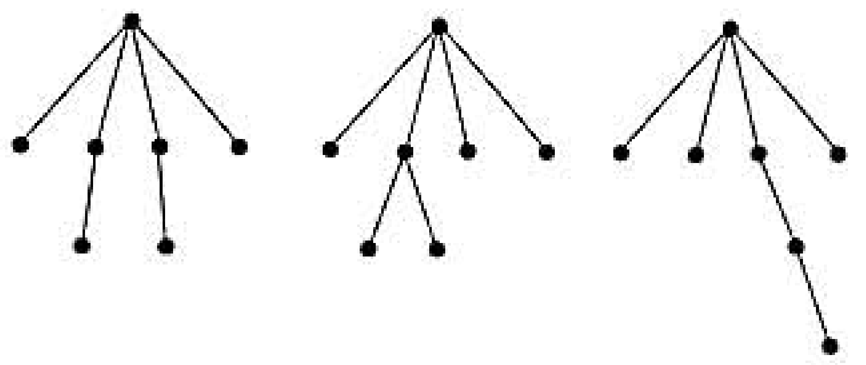
Megoldás: Egy darab 3 pontú, két darab 4 pontú és 3 darab 5 pontú nem izomorf fa létezik, amelyek a 5. ábrán láthatók.



5. ábra. *Az összes páronként nem izomorf 3, 4 és 5 pontú fa.*

6. Feladat. *Rajzolja fel az összes olyan nem izomorf 7 pontú fát, amelyben van negyedfokú pont?*

Megoldás: Egy 7 pontú fában csak egy negyedfokú pont lehet és a kimaradó két élt háromféleképpen tudjuk hozzávenni (lásd 6. ábra).



6. ábra. *A 3 lehetséges, páronként nem izomorf megoldás.*

7. Feladat. *Hány darab olyan páronként nem izomorf k pontú fa van ($k \geq 7$), amely tartalmaz $(k-3)$-adfokú pontot?*

Megoldás: A k pontú fában csak egy $(k-3)$-adfokú pont lehet (ha kettő is lenne, akkor a fokszámok összege legalább $2\cdot(k-3)+(k-1)\cdot 1 = 3k-8$ lenne, ami $k \geq 7$ esetén több, mint az élszám kétszereseként adódó $2k-2$). Ezután a kimaradó két élt az előző feladathoz hasonlóan háromféleképpen tudjuk hozzávenni.

8. Feladat. *Hány darab olyan páronként nem izomorf 7 pontú fa van, amelyben van pontosan harmadfokú pont?*

Megoldás: Egy hétpontú fában a harmadfokú pontok száma nem lehet több mint 2. Két harmadfokú pont esetén ezek vagy szomszédosak vagy nem. Mindkét esetben egy megfelelő fa létezik. Ha egy harmadfokú pont van a fában, akkor vagy van egy negyedfokú pont is, ilyen fa csak egy van, vagy nincs negyedfokú pont, és akkor három különböző fát kapunk aszerint, hogy a harmadfokú pontból kiinduló három út milyen hosszú. Az 7. ábrán az esetek láthatók.

9. Feladat. *Igaz-e, hogy ha T_1 és T_2 két olyan n szögpontú fa, amelyekben, csak elsőfokú és k-adfokú pontok vannak, akkor T_1 és T_2 izomorfak?*

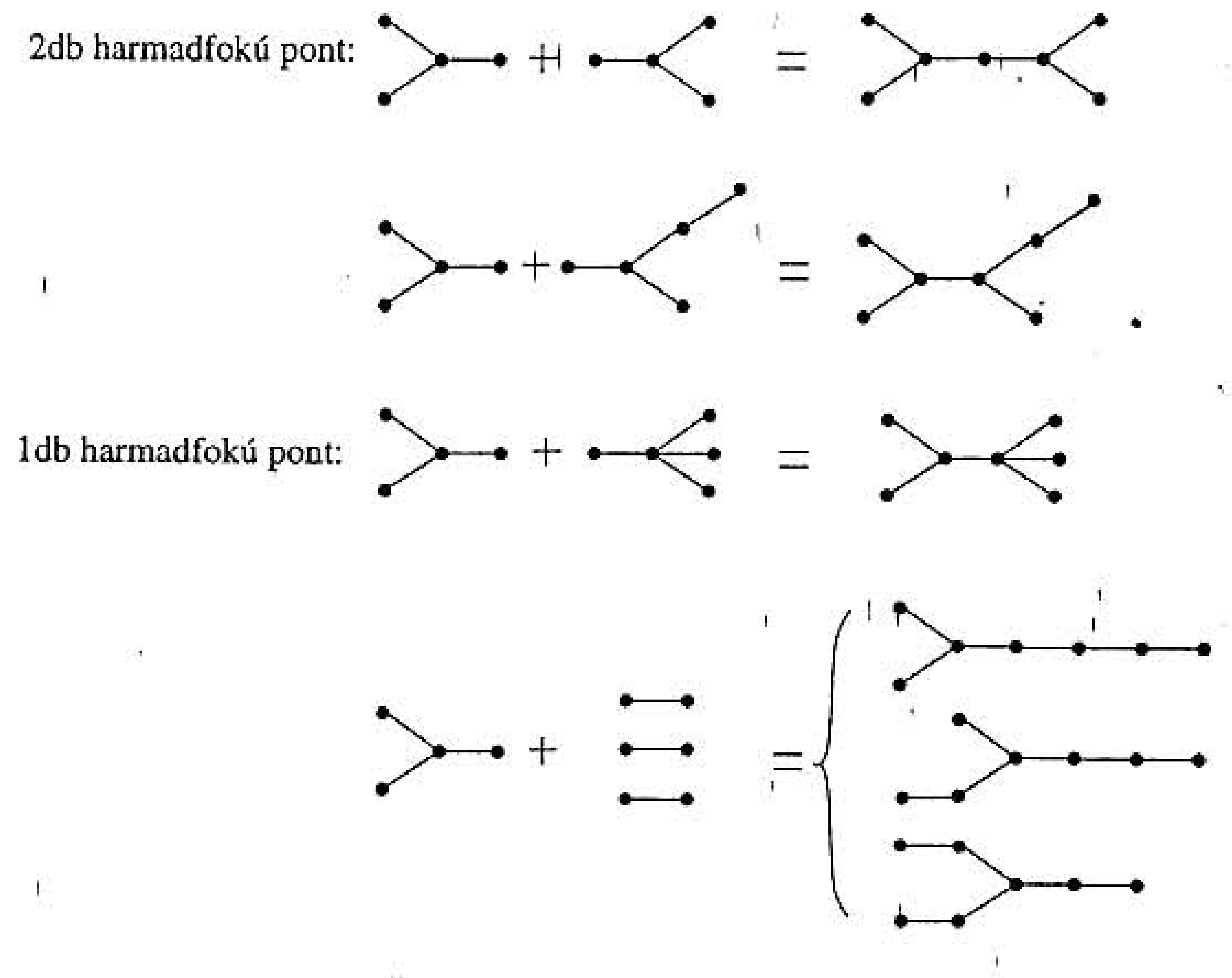
Megoldás: Nem igaz, lásd a 8. ábrán látható két gráfot ($n = 10$, $k = 3$).

10. Feladat. *Igaz-e, hogy ha egy gráf izomorf a komplementerével, akkor minden pontjának foka páros? (Emlékezzünk rá, hogy egy G egyszerű gráf $\bar{G}$ komplementere az a gráf, melynek csúcshalmaza G-ével azonos, és éleit pontosan azok a csúcspárok alkotják, amelyek nem alkotnak élet G-ben)*

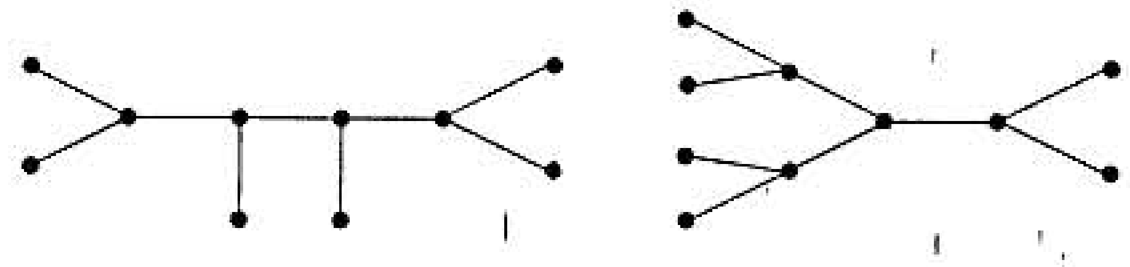
Megoldás: Nem, tekintsünk például egy három élből álló utat.

11. Feladat. *Mely fák izomorfak saját komplementerükkel?*

Megoldás: Szükséges feltétele az izomorfiának, hogy az élek száma megegyezzen, azaz $|E(F)| = |E(\bar{F})|$, ahol F a szóban forgó, komplementerével izomorf fák valamelyike. Innen: $n-1 = \binom{n}{2} - (n-1)$, amiből $(n-1)(n-4) = 0$ adódik, ahol n a pontok száma.
$n = 1$-re csak az egy pontú fa létezik, ami izomorf a komplementerével.



7. ábra. *A 7 lehetséges megoldás.*



8. ábra. *Egy ellenpélda.*

$n = 4$-re két nem-izomorf fa létezik, ezek közül a három élből álló út izomorf a komplementerével, a másik nem.

12. Feladat. *Legyen a p-pontú G gráf izomorf a komplementerével, ahol p egy páratlan szám. Mutassuk meg, hogy G-ben van $\frac{p-1}{2}$ fokú pont.*

Megoldás: Ha egy pont k-adfokú, akkor a komplementerben a foka $p-1-k$, tehát az eredeti gráfban is kell lennie egy ilyen fokú pontnak is. Így a fokszámok párba állíthatóak. Mivel páratlan sok pontunk van, lesz olyan, mely saját maga párja. Ennek a foka csakis $\frac{p-1}{2}$ lehet.

13. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra, mely izomorf a komplementerével, teljesül, hogy csúcsainak száma $4k$ vagy $4k+1$ alakú, ahol k egész szám.*

Megoldás: Az n-pontú gráf és komplementere együtt $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ élt tartalmaz, így a feladat gráfjára $n\cdot(n-1)$ osztható 4-gyel. Ez pontosan a $4k$ és $4k+1$ alakú számokra teljesül.

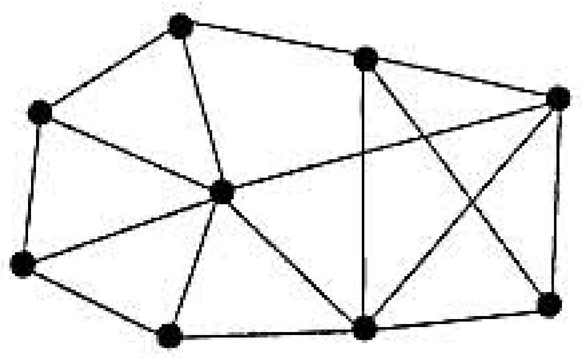
14. Feladat. *G páros gráf és izomorf a komplementerével. Mi lehet ez a G?*

Megoldás: G egyik színosztálya sem tartalmazhat 2-nél több pontot (mert akkor a komplementere tartalmazna háromszöget). Az előző feladat miatt a pontok száma 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat. Így G csak egy három élű út vagy egy izolált pont lehet.

1.2. Fokszámsorozatok

15. Feladat. *Van-e olyan egyszerű, összefüggő, nem páros gráf, amelyben a fokszámok: 3 3 3 3 3 4 4 5 6?*

Megoldás: Igen, az 9. ábrán egy ilyen gráf látható.



9. ábra. *A fokszámok: 3 3 3 3 3 4 4 5 6*

16. Feladat. *Van-e olyan egyszerű, összefüggő, nem páros gráf, amelyben a fokszámok: 3 3 3 3 4 4 4 5?*

Megoldás: Nem, hiszen a fokszámok összege megegyezik az élek számának kétszeresével, viszont ebben a példában a fokszámok összege páratlan.

17. Feladat. *Hány olyan egyszerű gráf van, melynek fokszámai rendre: 2 3 3 4 6 6 6?*

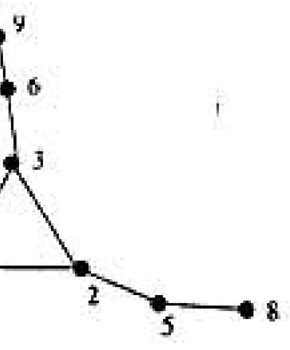
Megoldás: Egy sem, hiszen egy 7 pontú egyszerű gráfban 6 fokú pontokból minden másik pontba vezet él. Mivel 3 ilyen pont van, így nem lehet egyik pont foka sem háromnál kisebb.

18. Feladat. *Hány olyan egyszerű gráf van, melynek fokszámai rendre: 1 1 1 2 3 4 5 7?*

Megoldás: Nincs ilyen, mert a három darab elsőfokú csúcs mindegyikének szomszédosnak kellene lennie a legnagyobb fokszámú csúccsal (mert annak foka éppen eggyel kisebb a csúcsok számánál, tehát mindenkivel össze van kötve), így ezek elhagyása után egy olyan gráfot kellene kapnunk, melynek fokszámai rendre 2 3 4 5 4, ami persze nem lehet, hiszen egy ötcsúcsú egyszerű gráfban nincs ötödfokú csúcs.

19. Feladat. *Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámai rendre: 5 5 5 6 6 6 7 7 7?*

Megoldás: Igen. Egy példa bemutatásához vegyük egy ilyen kilenc pontú gráf komplementerét. A komplementerben az első pont szomszédai azok a pontok lesznek, amik nem voltak szomszédosak az eredeti gráfban, így a komplementerben az első pont fokszáma $8 - 5 = 3$ lesz. Hasonlóan számolható a komplementer többi pontjának a fokszáma, így a komplementer fokszámsorozata nem lehet más mint: 3 3 3 2 2 2 1 1 1. Ilyen gráf létezik, lásd például a 10. ábrát.



10. ábra. *A fokszámok: 3 3 3 2 2 2 1 1 1*

20. Feladat. *Egy $n > 1$ csúcsú fa fokszámai $n-1$ félék. Mekkora lehet n értéke?*

Megoldás: A fákban a legnagyobb pont foka $n-1$ lehet, így kell lennie $1, 2, \ldots, n-1$ fokú pontnak. Jelöljük x-szel azt a fokszámot, ami kétszer fordul elő. Mivel az élek száma megegyezik a fokszámok felével, így

$$2e = 2 \cdot (n-1) = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + x = \frac{n \cdot (n-1)}{2} + x$$

vagyis $\frac{2 \cdot x}{n-1} + n = 4$. Innét $x \geq 1$ miatt azonban látszik, hogy $n < 4$. Így $n = 2$ vagy $n = 3$ (és mindkét esetben $x = 1$ adódik). Ilyen fák vannak, lásd a 11. ábrát.

11. ábra. *A két lehetséges megoldás.*

21. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden 2-nél nagyobb páros n-re van n csúcsú egyszerű összefüggő 3-reguláris gráf!*

Megoldás: Teljes indukciós megoldás:
$n = 4$-re K_4 megfelelő.
Az indukciós lépés: legyen G_n a feltételek szerinti n csúcsú gráf. G_{n+2}-t úgy állítjuk elő, hogy vesszünk két új csúcsot, melyeket összekötünk egymással. Töröljük G_n két nem érintkező élét (K_4-ben van ilyen, és belátható, hogy a most leírt képzés szerinti G_n-ekben is), s ezek négy végpontjából kettőt-kettőt kössünk össze a két új ponttal.

Másik lehetséges megoldás: Konstruktív megoldás: A $(c_1 c_2 \ldots c_m \ldots c_{2m})$ körhöz adjuk a $\{c_1 c_{m+1}\}$, $\{c_2 c_{m+2}\}$, $\ldots \{c_m c_{2m}\}$ átlókat.

22. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re van olyan egyszerű összefüggő $2n$ csúcsú gráf, melynek minden $1 \leq k \leq n$ esetén pontosan két k fokszámú csúcsa van!*

Megoldás: Teljes indukció:
$n = 1$-re a két csúcsú fa.
Az indukciós lépés: $2n$ csúcsú egyszerű gráfból úgy kapunk $2n+2$ csúcsút, hogy hozzávesszünk két új csúcsot, amit összekötünk egymással, és az egyik új csúcsot ezen kívül még összekötjük az egyik $1, 2, \ldots, n$ fokszámú ponttal.

1.3. Fák

1.3.1. Cayley tétel, Prüfer kód

23. Feladat. *Egy Prüfer kód $n-1$ azonos számjegyből áll. Mi a fa, amit kódol és mi ez a szám? (Egy n csúcsú fa Prüfer-kódjába beleértjük annak $n-1$-edik, n-nel egyenlő elemét is.)*

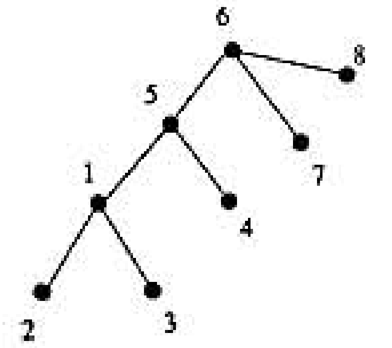
Megoldás: Egy n csúcsú (azaz $n-1$ élű) csillag, melyben épp az n sorszámú pont $(n-1)$-ed fokú.

24. Feladat. *Egy F fa Prüfer kódja csupa különböző számból áll. Hogyan jellemezhetjük F-et?*

Megoldás: Ha a Prüfer kód a $K_1, K_2, \dots K_{n-1}$ különböző számokból állt és a t szám nem szerepel közöttük, akkor F egy olyan út, melynek pontjai $t, K_1, K_2, \dots K_{n-1}$ sorrendben következnek.

25. Feladat. *Válasszuk meg x értékét úgy, hogy az alábbi sorozat egy olyan fa Prüfer-kódja legyen, amelyben minden pont fokszáma páratlan szám. Adjuk is meg ezt a fát! A sorozat: 1, 1, 5, x, 6, 6, 8.*

Megoldás: A fa a 12. ábrán látható és $x = 5$. Bármilyen más x érték esetén az 5.pont másodfokú lenne.



12. ábra. *Prüfer-kódja:* $1, 1, 5, 5, 6, 6, 8$.

26. Feladat. *Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton amely nem csillag?*

Megoldás: A Cayley-tételből következően $n^{n-2} - n$, mivel a csillagok száma nyilván n.

27. Feladat. *Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, amelynek legalább három elsőfokú csúcsa van?*

Megoldás: Az utak kivételével valamennyi fának legalább 3 elsőfokú pontja van. Mivel az utak száma $\frac{n!}{2}$, így a megoldás: $n^{n-2} - \frac{n!}{2}$.

28. Feladat. *Hány olyan fa van az $1, 2, \dots, n$ pontokon, amelyben az 1-es csúcs elsőfokú?*

Megoldás: A fa olyan lesz mintha a $2, 3, \dots, n$ pontokon megadható $(n-1)^{n-3}$ darab fához hozzávennénk az 1-es pontot egyetlen él behúzásával, amit $(n-1)$-féleképpen tehetünk meg. Tehát az ilyen fák száma

$$(n-1) \cdot (n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$$

Másik lehetséges megoldás: Az olyan Prüfer-kódok száma, amiben az 1-es nem szerepel $(n-1)^{n-2}$.

29. Feladat. *Adott négy darab egyenként ötpontú fa négy páronként diszjunkt csúcshalmazon. A négy fában szereplő összesen 20 csúcs összekötésével hány különböző módon egészíthető ki ez a négy fa egyetlen fává, ha a csúcsokat címkézettnek tekintjük?*

Megoldás: Képzeletben ezeket az öt pontú fákat zsugorítsuk össze egy-egy ponttá. Ezen a 4 képzeletbeli ponton 4^2 darab különböző fa létezik! Egy ilyen képzeletbeli fa egy éle a valóságban két ötpontú fát köt össze, ami az öt-öt pont közül bármelyiket összekötheti (5^2 féleképp). Mivel a 4 képzeletbeli pont között 3 ilyen él van a megoldás:

$$4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 4^2 \cdot 5^6$$

1.3.2. Mohó algoritmus, Kruskal-tétel

30. Feladat. *Az n^2 számú egységnyi oldalhosszúságú négyzetből álló négyzet alakú négyzetrács vonalrendszeréből annyit kell berajzolni, hogy a négyzetrács bármely pontjából bármely pontjába el lehessen jutni a berajzolt szakaszok mentén. Számítsuk ki a berajzolt szakaszok összhosszának minimumát!*

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy a berajzolt szakaszok egy fát alkotnak, hiszen ha lenne a kialakuló gráfban kör, az egyik élét törölve nem sérülne az összefüggőség. Mivel $(n+1)^2$ pontunk van, egy ezeken megadható fa élszáma $(n+1)^2 - 1$. Minden szakasz egységnyi, tehát a kérdezett minimális hosszúság is ennyi.

31. Feladat. *Legyenek egy gráf $e_1, e_2, \dots$ élei egymástól függetlenül rendre $p_1, p_2, \dots$ valószínűséggel meghibásodó telefonvonalak. A kifeszítő fák közül keressük meg azt, amelyiknek a legnagyobb a megbízhatósága (tehát amelyre maximális annak a valószínűsége, hogy egyik él sem hibásodik meg).*

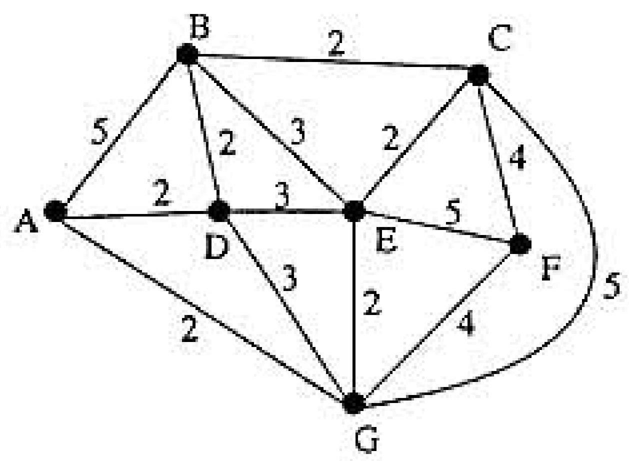
Megoldás: Az i él megbízhatóságának valószínűsége $1 - p_i$. Mivel az élek meghibásodása egymástól független, egy tetszőleges kifeszítő fa megbízhatóságának valószínűsége megegyezik az élei megbízhatósági valószínűségének szorzatával. Olyan F feszítőfát keressünk, mely éleinek szorzata minimális, azaz

$$\min_F \prod_{i \in F}(1 - p_i) = \min_F 2^{\log \prod_{i\in F}(1-p_i)} = \min_F 2^{\sum_{i\in F}\log(1-p_i)}$$

(ahol a második egyenlőtlenségnél kihasználtuk, hogy $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$.) Mivel a hatványozás monoton függvény, a gráf e_i élére $\log(1 - p_i)$ súlyt rendelve a minimális súlyú feszítőfa megegyezik legnagyobb megbízhatóságú kifeszítőfával. Minimális súlyú feszítőfát pedig a mohó algoritmussal találhatunk.

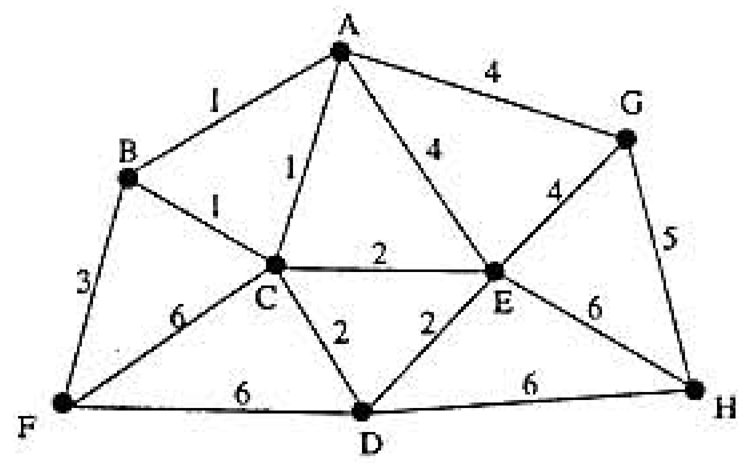
32. Feladat. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van a 13. ábrán látható gráfnak és mennyi egy ilyennek a költsége?*

Megoldás: Elég azt megszámolni, hogy a mohó algoritmusnak hányféle kimenetele lehet. A mohó algoritmus először kiválasztana 5 db 2 súlyú élt (a hatból, melyek egy kört alkotnak). A kapott részgráf tartalmazná az A, B, C, D, E ,G pontokat, azaz csak az F pont hiányozna a feszítőfából, amit az egyik 4 súlyú éllel kötne össze vagy a C, vagy a G ponttal. Így összesen $\binom{6}{5} \cdot \binom{2}{1} = 12$ lehetséges minimális súlyú feszítőfa létezik.



13. ábra. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható, élsúlyokkal ellátott gráfnak?*

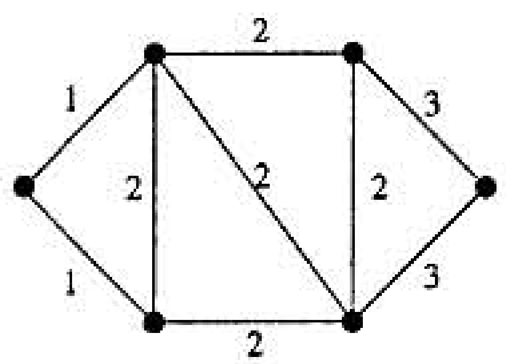
33. Feladat. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az 14. ábrán látható gráfnak?*



14. ábra. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható, élsúlyokkal ellátott gráfnak?*

Megoldás: Most is elég az megszámolni, hogy a mohó algoritmus hány különböző feszítőfát adhat, A mohó algoritmus először kiválasztana 2 db 1 súlyú élt (a három közül), majd 2 db 2 súlyú élt (a szintén háromszöget alkotó három közül) és az egy 3 súlyú élt. Ekkor a fa tartalmazná az A, B, C, D, E ,F pontokat, így a maradék G pontot az egyik 4 súlyú éllel kötné össze vagy az A, vagy az E ponttal, majd a H pontot az 5 súlyú éllel. Így összesen $\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}=18$ lehetséges minimális súlyú feszítőfa létezik.

34. Feladat. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az 15. ábrán látható gráfnak?*



15. ábra. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható, élsúlyokkal ellátott gráfnak?*

Megoldás: A bal oldali két egy súlyú élt mindig tartalmazza a minimális súlyú feszítőfa, így a a bal oldali kettő súlyú függőleges él egyik feszítőfának sem része. A jobb oldali két három súlyú élből mindig csak az egyiket tartalmazza és a maradék négy kettő súlyú élből csak kettőt, de ezek nem alkotnak kört a két egy súlyú éllel, így a különböző minimális súlyú feszítőfák száma:

$$\left[\binom{4}{2}+1\right]\cdot\binom{2}{1}=10$$

35. Feladat. *Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú egyszerű összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek pedig 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)*

Megoldás: A 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf felbontható egy fára és egy olyan élre, ami miatt egy kör keletkezik. Ha a gráfban található egy k hosszú kör csupa 1 súlyú élből, akkor k darab feszítőfa létezik. Ez a konstrukció $3\le k\le 1999$ mellett lehetséges. Másfelől, ha a gráfban található egy k hosszú kör és benne van a 2 hosszú él, akkor csak 1 darab feszítőfája lesz. Vagyis k lehetséges értékei: $k=1$ és $3\le k\le 1999$.

36. Feladat. *Hány minimális súlyú feszítőfája van annak az 1000 csúcsú teljes gráfnak, amelyben egy háromszög éleinek súlya 1, minden más él súlya 2? (A pontokat cimkézettnek tekintjük)*

Megoldás: A háromszög három éle közül bármelyik kettőt választhatjuk, másfelől a három pontját egy pontba összehúzva 998^{996}-féleképp választhatunk további 997 darab 2-súlyú élt. A megoldás tehát $3\cdot 998^{996}$

1.3.3. Egyéb

37. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy fában a pontok és az élek számának szorzata páros!*

Megoldás: Mivel a fában az élek száma eggyel kisebb a pontok számánál, a két szám egyike páros, így szorzatuk is az.

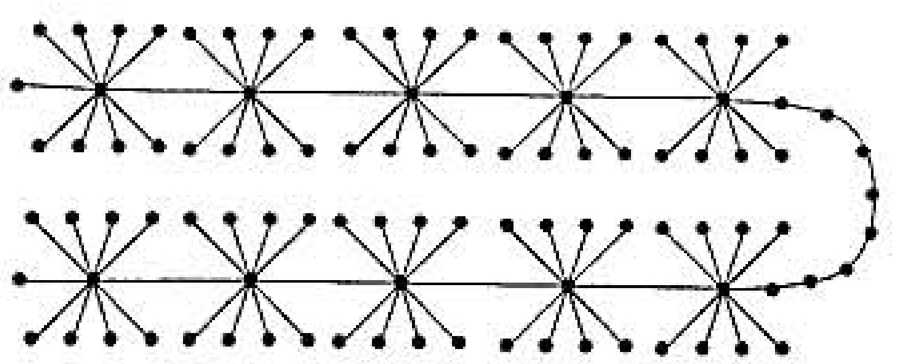
38. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy létezik ilyen fa. Mivel minden fában van legalább két elsőfokú pont, így csak egy pontnak nem ismerjük a fokszámát. Ezen túl tudjuk, hogy a fokok összege megegyezik az élek számának kétszeresével. Mivel a fában $n-1$ él van, így $2\cdot(n-1)=(n-3)\cdot 2+2\cdot 1+x$, ahol x jelöli az ismeretlen fokszámú pont fokszámát. Az egyenlet megoldása $x=2$, ami nem lehet, hiszen akkor $n-2$ másodfokú pont lenne, így ellentmondásra jutunk.

39. Feladat. *Legfeljebb hány tizedfokú pontja lehet egy 100 pontú fának?*

Megoldás: Legyen a 10-edfokú pontok száma x. Mivel a többi pont foka legalább egy, így az élek számának kétszerese $198\ge 10x+100-x=100+9x$. Az egyenlőtlenség megoldásaként $x\le 10$ adódik. $x=10$ tényleg lehet is. Egy ilyen gráf látható az 16. ábrán.

Általánosságban is igaz, hogy minden $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokszámsorozat realizálható fával, ha $\sum d_i = 2n-2$.



16. ábra. *100 pontú fa, amelyben 10 darab 10-edfokú pont található.*

40. Feladat. *Hány pontja van a T fának, ha éleinek száma pontosan tizenötöde a komplementerében lévő élek számának?*

Megoldás: Legyen n a fa pontjainak száma. Ha a fa éleinek számához hozzáadjuk a fa komplementerének élszámát, akkor a teljes gráf éleinek számát kapjuk. Azaz

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=n-1+15\cdot(n-1)$$

$(n-1)$-gyel egyszerűsítve $n=32$-t kapunk.

41. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T fa elsőfokú pontjainak száma legalább akkora, mint $\Delta(T)$, azaz a T-beli maximális fokszám.*

Megoldás: A maximális fokszámú pontból $\Delta(T)$ darab él indul ki, amelyek bármelyike mentén elindulva legalább egy azt folytató út van a fában, melynek végén elsőfokú ponthoz jutunk.

42. Feladat. *Az n hosszúságú $0-1$ sorozatok legyenek egy gráf pontjai, két pont akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a két sorozat pontosan egy koordinátában tér el. Legalább hány élet kell ebből a gráfból elhagyni, hogy körmentessé váljon?*

Megoldás: Az n hosszúságú $0-1$ sorozatok száma 2^n, ami megegyezik a gráf pontjainak számával. Az n hosszúságú 0 sorozatból bármely más n hosszúságú $0-1$ sorozatot megkaphatunk legfeljebb n darab nulla eggyé változtatásával. Mivel egy koordináta-változtatás megfelel a gráf élein való mozgásnak, a gráf n hosszúságú 0 sorozatát képviselő pontból a gráf többi pontja elérhető, azaz a gráf összefüggő. 2^n pontú összefüggő körmentes gráf 2^n-1 élt tartalmazhat. Az eredeti gráf valamennyi pontja n-edfokú, így összesen $\frac{2^n\cdot n}{2}$ élt tartalmaz, azaz $\frac{2^n\cdot n}{2}-(2^n-1)$ élt kell elhagyni.

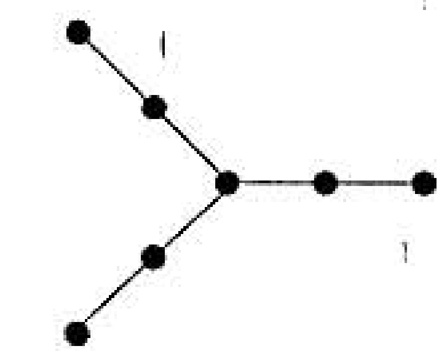
43. Feladat. *Jelöljünk ki egy fában 4 elsőfokú pontot. Mutassuk meg, hogy ezek összepárosíthatók úgy, hogy a párok éldiszjunkt utakkal legyenek összekötve.*

Megoldás: Legyen u, v, w és z a négy elsőfokú pont. Tegyük fel, hogy u-t v-vel és w-t z-vel nem lehet éldiszjunkt utakkal összekötni. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan él, amelyet mind az $u\sim v$ út, mind a $w\sim z$ út tartalmaz. (Ezek az utak egyébként egyértelműek) Jelöljük ezt az élt e-vel. Az e él elhagyásával az eddig összefüggő fa két komponensre esik szét úgy, hogy az eredeti négy elsőfokú pontból kettő marad az egyik komponensben és kettő marad a másik komponensben. Nyilvánvaló, hogy a külön komponensben lévő pontpárok éldiszjunkt úton összeköthetők.

44. Feladat. *Mely fákra igaz, hogy bármely két elsőfokú pont távolsága ugyanannyi?*

Megoldás: Triviális megoldás az út és a csillag. Másfelől be lehet látni, hogy a fában csak egy legalább harmadfokú pont lehet. Ezt indirekt bizonyítjuk, tegyük fel, hogy egy fában van legalább két darab, legalább harmadfokú a és b pont. Az összefüggőség miatt a közöttük lévő út legalább egy élt tartalmaz. a-ból legalább két további irányba el lehet indulni úgy, hogy elsőfokú ponthoz jutunk, legyen a_1, a_2 két ilyen elsőfokú pont. A b-ből hasonlóképp kapható két elsőfokú pont legyen b_1, b_2. Az a_1-ből és az a_2-ből az a-ba vezető utak α hosszúsága azonos (hisz különben nem egyforma távolságra lennének pl. b_1-től sem), ugyanígy a b_1-ből és b_2-ből a b-be vezető utak β hosszúsága is azonos. Feltehetjük, hogy $\alpha\geq\beta$ (hisz különben felcserélhetnénk az a, a_1, a_2 és b, b_1, b_2 szerepét). Ekkor b_1 és b_2 távolsága 2β, b_1 és a_2 távolsága $>\beta+\alpha=2\beta$, ami ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy csak egy legalább harmadfokú pont van a fában. Ezeket a gráfokat szupercsillagoknak hívjuk (lásd 17. ábra). Könnyen belátható, hogy azok a szupercsillagok, amelyeknek nem egyenlő hosszúak az ágaik, nem teljesítik a feladat feltételeit. A válasz



17. ábra. *Szupercsillag egyenlő hosszú ágakkal.*

tehát az utak és az olyan szupercsillagok, amelyek minden ága egyenlő hosszú.

45. Feladat. *Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pont-párok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük lévő legrövidebb út éleinek a számát értjük.)*

Megoldás: Azok a fák, ahol a pont-párok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő, két csillagból állnak úgy, hogy a két csillagnak van egy közös éle (a kettő hosszú utat is csillagnak vesszük). Természetesen $n\leq 3$-re ilyen fa nem létezik. Ezeket a fákat úgy tudjuk összeszámolni, hogy kiválasztjuk a két csillag közös élét ($\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ lehetőség közül választva), majd a többi pontot vagy az él egyik végpontjával vagy a másik végpontjával kötjük össze. Ilyenkor csak azokat az eseteket kell venni, amikor mind a két végponthoz hozzávettünk pontokat, különben csak egy csillagot kapnánk, ahol a legnagyobb távolság kettővel egyenlő. Ezért az $n-2$ maradék pontból képezhető részhalmazok közül a teljest és az üreset nem kell számolnunk. A lehetőségek száma tehát

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot(2^{n-2}-2)$$

46. Feladat. *Legfeljebb hány két élből álló út lehet egy fában?*

Megoldás: Ha e éle van, azaz $e+1$ pontja, akkor akár $\frac{e\cdot(e-1)}{2}$ darab út is lehet (gondoljunk egy csillagra). Ennél több pedig nyilván nem lehetséges.

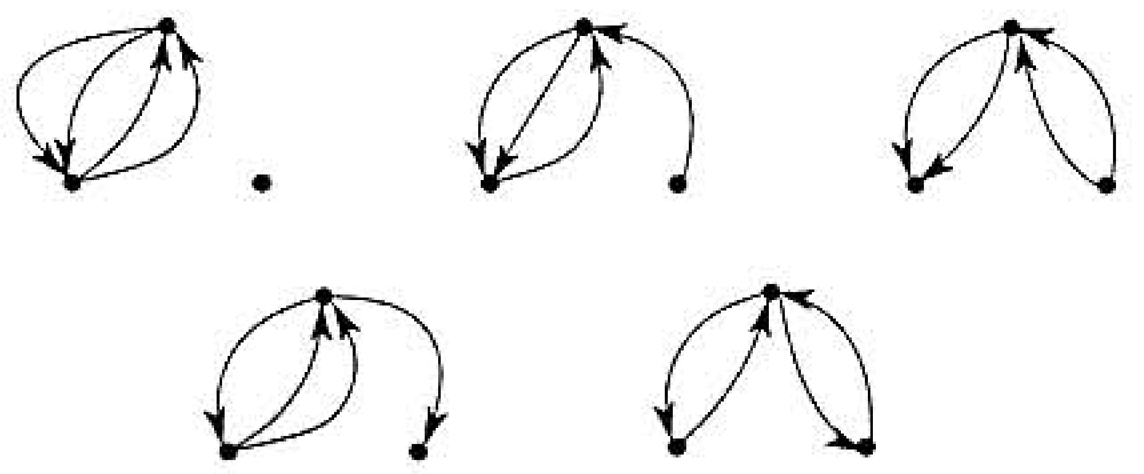
47. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik.*

Megoldás: Indirekt, tegyük fel, hogy az u és v pontok közé behúzott éllel több mint egy kör keletkezne. Ez azt jelenti, hogy a fában u és v között több út is létezik, ami csak úgy lehet, ha kör van a gráfban. Ez ellentmondásban van a fa definíciójával.

1.4. Irányított gráfok

48. Feladat. *Rajzoljuk fel az összes olyan, páronként nem izomorf, 3 pontú és 4 élű hurokmentes irányított gráfot, melynek van olyan pontja, amelynek ki-foka is, be-foka is 2.*

Megoldás: Az 18. ábra mutatja az 5 lehetséges, páronként nem izomorf megoldást.



18. ábra. *Az 5 lehetséges, páronként nem izomorf megoldás a 48. feladathoz.*

49. Feladat. *Hány páronként nem izomorf, 4 pontú és 3 élű, egyszerű irányított gráf létezik?*

Megoldás: Az irányítástól eltekintve három páronként nem izomorf, 4 pontú és 3 élű, egyszerű gráf készíthető: a háromszög meg egy izolált pont, út vagy csillag. Ezek rendre 2, 4, ill. 4-féleképpen irányíthatóak.

50. Feladat. *Egy 9 tagú társaságban mindenki átad pontosan öt embernek $100-100Ft$-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze!*

Megoldás: Jelöljük a pénz átadásokat irányított éllel. A gráf minden pontjának azonos a ki-foka. A be-fokok csak úgy lehetnének különbözőek, ha $0, 1, \ldots, 8$ mindegyike pontosan egyszer fordulna elő, ami 36 élt jelentene, de 45 pénzátadás történt. Két azonos befokú pontnak megfelelő emberre pedig teljesül, hogy pénzük ugyanannyival változott.

51. Feladat. *Hány pontosan k élű hurokmentes irányított gráf adható meg n darab előre megadott címkézett ponton? (Két pont között csak az egyik irányba engedünk meg legfeljebb egy élt.)*

Megoldás: A gráfban $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$-féle él lehet, amiből k darabot húzhatunk be 2^k irányítással, azaz a válasz

$$\binom{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}{k}\cdot 2^k$$

52. Feladat. *Hányféleképpen húzhatunk be n darab irányított élt n darab előre megadott címkézett pont közé úgy, hogy pontosan egy darab*

(a) *n-élű irányított kör,*

(b) *n-élű kör keletkezzék?*

Megoldás: (a) Ez az n élű irányított kör a gráf valamennyi pontját tartalmazni fogja. Vegyünk egy tetszőleges kezdőpontot. Ezután a kör következő pontját a maradék $n-1$ pont közül választhatjuk. (Majd az ezt követő pontot a maradék $n-2$ pont közül, stb.) A végen az utolsó pontból vegyük a kezdőpontba vezető élt. Így valamennyi irányított kört megszámoltuk és összesen $(n-1)!$ darabot kaptunk.

(b) Ha egy irányított kör bizonyos élein megváltoztatjuk az irányt, akkor is kört kapunk, csak már nem irányítottat. Mivel ezeket a változtatásokat egymástól függetlenül végezhetjük, így 2^n-féle olyan kör van, melyek az irányítástól eltekintve azonosak, és ezek közül 2-féle olyan, mely irányított kör. Így a kérdezett szám az n-élű irányított körök számának 2^{n-1}-szerese. Az (a) feladat megoldását felhasználva a válasz tehát $2^{(n-1)}(n-1)!$.

53. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy hurokmentes irányított gráf élhalmaza felbontható két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik sem tartalmaz irányított kört.*

Megoldás: Számozzuk meg a pontokat, és az egyik részhalmazba kerüljenek a kisebb számból nagyobb számba, míg a másikba a nagyobb számból kisebb számba mutató élek.

1.5. Egyéb

54. Feladat. *Hányféleképpen húzhatunk be 1768 élt az előre megszámozott 1,2,3, ... ,59,60 pontok közé úgy, hogy egyszerű gráfot kapjunk?*

Megoldás: 60 pont közé $\frac{60\cdot 59}{2} = 1770$-féle élt húzhatunk be összesen, azaz a válasz

$$\binom{1770}{1768} = \binom{1770}{2} = \frac{1770\cdot 1769}{2}$$

55. Feladat. *Egy egyszerű gráf minden foka $\geq k$. Mutassuk meg, hogy biztos létezik benne legalább $k-1$ élű út!*

Megoldás: Induljunk ki egy tetszőleges pontból és haladjunk előre mindig új pontba. Ez csak akkor nem lehetséges, ha egy pont minden szomszédja már korábban szerepelt az útban, így legalább $k-1$ lépést meg tudunk tenni.

56. Feladat. *Hány kettő hosszú út van $K_{m,n}$-ben?*

Megoldás: A $K_{m,n}$ teljes páros gráf két pontosztályát jelölje A és B (ahol $|A| = n$ és $|B| = m$) melyek teljesen össze vannak kötve. Ha egy kettő hosszú út középső p pontja A-ban van, akkor p-t n-féleképpen, a két végpontját pedig $\binom{m}{2}$-félekép választhatjuk ki, ha pedig a középső pont B-beli, akkor $m\cdot\binom{n}{2}$ megoldás van, összesen tehát

$$n\cdot\binom{m}{2} + m\cdot\binom{n}{2} = \frac{m\cdot n}{2}\cdot(m+n-2)$$

kettő hosszú út van a gráfban.

57. **Feladat.** *Egy összefüggő gráfban minden út hossza legfeljebb k. Bizonyítsuk be, hogy ha van két k hosszú út, akkor azok nem lehetnek pontdiszjunktak!*

Megoldás: Indirekt bizonyítunk. Az egyik maximális út vezessen a és b között, míg a másik c és d között. Ezek pontdiszjunktak és az összefüggőség miatt létezik a-ból c-be vezető út, ami előbb-utóbb elhagyja az $a \sim b$ utat, legyen az utolsó, az úton fekvő pont x (lehet, hogy $x = a$). Majd ennek az útnak $c \sim d$ úttal való első közös pontja legyen y (lehet, hogy $y = c$). Az utak távolságaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek: $|a \sim x|+|x \sim b| = |c \sim y|+|y \sim d| = k$ és $|x \sim y| \geq 1$ út is legalább egy élt tartalmaz, különben $a \sim b$ és $c \sim d$ nem pontdiszjunkt. Válasszuk $a \sim x$ és $x \sim b$ közül a nem rövidebbik utat, melynek hossza $\geq k/2$, valamint $c \sim x$ és $x \sim d$ közül a nem rövidebbiket, melynek hossza ugyancsak $\geq k/2$. A két hosszabb út $x \sim y$-nal kiegészítve egy legalább $k+1$ hosszú út, ami pedig ellentmondásban van a feltételekkel.

58. **Feladat.** *A G irányított gráfot a $V(G) = \{1, 2, \ldots, k\}$ ponthalmazon úgy definiáljuk, hogy minden olyan i, j párra, ahol $i < j$, vezessen egy irányított él i-ből j-be és az él hossza i és j legnagyobb közös osztója legyen. Határozzuk meg a legrövidebb és leghosszabb irányított utat 1-ből k-ba!*

Megoldás: A legrövidebb út csak az $(1, k)$ élből áll, ami 1 hosszúságú. Ez triviálisan a legrövidebb, mert minden él hossza legalább 1. A leghosszabb az $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(k-1,k)$ út, és hossza $k-1$. Ennél hosszabb út nem létezik, mert tetszőleges (i, j) él hossza legfeljebb $j-i$, hiszen minden közös osztó a különbségnek is osztója.

59. **Feladat.** *A G irányított gráfot a $V(G) = \{1, 2, \ldots, k\}$ ponthalmazon úgy definiáljuk, hogy minden olyan i, j párra, ahol $i < j$, vezessen egy irányított él i-ből j-be és az él hossza i és j legkisebb közös többszöröse legyen. Határozzuk meg a legrövidebb és leghosszabb irányított utat 1-ből k-ba!*

Megoldás: A legrövidebb út csak az $(1, k)$ élből áll, ami k hosszú, de minden más k-ba vezető irányított út utolsó élének a hossza legalább ennyi.

A leghosszabb az $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(k-1,k)$ út, mert tetszőleges i, j párra a legkisebb közös többszörösük nem több, mint $i \cdot j \leq (j-1) \cdot j$. Viszont a szomszédos számok mindig relatív prímek, így j és $j-1$ legkisebb közös többszöröse egyenlő $(j-1) \cdot j$. A megoldást jelentő út a gráf összes pontját érinti, és minden pontba a leghosszabb él vezet, így hosszabb út nem létezik a gráfban.

60. **Feladat.** *Legyen egy n csúcsú gráf fokszámainak összege $2n$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf tartalmaz kört.*

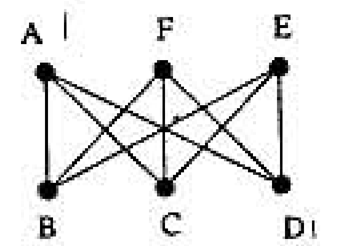
Megoldás: A fokszámok összegének fele megegyezik az élek számával, így n él van a gráfban. Egy n élű gráf nem lehet fa vagy erdő, azaz tartalmaz kört.

61. **Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy bármely, legalább ötpontú gráfban vagy a komplementerében van kör!*

Megoldás: Egy n-pontú körmentes gráfban legfeljebb $n-1$ él lehet. Ha sem a gráf, sem a komplementere nem tartalmaz kört, akkor élszámaiknak összege, vagyis $\binom{n}{2}$ legfeljebb $2n-2$ lehet. Ha $(n-1)$-gyel osztunk, $\frac{n}{2} \leq 2$ adódik.

62. **Feladat.** *Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma 3-mal egyenlő és a legrövidebb kör hossza pontosan 4.*

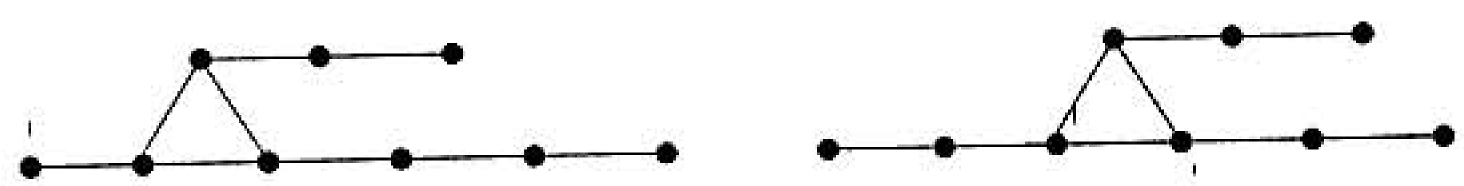
Megoldás: A megoldás a 19. ábrán látható. Kevesebb pontú megoldás nem lehetséges, mert az A pont B, C, D szomszédai egymással nem lehetnek szomszédosak, és mindegyiknek legalább 2 – 2 további szomszédja kell, hogy legyen.



19. ábra. *A legkisebb gráf 6 pontú.*

63. **Feladat.** *Legyen G egy olyan $n \geq 6$ csúcsú gráf, melynek fokszámai rendre: 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... 1, 2, 3. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van kör! Adjunk meg valamely n-re két összefüggő, a feltételeket kielégítő, nem izomorf gráfot, ha vannak ilyenek!*

Megoldás: A feladat kitűzéséből következik, hogy n 3-mal osztható szám, vagyis $n = 3k$. Ekkor a fokszámösszeg $6k$, az élszám tehát $3k$, vagyis n, márpedig az n pontú körmentes gráfban legfeljebb $n-1$ él lehet. A feltételeket kielégítő két nem izomorf gráf látható a 20. ábrán.



20. ábra. *A feltételeket kielégítő két nem izomorf 9-pontú gráf.*

64. **Feladat.** *Egy 4-reguláris gráfból töröljük egy fa éleit. Bizonyítsuk be, hogy a megmaradó gráf legalább két kört tartalmaz!*

Megoldás: Egy n csúcsú 4-reguláris gráf élszáma $\frac{4n}{2} = 2n$. Ennek egy feszítőfája vagy erdője legfeljebb $n-1$ élt tartalmazhat. A fa éleinek törlése után még $n+1$ él marad, ami kettővel több, mint a benne lévő legnagyobb feszítőerdő lehetséges élszáma. E két plusz él miatt a gráf legalább két kört fog tartalmazni .

65. **Feladat.** *Legyen G egy hatpontú egyszerű gráf, melyben minden pont foka legalább négy. Bizonyítsuk be, hogy bármely négy pontja (alkalmas sorrendben) egy kört alkot.*

Megoldás: G komplementerében minden pont maximum elsőfokú. Így bármely 4 pont olyan részgráfot feszít ki, melynek vagy 0, vagy 1 éle, vagy két diszjunkt éle van. Mindhárom esetben a részgráf komplementere tartalmaz 4 hosszú kört.

66. Feladat. *Egy véges egyszerű páros gráfban minden pont foka legalább 4. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban olyan kör, melynek hossza legalább 8.*

Megoldás: A páros gráf két pontosztályát jelölje A és B. Az A pontosztály pontjait a_i-vel jelöljük, ahol $1 \leq i \leq |A|$, hasonlóan a B pontosztály pontjait b_j-vel jelöljük, ahol $1 \leq j \leq |B|$. Legyen $\{a_1 b_1\}$ egy él. b_1-nek vannak további szomszédai is, legyen az a_2 egy ilyen. a_2-nek is vannak további szomszédai, legyen b_2 ilyen. Ilyen módon eljuthatunk egy $(a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_4 b_4)$ útig. Ha b_4 és a_1 szomszédos, készen vagyunk. Ellenkező esetben b_4 szomszédai között a_4 és az esetleges a_2, a_3 mellett kell, hogy legyen egy további a_5 is. Ha a_5 szomszédos b_1-gyel készen vagyunk. Ellenkező esetben a_5 szomszédai között b_4 és az esetleges b_2, b_3 mellett kell, hogy legyen egy további b_5 is. Ezt folytatva általában ha b_k szomszédos egy a_i-vel ($i \leq k-3$), akkor találunk egy legalább 8 hosszú kört, ha nem, akkor b_k szomszédai között a_k és az esetleges a_{k-1}, a_{k-2} mellett kell, hogy legyen egy további a_{k+1} is, illetve hasonló mondható az a_i-k irányából. A gráf végessége miatt előbb-utóbb egy kívánt tulajdonságú körhöz jutunk.

67. Feladat. *Egy 10 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 7. Bizonyítsuk be, hogy bármely három pontnak van közös szomszédja!*

Megoldás: Válasszunk ki tetszőleges három pontot, amit a-val, b-vel és c-vel fogunk jelölni. A maradék 7 pont közül a, b és c legalább 5 másik ponttal szomszédos. Így a maradék 7 pont közül létezik három olyan pont, ami a-val és b-vel is szomszédos. Viszont c-nek is legalább 5 szomszédja van a maradék 7 pontból, így legfeljebb 2 ponttal nincs összekötve, azaz létezik egy olyan pont amivel mindhárman szomszédosak.

Másik lehetséges megoldás: Ha az a, b és c pontoknak nem lenne közös szomszédja akkor a többi 7 pont mindegyike a gráf komplementerében legalább egyikükkel szomszédos lenne. De a komplementerben minden pont foka legfeljebb kettő, tehát a, b és c együtt legfeljebb 6 ponttal lehet szomszédos.

68. Feladat. *Legyen egy G gráfban a minimális és maximális fokszám δ, ill. Δ, a csúcsok és élek száma pedig n, ill. e. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\delta \leq 2 \cdot \frac{e}{n} \leq \Delta$$

Megoldás: Jelölje d_i az i-edik pont fokát. Ekkor $\delta \leq d_i \leq \Delta$ miatt

$$n \cdot \delta \leq \sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot e \leq n \cdot \Delta$$

Innen adódik az állítás.

1.5.1. Összefüggőség

69. Feladat. *Igaz-e a következő állítás? Ha egy $2n$ pontú egyszerű G gráfban minden pont foka legalább n, akkor G összefüggő.*

Megoldás: Igen. Indirekt tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő. A legkisebb elemszámú összefüggő komponens legfeljebb n csúcsú lehet. Másfelől minden pont legalább n elemmel össze van kötve, azaz egyik komponens pontszáma sem lehet kisebb mint $n+1$, ami ellentmondás.

70. Feladat. *Lehet-e egy gráfnak minden pontja elvágó pont?*

Megoldás: Nem lehet. Legyen ugyanis G egy gráf összefüggő komponense és F egy feszítőfa G-ben. Legalább két olyan p_i pont létezik, mely F-ben elsőfokú. ezek valamelyikét elhagyva $G \setminus p_i$ összefüggő marad, hisz bármely két pontja még $F \setminus p_i$-ben is összeköthető.

71. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy G gráf összefüggő, akkor pontjai megszámozhatóak (p_1 p_2 ... p_n) úgy, hogy tetszőleges k-ra $G \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ összefüggő!*

Megoldás: Az előző feladat megoldásából következik, hogy tetszőleges gráfban létezik nem elvágó pont. Válasszuk p_1-nek a G gráf egy nem elvágó pontját, majd p_2-nek $G \setminus p_1$ gráf nem elvágó pontját, stb.

72. Feladat. *Létezik-e olyan, legalább 3 pontot tartalmazó összefüggő véges gráf, amelyből bármely pontpárt törölve nem összefüggő gráfot kapunk?*

Megoldás: A 70. feladat megoldásában lényegében azt láttuk be, hogy minden gráf minden összefüggő komponensében van két olyan pont, ami nem elvágó pont. Ez pedig megadja a nemleges választ a jelen kérdésre is, hogy mindig létezik, olyan p_1 és p_2 pont, hogy $G \setminus \{p_1, p_2\}$ összefüggő.