

# Kalkulus gyakorló feladatsor

## 1. Lineáris algebra

1. Legyenek  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  olyan  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -es mátrixok, hogy  $\det(\mathbf{A}) = 2$  és  $\det(\mathbf{B}) = -1$ . Számítsa ki az alábbi mennyiségek közül azokat, ahol a mátrixszorzás illetve inverz számítás elvégezhető!

- (a)  $\det(\mathbf{AB})$
- (b)  $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$
- (c)  $\det(\mathbf{BA})$
- (d)  $\det(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$
- (e)  $\det(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{BA})$

2. Legyen  $\mathbf{A}$  az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & -3 & 0 \\ 21 & 8 & 10 & 20 \\ -7 & -4 & -5 & -13 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az  $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 \\ -21 \\ -17 \\ 18 \end{bmatrix}$  egyenletet, majd számítsa ki  $\mathbf{A}$  deter-

minánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e  $\mathbf{A}$ -nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

3. Legyen  $\mathbf{A}$  az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 12 & -7 & -2 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az  $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 9 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix}$  egyenletet, majd számítsa ki  $\mathbf{A}$  deter-

minánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e  $\mathbf{A}$ -nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

4. Tekintse az

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1 \\ 4x + 2y &= -1 \\ 5x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! Hány ismeretlen van? Hány egyenlet? Hány érdemi egyenlet? Megoldható-e ez az egyenletrendszer?

Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszerhez tartozó  $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$  egyenletet a rendszer normálegyenletének nevezzük (mindkét oldalt beszoroztuk  $\mathbf{A}^T$ -al). Írja fel a normálegyenletet és döntse el, hogy van-e megoldása!

## 2. Sorozatok

5. Bizonyítsa be a definíció szerint, hogy

$$\begin{aligned} \text{a, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 3}{n^2 + 7} &= 3 \\ \text{b, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n + \sqrt{n}}{n^2 - 1} &= \infty \end{aligned}$$

6. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{aligned} \text{a, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9n^4 - n^2 + 7} - 3n^2 \\ \text{b, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1}}{(-2)^{n-1} + 9^{n+2} + n^3} \\ \text{c, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{3n^2 + 7}{2n^2 + n + 1}} \\ \text{d, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 6}{2n^2 - 1} \right)^{n^2} \\ \text{e, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 6}{2n^2 - 1} \right)^{n+3} \end{aligned}$$

## 3. Komplex számok

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\begin{aligned} \text{a, } 4z^2 + 4z + 2 &= 0 \\ \text{b, } -2z^3 &= i \\ \text{c, } (1+i)^8 z^2 + z + 16 &= 0 \\ \text{d, } |z| + z + \bar{z} &= 3i \end{aligned}$$

## 4. Határérték, Folytonosság

8. Bizonyítsa be az alábbi határértékeket a megfelelő definíció felhasználásával!

a,  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{5 - 11x} = 4$

b,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 3x}{x + 5} = -3$

9. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a,  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{(x^2 - 1)^2}$

b,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x - 4}{(x^2 - 1)^2}$

c,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt[3]{x}) - 1}{\sin(3x)}$

d,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} [2x + 3]$  ([x]: egész rész függvény)

e,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} [2x + 3]$

10. Határozza meg az alábbi függvény szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{-1}{x} + 2 & \text{ha } -1 < x < 0 \\ \frac{3}{7} & \text{ha } x = 0 \\ \frac{\sin(3x)}{7x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$