

Alkalmazott algebra - bevezető

Ivanyos Gábor

2011 ősz

A Pagerank-ről

- Sergey Brin, Larry Page (1998)
- eljárás weblapok rangsorolására
- a linkek alapján készült gráf elemzésével

Első megközelítés

- **Elv:** az a lap az értékes, amelyre sok értékes lap mutat.
- n weblap
- i . lap súlya (értéke) a t -edik időpontban: v_i^t ($t = 0, 1, 2, \dots$)
- kezdetben $v_i^0 = \frac{1}{n}$ ($i = 1, \dots, n$)
- $t \rightarrow t + 1$ időpont:

$$v_i^{t+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^t,$$

- ahol $a_{ij} = \frac{\#j \rightarrow i \text{ linkek}}{\#j \rightarrow \text{linkek}}$
- $\sim$ milyen valószínűséggel merre jár a linkek mentén véletlenül továbblépő szörfölő

Első megközelítés

- vektor/mátrix segítségével: $v^t = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$,

$$v^{t+1} = Av^t$$

- az "ideális" weblap-súlyok vektora:

$$v^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v^t, \quad \text{ha létezik}$$

- Problémák:

- vannak weblapok, ahonnan nincs egy link se
- lehetnek weblapokból álló csoportok, ahonnan nincs kiút
- lehet ilyen csoport pl. egy irányított kör
akkor csak kivételes v^0 -ra van konvergencia!

Módosított modell - a türelmetlen szörfölő

- **Módosított mátrix:** A helyett

$$A' = (1 - \alpha)A + \alpha \frac{1}{n}E,$$

ahol $E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

- Szemléletesen: a türelmetlen szörfölő α valószínűséggel megunja a barangolást, és egy véletlenül választott lapra lép.
- Erre már létezik

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^t := \lim_{t \rightarrow \infty} A'^t v^0$$

- **Pagerank** rangsora $A'^K v_0$ súlyai szerint, ahol K elég nagy.

Test

- **Informálisan:** Egy négy alpművelettel $(+, -, \cdot, /)$ ellátott halmaz, amelyen a racionális számokon megszokott azonosságok teljesülnek.
- **Formálisan:** egy $\mathbb{F}$ halmaz két művelettel és két (különböző) kitüntetett elemmel: $+, \cdot$ illetve $0, 1$, amelyekre
 - (1) $(x + y) + z = x + (y + z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \ (\forall x, y, z \in \mathbb{F})$
(*asszociativitás*)
 - (2) $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x \ (\forall x, y \in \mathbb{F})$ (*kommutativitás*)
 - (3) $0 + x = x, 0 \cdot x = 0, 1 \cdot x = x \ (\forall x \in \mathbb{F})$ (*0 neutrális elem, 1 egységelem*)
 - (4) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \ (\forall x, y, z \in \mathbb{F})$ (*disztributivitás*)
 - (5) $\forall x \in \mathbb{F}$ -re van $(-x) \in \mathbb{F}$, hogy $x + (-x) = 0$,
 $\forall 0 \neq x \in \mathbb{F}$ -re van $x^{-1} \in \mathbb{F}$, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$,
 ($+$ -ra minden, $\cdot$ -ra minden nem-nulla elemnek van inverze)
- **Kivonás, osztás:** Belátható, hogy $-x$ és x^{-1} egyértelmű.
 $x - y := x + (-y)$ és $x/y := x \cdot y^{-1}$.

Példák testekre

- $\mathbb{Q}$ racionális számok
- $\mathbb{R}$ valós számok
- $\mathbb{C}$ komplex számok
- $\mathbb{Z}_p$ vagy $\mathbb{F}_p$: egész számok modulo p prím
 $\mathbb{Z}_2$ másképpen: $\{1 = \text{"igaz"}, 0 = \text{"hamis"}\}$
 $+$ = "kizáró vagy", $\cdot$ = "és".
- $\mathbb{F}_q$, q elemű test, ahol $q = p^r$ (p prím). Lényegében (azaz: izomorfia erejéig) egyértelmű.
- **Feladat:** legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. Ekkor létezik egy (és csak egy) olyan p prímszám, hogy $1 + \dots + 1 (p\text{-szer}) = 0$.

Polinomok

- **n -ed fokú egyváltozós polinom:**

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{F}, a_n \neq 0).$$

- **gyök** olyan $\alpha \in \mathbb{F}$, amelyre $f(\alpha) = 0$.

- **Fontos tul.:** Egy n -ed fokú polinomnak legfeljebb n gyöke van.

- **Algebra alaptétele:** Minden komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$ -ben (multiplicitással számolva összesen fokszámnyi)

Vektortér $\mathbb{F}$ felett

- Egy V halmaz
 - $+: V \times V \rightarrow V$ (összeadás) művelettel,
 - kitüntetett 0 elemmel,
 - $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ (skalárokkal való szorzás vagy beszorzás) művelettel,
- amelyekre:
 - $+$ kommutatív és asszociatív, 0 neutrális elemmel,
 - $\cdot$ asszociatív: $(x \cdot y) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$ ($x, y \in \mathbb{F}, v \in V$)
 - $\cdot$ mindkét oldalról disztributív:

$$(x + y) \cdot (u + v) = x \cdot u + y \cdot u + x \cdot v + y \cdot v \quad (x, y \in \mathbb{F}, u, v \in V)$$
- Megj.: Additív inverz V -ben: $-v := (-1) \cdot v$.
- **Fontos példa:** az n hosszú oszlopvektorok $\mathbb{F}^n$ tere

Példák

- S halmaz, $S \rightarrow \mathbb{F}$ függvények; értékek szerinti összeadással és beszorzással.
 $\sim S$ elemeivel indexelt táblázatok, $\mathbb{F}$ -beli elemekkel kitöltve.
- Spec. eset: $n \times m$ -es mátrixok $\mathbb{F}$ -beli elemekkel. Műveletek elemenként.
- Speciális eset: $m = 1$, n hosszú **oszlopvektorok**.
- Polinomok. (Összeadás, beszorzás érték szerint ugyanazt adják, mintha az együtthatókon külön-külön hajtánánk végre.)
- n -nél alacsonyabb fokú polinomok.
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények.
- $\mathbb{C}$ az $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ felett.

Alterek

- **Lineáris kombináció:** $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ahol $0 \neq v_i$ és $v_i \neq v_j$ ha $i \neq j$.

Megj. Mindig véges sok tagból álló összeg! Az üres összeg is lin. komb., értéke 0.

- **Altér:** $U \subseteq V$ altere V -nek (jel. $U \leq V$), ha $0 \in U$ is zárt a műveletekre: $u, v \in U, \alpha \in \mathbb{F}$ esetén $u + v, \alpha u \in U$.

Ekvivalens feltétel: U zárt a lineáris kombinációkra is.

- **Példák:**

- A legszűkebb altér: $\{0\} = (0)$ (hanyagul: 0),
- a legtágabb: V .
- origón átmenő síkok, egyenesek $\mathbb{R}^3$ -ben
- polinomok, folytonos függvények, stb. altere a függvények terében
- homogén lineáris n -változós egyenletrendszerek megoldásai $\mathbb{R}^n$ -ben (Spec. eset: hipersík $\mathbb{R}^n$ -ben: egy nem-triviális n változós homogén lineáris egyenlet megoldásai)

Generált (kifeszített) altér

- $S \subseteq V$ -re $\langle S \rangle$ a legszűkebb altér, amely tartalmazza S -t.

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S \right\}.$$

- $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$, $\langle v \rangle = \langle \{v\} \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$.

- **További példák:**

- polinomok között az $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ monomok az n -nél alacsonyabb fokú polinomok alterét generálják
- **Feladat:** Mely alteret feszítik ki a következő polinomok:
 $x^3 + x^2 + x$, $x^3 + 2x^2 + 3x$, $x^3 + x$, $x^3 + 3x^2$?

Lineáris függetlenség

- $S \subseteq V$ lineárisan független, ha $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, α_i, v_i ($i = 1, \dots, n$) $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ esetén az összes $\alpha_i = 0$.
- $\emptyset$ lineárisan független, $\{0\}$ lineárisan összefüggő.
- **Áll.:** Ha S lineárisan független, de $S \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő, akkor v (egyértelműen) előáll S -beli elemek lineáris kombinációjaként.

- **Példa:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineárisan függetlenek:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}.$$

Lineáris függetlenség

- **Példa:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineárisan összefüggenek:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

- **Kapcsolat a generált alterekkel:** $S \subseteq V$ lineárisan független $\iff S$ egy irredundáns (tartalmazásra minimális) generátorrendszere az $\langle S \rangle$ altérnek.
- **Feladat:** Lineárisan függetlenek-e a következő polinomok:
 $x^3 + x^2 + x$, $x^3 + 2x^2 + 3x$, $x^3 + x$, $x^3 + 3x^2$?

Bázis

- Olyan lineárisan független rendszer, amely generálja V -t.
- **Ekvivalens jellemzések:**
 - minimális generátorrendszere V -nek,
 - maximális lineárisan független rendszer V -ben,
 - minden v -beli elem **egyértelműen felírható** a rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként.
- **Megj.:** Sorba rendezzük a bázis elemeit, különböző sorrend $\rightarrow$ különböző bázis.
- **Példák:**

- standard bázis $\mathbb{F}^n$ -ben

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- polinomok közt $1, x, x^2, \dots$

Dimenzió

- $\dim V$, pontosabban $\dim_{\mathbb{F}} V = V$ egy bázisának elemszáma (számossága).
- független a bázis választásától
- **Példák:**
 - ha S véges, akkor $\dim\{S \rightarrow \mathbb{F} \text{ függvények}\} = |S|$
 - spec. eset: $\dim\{n \times m\text{-es mátrixok}\} = nm$
 - $\dim\{\text{polinomok}\} = \infty$ (megszámlálható)
 - $\dim\{n\text{-nél alacsonyabb fokú polinomok}\} = n$
 - $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$ (kontinuum)
 - Ha $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, akkor $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

Az órán általában **csak véges dimenziós** vektorterekkel foglalkozunk.

Lineáris leképezések

- V, W vektorterek $\mathbb{F}$ felett. A $\phi : V \rightarrow W$ lekép. **lineáris**, ha

$$\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \phi(v_1) + \alpha_2 \phi(v_2).$$

- **Konvenció:** elhagyjuk a zárójelet: $\phi v := \phi(v)$.
- **Fontos példa:** A $m \times n$ -es mátrix $\mathbb{F}$ -beli elemekkel.

$$\phi_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad \phi_A v := Av.$$

- **Vektortér-műveletek:** $\phi, \phi' : U \rightarrow W$ esetén
 $(\alpha\phi + \phi')v := \alpha(\phi v) + (\phi' v).$
- **Kiterjesztés bázisról:** Ha $v_1, \dots, v_n$ egy bázis V -ben;
 $w_1, \dots, w_n \in W$, $\exists!$ $\phi : V \rightarrow W$ lin. lekép., hogy $\phi v_i = w_i$
 $(i = 1, \dots, n)$: $\phi \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i.$
- A $V \rightarrow W$ lin. lekép. terének dimenziója $\dim V \cdot \dim W$.

Lineáris leképezések

■ Speciális esetek:

Lineáris függvény: $V \rightarrow \mathbb{F}$ lin. lekép.

Lineáris transzformáció: $V \rightarrow V$ lin. lekép.

■ Példák:

- $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ rögzített oszlopvektor.

- $A \ v \mapsto u^T v$ egy lineáris függvény $\mathbb{R}^n$ -en.

- $A \ v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ egy lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$ -en: az u -ra merőleges hipersíkra történő vetítés.

- $A \ v \mapsto v - 2 \frac{u^T v}{u^T u} u$ pedig az u -ra merőleges hipersíkra való tükrözés

- Az $I_V : v \mapsto v$ a V tér identikus lineáris transzformációja.

- Rögzített $a \in \mathbb{F}$. Ekkor az $f(x) \mapsto f(a)$ egy $\mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}$ lineáris függvény.

Képtér, magtér

$\phi : V \rightarrow W$ lineáris leképezés

■ ϕ **képtere** a

$$\phi V = \{\phi v \mid v \in V\}$$

halmaz. Ez altér W -ben.

(Szokásos még az $\text{Im } \phi$ jelölés is.)

ϕ *szürjektív*, ha $\phi V = W$

■ ϕ **magja** (magtere) a

$$\ker \phi := \{v \in V \mid \phi v = 0\}$$

halmaz. Ez altér V -ben.

ϕ *injektív*, ha $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ csak $v_1 = v_2$ esetén teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy $\ker \phi = \{0\}$.

- **Példa:** $u \in \mathbb{R}^n$, $\pi : v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ vetítés. $\ker \pi = \mathbb{R}u$,
 $\pi \mathbb{R}^n = u^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid u^T w = 0\}$.

Dimenziótétel

$\phi : V \rightarrow W$ lineáris leképezés

- **Dimenziótétel:** $\dim \phi V = \dim V - \dim \ker \phi$.
- **Izomorfizmus:** A $\phi : V \rightarrow W$ lineáris lekép. izomorfizmus V és W között, ha ϕ bijektív, azaz egyszerre injektív és szürjektív.
Ekkor a $\phi^{-1} : W \rightarrow V$ **inverz** leképezés is lineáris (és így izomorfizmus).
 $V \cong W$, ha létezik $\phi : V \rightarrow W$ izomorfizmus.
 $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.
A dimenziótételből adódik:
- **Egy egyszerű izomorfizmus-kritérium:** $\phi : V \rightarrow W$ lin. lekép. izomorfizmus $\Leftrightarrow \ker \phi = (0)$ és $\dim V = \dim W$.

Alkalmazás: Lagrange-interpoláció

- $V = \{n\text{-nél} < \text{fokú } \mathbb{F} \text{ feletti polinomok}\}$
- rögzített $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ ($a_i \neq a_j$ ha $i \neq j$)
- **Behelyettesítés:** $\phi : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ a következő lin. lekép. a köv.:

$$\phi f(x) := \begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$$

- ϕ **lineáris**, mert minden összetevője az.
- $\ker \phi = (0)$
(n -nél alacsonyabb fokú nem 0 polinomnak nem lehet n kül. gyöke)
- $\dim V = n = \dim \mathbb{F}^n$
az előző kritérium miatt
- ϕ **izomorfizmus**, létezik tehát inverze.

Alkalmazás: Lagrange-interpoláció

■ Interpoláció:

Tétel: $(a_1, \dots, a_n)$ páronként kül. $\in \mathbb{F}$, tetsz. $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ esetén $\exists!$ $f(x)$ n -nél $<$ fokú pol., amelyre:

$$f(a_1) = b_1, \dots, f(a_n) = b_n.$$

■ konkrétan:

$$f(x) = \phi^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- **Megj.:** Spec. eset: Diszkrét Fourier Transzformáció (**DFT**), ld. később
- **Megj.:** Ha $n + d$ helyen helyettesítünk be, akkor $f(x)$ rekonstruálható az $n + d$ közül bármely n helyen felvett értékéből. Fontos **hibajavító kódok** működnek ezen az elven.

Alkalmazás: A Shamir-féle titokmegosztás

- **A feladat:** n résztvevő között osszunk szét egy titkot, hogy
 - semelyik $n - 1$ ne tudja együtt se kitalálni,
 - de az n résztvevő együtt ki tudja találni
- **A titok:** egy $\mathbb{F}$ véges test egy eleme, ahol $|\mathbb{F}| > n$
- **Előkészület:** $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ($\alpha_i \neq \alpha_j$)
 i -edik résztvevőé α_i (nyilvánosan)
- **Titokmegosztás:**
 - Tfh. a titok β .
 - $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ véletlen elemek $\mathbb{F}$ -ből (függetlenül, egyenletes eloszlással)
 - $f(x) = f_{\beta, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}}(x) := \beta + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x^i$
 - i -edik résztvevő kapja $f(\alpha_i) - t$ (privát csatornán)

A Shamir-féle titokmegosztás

- **Együtt kitalálják:** $f(x)$ interpolálható az n helyen felvett értékből, $\beta = f(0)$.
- **Kevesebben nem találják ki:** (pl. az első $n - 1$ a véletlen tippnél jobbat nem tud)

$$\phi : \begin{pmatrix} \beta \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$$

- $\phi : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ bijekció. mert $\ker \phi = (0)$.

A Shamir-féle titokmegosztás

- Ezért minden rögzített β -ra

$$\phi_\beta : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$$

- is bijekció $\mathbb{F}^{n-1}$ és $\mathbb{F}^{n-1}$ között.

- Így az $\begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$ vektor egyenletesen véletlen $\mathbb{F}^{n-1}$ -ből, β -től teljesen függetlenül.

- Azaz: minden β -ra ugyanaz az $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{n-1})$ értékek eloszlása.

Kompozíció, inverz

- $\phi : V \rightarrow V', \phi' : V' \rightarrow V''$ lin. lekép.
- Ekkor $\phi'\phi : V \rightarrow V''$ is lin.

$$(\phi'\phi)v = \phi'(\phi v)$$

- Asszociatív:
ha még $\phi'' : V'' \rightarrow W$ akkor $\phi''(\phi'\phi) = (\phi''\phi')\phi$
- Mindkét oldalról lineáris:
 $(\alpha_1\phi'_1 + \alpha_2\phi'_2)(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2) = \alpha_1\beta_1\phi'_1\phi_1 + \alpha_1\beta_2\phi'_1\phi_2 + \alpha_2\beta_1\phi'_2\phi_1 + \alpha_2\beta_2\phi'_2\phi_2.$
- Inverz: $\phi^{-1} : V' \rightarrow V$, ha ϕ bijektív.
- Inverz tul.: $(\phi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\phi^{-1}$ és $(\phi^{-1})^{-1} = \phi.$
- Hatványozás: Tfh. $\phi : V \rightarrow V$. Ekkor $\phi^n = \phi \cdots \phi$ (n -szer).

Mátrixok, formális műveletek

- $m \times n$ -es mátrixok $\sim m \times n$ -es táblázatok $\mathbb{F}$ -beli elemekkel.
- $m \times n$ dimenziós vektortér (műveletek elemenként)
- **Mátrixszorzás:** Ha $A = (a_{ij})$ $m \times \ell$ -es, $B = (b_{ij})$ $\ell \times n$ -es, akkor $AB = (d_{ij})$ $m \times n$ -es:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}, \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n).$$

- Azaz: AB i -edik sorának j -edik eleme az A i -edik sorának és a B j -edik oszlopának a "skaláris szorzata".
- **Szorzás tul.:** A szorzás asszociatív és mindkét változójában lineáris.
- **Vigyázat:** Nem kommutatív, sőt gyakran nem is végezhető el a szorzás a fordított sorrendben.

Mátrixok: példák

■ diagonális mátrixok:

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

- $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$,
zárt a szorzásra, felcserélhetőek
- **egységmátrix:** $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$ (n darab 1-es)
- **négyzetes felső háromszög-mátrixok**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zárt a szorzásra

További felső háromszög-mátrixok

- "lapos" ($m < n$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * & * \\ & a_{22} & * & * & * & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{mm} & * & * \end{pmatrix}$$

- "magas" ($m > n$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Transzponált mátrix

- ha $A = (a_{ij})$ $m \times n$ -es, akkor $A^T = (a'_{ij})$ $n \times m$ -es, ahol

$$a'_{ij} = a_{ji}.$$

- **Tul.:** Ha A $m \times n$ -es, B $n \times k$ -as, akkor

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

- Felső háromszög transzponáltja alsó háromszög

Blokk-mátrixok szorzása

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\ell} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{12} & \dots & A_{m\ell} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & \dots & B_{2n} \\ B_{31} & \dots & B_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1} & \dots & B_{\ell n} \end{pmatrix},$$

ahol a blokkméretek kompatibilisek. Ekkor

$$AB = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & D_{12} & \dots & D_{mn} \end{pmatrix},$$

ahol

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} A_{ik} B_{kj}.$$

Vigyázat: a blokkok szorzása általában nem kommutatív!

Hasznos, ha 0-blokkok vannak, pl. blokk felső háromszög. 

Strassen algoritmus a mátrixszorzásra

A, B $2^n \times 2^n$ -es, felosztva $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ -es blokkokra:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

ahol

$$D_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21},$$

$$D_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22},$$

$$D_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21},$$

$$D_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}.$$

Strassen-mátrixszorzás - 7 szorzat

$$T_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}),$$

$$T_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11},$$

$$T_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}),$$

$$T_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}),$$

$$T_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22},$$

$$T_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}),$$

$$T_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}).$$

Ezekkel:

$$D_{11} = T_1 + T_4 - T_5 + T_7,$$

$$D_{12} = T_3 + T_5,$$

$$D_{21} = T_2 + T_4,$$

$$D_{22} = T_1 - T_2 + T_3 + T_6.$$

Strassen-mátrixszorzás - rekurzió

- Költség: 7 db. 2^{n-1} -es mátrixszorzás, 18 db. összeadás - kivonás
- $K_n = 7K_{n-1} + c4^{n-1}$
- $K_n = O((7 + o(1))^n)$
- $N \times N$ -es mátrixokra ($N \sim 2^n$):

$$O(N^{\log_2 7 + o(1)}) = O(N^{2.808})$$

Lineáris leképezés mátrixa

- $\phi : V \rightarrow W$ lin. lekép. $v_1, \dots, v_n$ bázis V -ben, $w_1, \dots, w_m$ bázis W -ben. Ekkor minden $1 \leq j \leq n$ -re

$$\phi v_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i$$

- ϕ mátrixa (a fenti bázispárra) $A = (\alpha_{ij})$.
- lin. transzformációra ($V = W$) egyetlen (közös) bázis a szokás ($w_i = v_i$).
- **Példa: permutációmátrix:** π permutáció, $\phi v_j = v_{\pi(j)}$.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = \pi(j) \\ 0, & \text{ha } i \neq \pi(j) \end{cases}$$

Minden sorban és oszlopban egyetlen 1-es, a többi 0.

Példa permutációmátrixra

- az $(12 \dots n)$ ciklus mátrixa

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Mátrixhoz tartozó lineáris leképezés:

- $v_1, \dots, v_n$ bázis V -ben, $w_1, \dots, w_m$ bázis W -ben, A $m \times n$ -es mátrix.
- Ekkor $\exists! \phi : V \rightarrow W$, aminek A a mátrixa (a fenti bázispárra).

- **Megj.:** $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

és $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, w_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ esetén ez a ϕ éppen a korábban már

említett ϕ_A , az oszlopvektorok A -val balról szorzása. Ezután ϕ_A helyett gyakran A .

Műveletek leképezésekkel ill. mátrixaikkal

- összeadás $\leftrightarrow$ összeadás
- skalárral való szorzás $\leftrightarrow$ skalárral való szorzás
(= skalármátrixszal való szorzás)
- kompozíció $\leftrightarrow$ mátrixszorzás
- **Inverz:** A $n \times n$ -es. A **invertálható**, (**reguláris**, **nemelfajuló**, **nem-szinguláris**) ha a ϕ_A bijektív. Ekkor A^{-1} a $(\phi_A)^{-1}$ mátrixa a standard bázisban.
- Ha A invertálható, akkor $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- **Képtér:** A (azaz ϕ_A) képtere az A oszlopai által generált altér
- **Köv.:** A $n \times n$ -es invertálható $\Leftrightarrow$ oszlopai lin. függetlenek

Példa: Vandermonde-mátrix

- $V = \{\text{az } n\text{-nél } < \text{ fokú polinomok}\}, W = \mathbb{F}^n$.
- Bázisok: $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, ill. a standard.
- $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ páronként kül. $\phi : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ behelyettesítés

$$\phi : f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$$

- ϕ mátrixa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Tudjuk: ϕ izomorfizmus, így M invertálható
(és az inverze a Lagrange-interpoláció mátrixa).

Báziscsere, hasonló mátrixok

- $v_1, \dots, v_n$ ill. $v'_1, \dots, v'_n$ bázisok
- **Báziscsere mátrixa** $C = (c_{ij})$

$$v'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i$$

(C a $v_j \mapsto v'_j$ lin. transzf. mátrixa $v_1, \dots, v_n$ -ben)

- $\phi: V \rightarrow V$ lin. transzf. mátrixa $v_1, \dots, v_n$ -ben A
- ϕ mátrixa $v'_1, \dots, v'_n$ -ben

$$C^{-1}AC.$$

- **Megj.:** különböző terek közti lin. leképezésekre két cseremátrix van

Báziscsere - példa

- legyen

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

- ahol A, B, C, D $n \times n$ -es mátrixok.
- **Báziscsere:** $1. \leftrightarrow n+1., \dots, n. \leftrightarrow 2n.$, mátrixa

$$T = \begin{pmatrix} & I_n \\ I_n & \end{pmatrix}.$$

- Mivel $T^2 = I_{2n}$, $T^{-1} = T$.
- A blokk-mátrixok szorzását használva:

$$\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

- Például a $B = 0$ esetben M alsó blokk-háromszög mátrix, amiből a báziscsere felső blokk-háromszög mátrixot csinál.

Hasonló mátrixok

- A, A' $n \times n$ -es hasonlóak ($A \sim A'$), ha létezik C invertálható, hogy $A' = C^{-1}AC$.
- ugyanannak a lin. transzformációnak a mátrixai csak más-más bázisban
- Az A -val való balról szorzás mátrixa a standard bázisban A a C oszlopaiból álló bázisban $C^{-1}AC$.
- $A \mapsto C^{-1}AC$ leképezés kompatibilis a mátrixműveletekkel:

$$C^{-1}(\lambda A + \mu B)C = \lambda C^{-1}AC + \mu C^{-1}BC,$$

$$C^{-1}ABC = C^{-1}ACC^{-1}BC.$$

Determináns

■ Permutáció előjele:

- $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ permutáció (bijekció)
- (i, j) inverzió π -re, ha $1 \leq i < j \leq n$ és $\pi(i) > \pi(j)$
- $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{\text{inverziók száma}}$
- multiplikatív: $\text{sgn}(\pi_1 \pi_2) = \text{sgn}(\pi_1) \text{sgn}(\pi_2)$.

■ Determináns: $A = (a_{ij})$ $n \times n$ -es

$$\det A = \sum_{\pi \text{ perm}} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

- $n!$ tag van
- permutációmátrixra: Ha P π mátrixa, akkor $\det P = \text{sgn}(\pi)$.

Példák

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ -ra $\det A = ad - bc$.
- $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$
 $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$
- Egy alsó vagy felső háromszögmátrix determinánusa a diagonális elemek szorzata.
- Ha $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ahol A és C négyzetes, akkor $\det M = \det A \cdot \det C$.
- Ha $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, akkor
 $\det A = \det B = \det C = \det D = 0,$
míg $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -abcd$, tehát $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ általában nem fejezhető ki
pusztán $\det A, \det B, \det C, \det D$ -vel.

Elemi tulajdonságok

- **Transzponált determinánsa:** $\det A^T = \det A$
- **Kifejtési tétel (Laplace):** $A = (a_{ij})$ $n \times n$ -es. Minden egyes (i, j) -re C_{ij} az az $(n-1) \times (n-1)$ -es, amely A -ból az i -edik sor és a j oszlop elhagyásával adódik.

Tetsz. i -re és j -re:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det C_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det C_{ik}.$$

- **Linearitás oszlopok szerint:** Minden egyes j -re és $v \in \mathbb{F}^n$ vektorra $A_j(v)$ az a mátrix, ami az A mátrixból j -edik oszlopának v -vel való helyettesítésével kapható.

Ekkor $\det A_j(\lambda u + \mu v) = \lambda \det A_j(u) + \mu \det A_j(v)$.

- Linearitás sorok szerint...

Elemi tulajdonságok

- **Köv. (Nullákból álló oszlop (sor)):** Ha van ilyen, akkor a determináns 0.
- **Skalárszoros oszlopok** Ha A -nak van két olyan oszlopa (sora), hogy az egyik a másik skalárszorosa, akkor $\det A = 0$.
- **Sor- és oszlopműveletek hatása:** $\det A$
 - marad, ha A egy oszlopához (sorához) hozzáadjuk egy másik oszlopának (sorának) skalárszorosát.
 - marad, ha A egy oszlopához (sorához) hozzáadjuk néhány, tőle különböző indexű oszlopának (sorának) egy tetszőleges lineáris kombinációját.
 - α -val szorzódik, ha A egy oszlopát (sorát) α -val beszorozzuk.
 - előjelet vált (-1 -gyel szorzódik), ha A két oszlopát megcseréljük.
- $\Rightarrow$ számolható Gauss-eliminációval
- $\Rightarrow$ Szinguláris mátrix determinánsa 0

Szorzat determinánása

- **Determinánsok szorzástétele:** Ha A és B $n \times n$ -es mátrixok, akkor

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

- **Köv. (Inverz determinánása):** Ha A invertálható, akkor $\det A \neq 0$ és

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

- **Köv. (Hasonló mátrixok determinánása):**
 $\det(C^{-1}AC) = \det A.$

- **Lineáris transzformációk determinánása:** Bármely bázis szerinti mátrix determinánása.

Inverz mátrix előjeles aldeterminánsokkal

- $A = (a_{ij})$ $n \times n$ -es.
- C_{ij} az A -ból az i -edik sor és a j -edik oszlop elhagyásával adódó $n - 1 \times n - 1$ -es mátrix
- (i, j) -edik előjeles aldetermináns $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$.
- Ha A invertálható és $A^{-1} = (a'_{ij})$, akkor

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det C_{ji}}{\det A}.$$

- **Figyelem:** C_{ji} , nem C_{ij} !

Mátrixok rangja

- Lin. független oszlopok max. száma (A képtér dimenziója)
- Max. méretű. invertálható négyzetes részmátrix
- Lin. független sorok max. száma

Lineáris egyenletrendszer



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- másképpen: $Ax = b$,

$$\text{ahol } A = (a_{ij}) \text{ } m \times n\text{-es, } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- Az egyenletrendszer **mátrixa** A ,
- a **kibővített mátrixa** az $(A|b)$ $m \times (n + 1)$ -es.

A Cramer-szabály

$m = n$ és tfh. A invertálható.

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A} \quad (j = 1, \dots, n),$$

ahol $A_j(b)$: A j -edik oszlopát helyettesítjük a b oszlopvektorral.

nem praktikus

Megoldás Gauss-eliminációval

- Összetevők: Ekvivalens egyenletrendszert kapunk, ha
 - egy egyenlethez egy másik egyenlet skalárszorását adjuk
 - egyenletet egy skalárral beszorozzuk
 - átrendezzük az egyenletek sorrendjét
 - átrendezzük a változók sorrendjét

Az első három összetevő a determinánsnál már alkalmazott sorműveleteknek felel meg, az utolsó az oszlopok cseréjének.

- Első iteráció
 - Legelső lépés: cserékkel elérhető, hogy $a_{11} \neq 0$.
Az első egyenlet segítségével x_1 -et kiküszöböljük a többi egyenletből.
 - Folytatjuk a többi egyenlettel, a többi változóra
- Az üres egyenletekkel ($0 = 0$) nem törődünk
- Ha lett $0 = b_i$ egyenlet, ($b_i \neq 0$), nincs megoldás

Gauss-elimináció II.

- Az első menet után felső háromszög alakú:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{mm}x_m + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- Második iteráció: A főátló feletti részt kiküszöböljük:

$$a_{11}x_1 \quad \quad \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 \quad \quad \quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Gauss-elimináció III.

- Majd leosztunk az átlós együtthatókkal:

$$x_1 \quad \quad \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$x_2 \quad \quad \quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- Eredmény: $x_{m+1}, \dots, x_n$ szabad paraméterek,

$$x_1 = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n$$

$$x_2 = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n$$

Példa

Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_5 = 1$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_2 + x_5 = 1.$$

A kibővített mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Példa II

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Az első sort levonjuk másodikból

Példa III

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A második sort levonjuk a negyedikből

Példa IV

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A második sort levonjuk az ötödikből

Példa V

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A harmadik sort levonjuk a negyedikből

Példa VI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az utolsó sor a $0 = 1$ ellentmondásnak felel meg, ez az egyenletrendszer tehát **nem megoldható**.

Példa VII

Tfh. az $x_2 + x_5 = 1$ egyenlet helyett az $x_2 + x_5 = 0$ áll. Ekkor az eddigi lépések eredménye

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Levonjuk a második sort az elsőből:

Példa VIII

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A megoldás: x_4, x_5 tetszőleges és $x_1 = x_5 + 1$, $x_2 = x_5$, $x_3 = x_4 + 1$.

Gauss-elimináció további alkalmazásai

- Rang számolása
- Determináns számolása

Ezekhez elegendő az első iterációs menet

Sajátértékek, sajátvektorok, sajátalterek

- $\phi : V \rightarrow V$ lin. transzf.
- $0 \neq v \in V$ sajátvektora ϕ -nek $\lambda \in \mathbb{F}$ sajátértékkel, ha $\phi v = \lambda v$.
- **Példa:** Legyen $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $v_{t+1} = \phi v_t$ (mint pl. Pagerank-nél.)
Tfh. létezik

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} v_t \text{ és } v \neq 0.$$

Ekkor v sajátvektora ϕ -nek 1 sajátértékkel.

- **Biz.** $v_{t+1} = \phi v_t$
- $v \mapsto \phi v$ folytonos
- $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{t+1} = \phi \lim_{t \rightarrow \infty} v_t$
- $v = \phi v$.
- **Sajátaltér:** a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a 0-val együtt.
- **Példa:** ϕ szinguláris $\Leftrightarrow 0$ egy sajátértéke.
Ekkor a magtér a megfelelő sajátaltér.

Sajátértékek, sajátvektorok, sajátalterek -példa

$\mathbb{R}^n$ -en $\pi : v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ vetítés

- 1 egy sajátérték, ha $n > 0$. Ekkor a sajátaltér $u^\perp$
- 0 sajátérték, u egy sajátvektor
- $u^\perp$ -en és $\langle u \rangle$ -n kívül nincs más sajátvektor:
Tfh. $v = \alpha u + w$ sajátvektor $0 \neq \lambda$ sajátértékkel. Ekkor

$$\lambda \alpha u + \lambda w = \lambda v = \pi v = \pi \alpha u + \pi w = w,$$

így $\alpha = 0$ és $\lambda = 1$.

- $n > 1$: két sajátérték: 1 és 0, a két sajátaltér $u^\perp$ és $\langle u \rangle$.

Sajátalterek együttesen

- **Alterek lineáris függetlensége:** $(0) \neq W_1, \dots, W_s \leq V$ lin. függetlenek, ha
 $w_1 + \dots + w_s = 0$ ($w_i \in W_i$) $\Rightarrow w_i = 0$ ($i = 1, \dots, s$)
- $v_1, \dots, v_s$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_s \rangle$ lin. ftlenek
- **Áll.:** $(0) \neq W_1, \dots, W_s \leq V$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow$
 $\dim \langle W_1, \dots, W_s \rangle = \dim W_1 + \dots + \dim W_s$
- **Áll.: A sajátalterek lin. ftlenek.:** $\phi v_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \neq \lambda_j$,
 $v_1 + \dots + v_s = 0 \Rightarrow v_1 = \dots = v_s = 0$.
 - **Biz.** indukció s szerint. $s = 1$ -re triviális.
 - $s > 1$: $v_1 + \dots + v_s = 0$. Ekkor
 - $0 = \phi(v_1 + \dots + v_s) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$, ugyanakkor
 - $0 = \lambda_1(v_1 + \dots + v_s) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_1 v_s$. Kivonva:
 - $(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + (\lambda_s - \lambda_1)v_s = 0$. Innen
 - az indukciós feltevés miatt $(\lambda_i - \lambda_1)v_i = 0$, így $v_i = 0$ ($i > 1$).
 - marad a $v_1 = 0$

Alterek lin. függetlensége - pótlap

$$(0) \neq W_1, \dots, W_s \leq V$$

■ **Áll.:** $W_1, \dots, W_s$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow \dim \langle W_1, \dots, W_s \rangle = \dim W_1 + \dots + \dim W_s$

■ **konkrétan:** Legyen $w_1^1, \dots, w_{n_1}^1$ bázis W_1 -ben, ...

$w_1^s, \dots, w_{n_s}^s$ bázis W_s -ben. Ekkor:

$W_1, \dots, W_s$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, \dots, w_1^s, \dots, w_{n_s}^s$

lin. ftlen.

Biz. $\Rightarrow$: Tfh.

$\alpha_1^1 w_1^1 + \dots + \alpha_{n_1}^1 w_{n_1}^1 + \dots + \alpha_1^s w_1^s + \dots + \alpha_{n_s}^s w_{n_s}^s = 0$. Ekkor

$W_1, \dots, W_s$ lin. ftlensége miatt $\alpha_1^1 w_1^1 + \dots + \alpha_{n_1}^1 w_{n_1}^1 = 0, \dots,$

$\alpha_1^s w_1^s + \dots + \alpha_{n_s}^s w_{n_s}^s = 0$. $w_1^i, \dots, w_{n_i}^i$ lin. ftlensége miatt az összes $\alpha_j^i = 0$.

$\Leftarrow$: Tfh. $u_i \in W_i$ -vel $\sum_{i=1}^s u_i = 0$. Ekkor $u_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i w_j^i$

alakú és $\alpha_1^1 w_1^1 + \dots + \alpha_{n_1}^1 w_{n_1}^1 + \dots + \alpha_1^s w_1^s + \dots + \alpha_{n_s}^s w_{n_s}^s = 0$,

így $w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, \dots, w_1^s, \dots, w_{n_s}^s$ lin. ftlensége miatt az összes

$\alpha_j^i = 0$, így mindegyik $w_j = 0$.

Sajátalterek együttesen, diagonalizálható mátrixok

Következmények ($\mathbb{C}$ felett)

- ϕ sajátaltéréinek dimenzióinak összege $\leq \dim V$
- ϕ -nek legfeljebb $\dim V$ különböző sajátértéke van
- **Spektráltétel spec. esetre:** Ha ϕ -nek van $\dim V$ különböző sajátértéke, akkor V -nek van ϕ sajátvektoraiból álló bázisa, azaz olyan bázis, amiben ϕ mátrixa diagonális
- **Mátrixokra.: Def.:** az A $n \times n$ -es komplex mátrix **diagonalizálható**, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz: azaz $\exists C$ invertálható, hogy $C^{-1}AC$ diag.
azaz $\exists A$ -nak (az A -val való balról szorzásnak) sajátvektoraiból álló bázisa $\mathbb{C}^n$ -nek
- Ha A -nak van n kül. sajátértéke $\mathbb{C}$ -ben, akkor A diagonalizálható

Példák diagonalizálható és nem diagonalizálható mátrixra

- a λI skalármátrix diagonális, pedig csak 1 sajátértéke van
- $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sajátértékei 1 és -1 , az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, illetve $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sajátvektorokkal.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nem diagonalizálható.
 - **Biz.:** Tfh. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$
 - Mivel $A^2 = 0$, $(C^{-1}AC)^2 = C^{-1}ACC^{-1}AC = C^{-1}A^2C = 0$,
 - tehát $\lambda_i^2 = 0$ ($i = 1, 2$)
 - ugyanakkor $A \neq 0 = \text{diag}(0, 0)$.

Tanulság

- **Áll.:** Ha $f(x)$ egy polinom, hogy $f(A) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$ minden komplex sajátértékre

Biz.:

Legyen $0 \neq v$, hogy $Av = \lambda v$.

Ekkor $A^i v = \lambda^i v$ ($i = 0, 1, \dots$)

Így $g(A)v = g(\lambda)v$ tetsz. g polinomra

$0 = f(A)v = f(\lambda)v$,

$v \neq 0$ miatt így $f(\lambda) = 0$.

- fordítva ált. nem igaz
- diagonalizálhatóra fordítva is igaz

Jordan-normálalak

Tétel: Minden négyzetes komplex mátrix hasonló egy alábbi alakúhoz:

$$\left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{array}} \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{cccc} \mu & 1 & & \\ & \mu & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1 \\ & & & & \mu \end{array}} \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{cccc} \nu & 1 & & \\ & \nu & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \nu & 1 \\ & & & & \nu \end{array}} \end{array} \right)$$

Jordan-normálalak

Tétel: Minden négyzetes A komplex mátrix hasonló blokk diagonálishoz, ahol a diagonális blokkok

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

alakúak.

- λ -k: A sajátértékei
- egy sajátérték esetleg több blokkban is előfordulhat
- a blokkok sorrend erejéig egyértelműek
- *Nem bizonyítjuk.*

Karakterisztikus polinom

A $n \times n$ -es mátrix

- **Észrevétel:** λ sajátértéke A -nak $\Leftrightarrow \lambda I_n - A$ szinguláris $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.
- **Karakterisztikus polinom:** $\det(xI - A) \in \mathbb{F}[x]$
- **Áll.:** hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja ugyanaz.
 $\rightarrow$ Lin. transzformáció karakterisztikus polinomja jól def.
- λ sajátértéke A -nak $\Leftrightarrow \lambda$ gyöke A karakterisztikus polinomjának.
- **Köv.:** $\mathbb{C}$ felett minden négyzetes mátrixnak van legalább egy sajátértéke.
- **Feladat:** Mi $\det(xI_n - A)$ konstans tagja? Mi az $n - 1$ -ed fokú tag együtthatója?

Felső háromszög alak

Tétel: Minden $n \times n$ -es A komplex mátrix hasonló egy felső háromszög alakú mátrixhoz.

- **Biz.:** Indukció n szerint. $n = 1$: triviális.
- $n > 1$: λ A -nak egy sajátértéke, v megf. sajátvektor. Legyen C egy olyan $n \times n$ -es invertálható mátrix, aminek v az első oszlopa. A C oszlopaiból álló bázisban az A -val való szorzás

$$\text{mátrixa } C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}.$$

- az indukciós feltevés miatt létezik C' $n - 1 \times n - 1$ -es, hogy $C'^{-1}A'C'$ felső háromszög.

- legyen $C'' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{C'} \end{pmatrix}.$

- Ekkor $(CC'')^{-1}A(CC'') = C''^{-1}C^{-1}ACC''$ felső háromszög.

Háromszögmátrixok karakterisztikus polinomja

■ Felső háromszögmátrix karakterisztikus polinomja:

$$(x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}),$$

ahol a_{ii} a főátló i -edik eleme.

- **Emlékeztető 1:** $C^{-1}AC$ karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint A -é
- **Emlékeztető 2:** $M \mapsto C^{-1}MC$ kompatibilis mátrixok szorzásával és lineáris is.
- **Köv.:** Tetszőleges $f(x)$ polinomra $f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C$.

A Hamilton–Cayley-tétel

Tétel (Hamilton–Cayley): A gyöke a karakterisztikus polinomjának

- **Biz.:** Elég felső háromszögre. Ilyenekre indukció.
- Legyen $g(x) = (x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$. Ekkor A karakterisztikus polinomja $f(x) = (x - a_{11})g(x)$, és $g(x)$ A bal alsó $n - 1 \times n - 1$ -es blokkjának karakterisztikus polinomja.

- $f(A) = (A - a_{11}I_n)g(A)$ alakú. Az első tényező $\begin{pmatrix} 0 & * \\ & \boxed{} \end{pmatrix}$,

a második $\begin{pmatrix} * & * \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}$ alakú az indukciós feltevés miatt.

Két ilyen mátrix szorzata (ebben a sorrendben) 0.

Minimálpolinom

- Maradékos osztás polinomokra....
- A $n \times n$ -es.
- Tfh. $0 \neq f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinomok, hogy $f(A) = g(A) = 0$, továbbá $\deg f(x) \leq \deg g(x)$
- legyen $h(x) := g(x)$ maradéka modulo $f(x)$.
- ekkor $h(A) = 0$ is igaz.
- **Köv.:** $\exists!$ legalacsonyabb fokú 1 főegyütthatós $f(x)$ polinom, amire $f(A) = 0$, és minden olyan $g(x)$, amire $g(A) = 0$ többszöröse $f(x)$ -nek.
- **Elnevezés:** minimálpolinom.
- A karakterisztikus polinom ennek többszöröse.

Példa: DFT

- Legyen P az $(12\dots n)$ ciklushoz tartozó permutációmátrix:

$$P = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- **Áll.:** P minimálpolinomja $x^n - 1$

Biz.: $P^n = I$ és $I, P, \dots, P^{n-1}$ lin. ftlenek.

(mert az első oszlopaik lin. ftlenek).

- **Köv.:** P karakterisztikus polinomja $x^n - 1$
- **Köv.:** P sajátértékei $\omega^0, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, ahol $\omega = e^{2\pi i/n}$.

Példa: DFT

- Számolás mutatja: $w_j := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{j(n-1)} \end{pmatrix}$ sajátvektora P -nek

ω^{-j} sajátértékkel

- a megfelelő báziscsere mátrixa

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

az $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ számokhoz tartozó Vandermonde-mátrix.

Alkalmazott algebra - skalárszorzat

Ivanyos Gábor

2011 ősz

Skalárszorzat

Ebben a részben: a standard skalárszorzat:

$$u^T v = \sum_{i=1}^n \mu_i \nu_i$$

és a kapcsolódó lineáris algebra absztrakt tárgyalással

$$u = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

Miért:

- általánosítások is kezelhetők
- betekintés a mögöttes struktúrákba
- okos bizonyítások (számolás helyett)

Oddtown

- **Forrás:** L. Babai, P. Frankl: Linear algebra methods in combinatorics
- n lakos
- **Szabályok Oddtown klubjaira:**
 - Bármely klubnak csakis **páratlan** sok tagja lehet
 - Bármely két klubnak csakis **páros** sok közös tagja lehet
- **Kérdés:** Max. hány klub lehet?

Oddtown

■ Incidencia-mátrix:

- sorok $\sim$ lakosok (n)
- oszlopok $\sim$ klubok (k)
- $A = (a_{ij})$ n -szer k -as

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i. \text{ lakos tagja a } j. \text{ klubnak} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

■ a szabályok:

- $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ páratlan ($1 \leq j \leq k$)
- $\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ij'}$ páros ($1 \leq j \neq j' \leq k$)

Oddtown

- Modulo 2 (azaz a $\mathbb{Z}_2$ testben dolgozunk): $a_{ij} \in \mathbb{Z}_2$
- A szabályok:
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \ (1 \leq j \leq k)$
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ij'} = 0 \ (1 \leq j \neq j' \leq k)$
- "szimmetrikusabb" megfogalmazás:
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ij} = 1 \ (1 \leq j \leq k)$
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ij'} = 0 \ (1 \leq j \neq j' \leq k)$
- mátrixosan:

$$A^T A = I_k$$

Oddtown

- $A^T A = I_k$
- $A^T A$ képtere k -dimenziós
- A^T képtere $\geq k$ -dimenziós
(mivel $A^T A$ képtere $\leq A^T$ képtere)
- A^T rangja $\geq k$, sőt, $= k$, mert k sora van
- A rangja k
- **konklúzió:** $k \leq n$
- ennyi klub lehet is (pl. az egyeleműek)

Oddtown

- mátrixosan: $A^T A = I_k$

- oszlopvektorokkal: $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$v_j^T v_{j'} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- szavakban: A oszlopvektorai "**ortonormált**" rendszert alkotnak $\mathbb{F}_2^n$ -ben
a standard "skalárszorzatra"

Eventown

- Bármely klubnak csakis **páros** sok tagja lehet
- Bármely két klubnak csakis **páros** sok közös tagja lehet
- különböző klubok tagsága különböző halmazok
- Incidencia-mátrixszal (mod 2):

$$A^T A = 0$$

- oszlopvektorokkal

$$v_j^T v_{j'} = 0$$

akár $j \neq j'$, akár $j = j'$.

- **Példa:** tfh. a város lakói házaspárok (esetleg +1 szingli)
Legyenek a klubok a házaspárokból álló halmazok.
- **Köv.:** $k = 2^{\lceil n/2 \rceil}$ lehetséges
- **Kérdés:** lehet-e több?

Szimmetrikus bilineáris függvény

olyan $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, ami

- **mindkét változójában lineáris**, azaz

$$\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle \text{ és } \langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle \\ (\forall u, u', v, v' \in V); \text{ továbbá}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \text{ és } \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad (\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F})$$

- és **szimmetrikus**, azaz $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (\forall u, v \in V)$.

- **Példa (standard skalárszorzat $\mathbb{F}^n$ -en):**

$$(u, v) = u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

- **Végtelen dimenziós példa:** négyzetesen integrálható $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények

$$\langle f, g \rangle := \int f(x)g(x)dx$$

Merőlegesség

- u és v **merőlegesek** ($u \perp v$), ha $\langle u, v \rangle = 0$.
- szimmetrikus reláció
- **Def.:** $v_1, \dots, v_\ell$ rendszer **ortogonális**, ha $v_i \perp v_j$ ($i \neq j$)
 ortonormált rendszer: ha még $\langle v_i, v_i \rangle = 1$
- Ha $v_1, \dots, v_\ell$ ortogonális, de semelyik v_j nem merőleges önmagára, akkor $v_1, \dots, v_\ell$ lineárisan függetlenek.
 - **Biz.:** Tfh. $0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i$.
 - Ekkor bármely j -re: $0 = \langle 0, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$
 - Azaz bármely j -re $\alpha_j = 0$.
- Innen: Oddtown vektorai lin. függetlenek

Merőlegesség

- **Def.:** A $v_1, \dots, v_n$ bázis **ortogonális**, ha $v_i \perp v_j$ ($i \neq j$)
ortonormált bázis: ha még $\langle v_i, v_i \rangle = 1$
- **Példa:** $\mathbb{F}^n$ -ben a standard skalárszorzatra a standard bázis.
- **Példa:** $\mathbb{R}^2$ -ben $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- **Def. (merőleges altér):** $S \subseteq V$ -re

$$S^\perp := \{v \in V \mid u \perp v \text{ minden } u \in S\text{-re}\}$$

altér. $S^{\perp\perp} \geq \langle S \rangle$.

$$u^\perp := \{u\}^\perp$$

- lehetséges $u \in u^\perp$ (ilyen u : *izotróp* vektor)
- **rendezésfordító:** $U \leq W$ -re $U^\perp \geq W^\perp$

Merőlegesség

Áll.: Ha $V^\perp = (0)$, akkor $U \leq V$ -re $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Biz.: Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis V -ben, $u_1, \dots, u_k$ bázis U -ban. Legyen $A = (a_{ij})$ $k \times n$ -es, ahol $a_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$:

$$A = \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \dots & \langle u_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_k, v_1 \rangle & \dots & \langle u_k, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Legyen $\phi : V \mapsto \mathbb{F}^k$ a $v \mapsto \begin{pmatrix} \langle u_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_k, v \rangle \end{pmatrix}$, $\psi : U \mapsto \mathbb{F}^n$ az $u \mapsto \begin{pmatrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, v_n \rangle \end{pmatrix}$ lin. lekép.

Ezekre: $\ker \phi = U^\perp$, $\ker \psi = V^\perp \cap U = (0)$. A ϕ mátrixa A , a ψ mátrixa A^T .

$$\dim \phi V = A \text{ rangja} = \dim \psi U.$$

A dimenziótétel miatt $\dim \phi V = \dim V - \dim \ker \phi = \dim V - \dim U^\perp$, míg $\dim \psi U = \dim U - \dim \ker \psi = \dim U$. Összeolvasva $\dim V - \dim U^\perp = \dim U$.

Merőlegesség

- **Köv.:** Ha $V^\perp = (0)$, akkor $U \leq V$ -re $U^{\perp\perp} = U$.

Biz.: A definícióból $U^{\perp\perp} \geq U$ nyilvánvaló.

Az előző állításból

$$\dim U^{\perp\perp} = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - \dim V + \dim U = \dim U,$$

így $U^{\perp\perp} > U$ kizárt.

- **Áll.:** $V = \mathbb{F}^n$ standard skalárszorzatára $V^\perp = (0)$

Biz.: Legyen $v_1, \dots, v_n$ a standard bázis. Ekkor $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ -ra

$$(u, v_i) = \alpha_i,$$

innen $V^\perp = (0)$.

Alkalmazás: Eventown

- **Köv.:** Ha $V^\perp = (0)$ és $U \leq V$, hogy $U \leq U^\perp$, akkor $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$.

Biz.: $\dim V = \dim U + \dim U^\perp \geq \dim U + \dim U$

Eventown szabályai:

- Bármely klubnak csakis **páros** sok tagja lehet
- Bármely két klubnak csakis **páros** sok közös tagja lehet

oszlopvektorokkal:

$$v_j v_{j'}' = 0$$

akár $j \neq j'$, akár $j = j'$.

- Legyen $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Ekkor $U \leq U^\perp$.
- **Köv.:** $k = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ a lehető legnagyobb klubszám

Lineáris kódok

- $\mathbb{F}$ véges test $\sim$ ábécé v. jegyhalmaz (pl. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$)
- **lineáris kód:** U altér $\mathbb{F}^n$ -ben
- **kódszavak:** U -beli vektorok
- **Hamming-távolság** $\mathbb{F}^n$ -en: $d(u, v) = |\{i : \mu_i \neq \nu_i\}|$, ahol $u = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$, $v = (\nu_1, \dots, \nu_n)^T$
- **Hamming-súly:** $s(u) := d(u, 0)$ (nem 0 helyek száma)
- $d(u, v) = s(u - v)$

Lin. kódok paramétereit:

- **kódhossz:** n - ilyen hosszú egy kódszó
- **dimenzió:** $k = \dim U$ - ilyen hosszú sorozatot kódol egy kódszó
- **kódtávolság:** $d = \min_{u \neq v \in U} d(u, v) = \min_{0 \neq u \in U} s(u)$
- $\lfloor (d - 1)/2 \rfloor$ hibát ki tudunk javítani
- **Megj.:** A kódtávolság értelmes nemlin. kódra ($\mathbb{F}^n$ részalalmazaira, és itt az se kell, hogy $\mathbb{F}$ test legyen), csak nem feltétlenül azonos a min. súllyal.

Példák kódokra

- Kódolás: $\mathbb{F}^k \rightarrow U$ bijekció (nem feltétlenül lin.)
- **triviális** kódok - a teljes: $v \mapsto v$ (nincs redundancia)
 $U = \mathbb{F}^n$, $k = n$, $d = 1$
triviális kódok - a nulla: (nulla információ)
 $U = (0)$, $k = 0$, $d = \infty$
- **Ismétlő** kód: $a \mapsto (a, a, \dots, a)^T$
 $U = \{(a, \dots, a)^T\}$, $k = 1$, $d = n$
- **Paritás-kód**:
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, -\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1})^T$
 $U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\}$, $k = n - 1$, $d = 2$:
egy hibát tud jelezni

Hadamard-kódok (elsőrendű Reed–Muller-kódok)

- $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, $n = 2^m$.
- $k = m + 1$: Egy $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta)^T$ vektorra

$$f_v(x_1, \dots, x_m) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta$$

a kódszó-vektor: az f_v értékei a lehetséges 2^m helyen

- $d = 2^{m-1}$:
 - Ha $\beta = 0$ akkor f_v egy lineáris függvény $\mathbb{Z}_2^m$ -en, a magja vagy m dimenziós ($f_v \equiv 0$) vagy $m - 1$ dimenziós. Utóbbi esetben f_v a maradék 2^{m-1} helyen lesz 1.
 - Ha $\beta = 1$, akkor $f_v - 1$ egy lineáris függvény. A magja vagy m dimenziós ($f_v \equiv 1$) vagy $m - 1$. Tehát f_v vagy 2^m vagy 2^{m-1} helyen lesz 1.
- Mariner 9 Mars-szonda (1971): $m = 5$: $n = 32$, $k = 6$, $d = 16$.
- ugyanilyen távolságú ismétlő kód ($n = 16$, $k = 1$, $d = 16$), a "sebessége" (k/n) 3-szor lassabb.

Két kézenfekvő mód lin. kódok megadására

- Bázissal (**Generátormátrix**): olyan G $n \times k$ -as, hogy

G oszlopai U egy bázisa

azaz

$$U = G\mathbb{F}^k$$

Lehetséges kódolás: $v \mapsto Gv$.

- Lin. egyenletekkel (**Ellenőrző mátrix**): olyan H $n \times (n - k)$ -as, hogy H^T sorai lin. egyenletek U meghatározására azaz $u \in U \Leftrightarrow H^T u = 0$, azaz

$$U = \ker H^T$$

- **Feladat:** Ismétlő és paritás-kódok mátrixai

Duális kód

- **A duális kód:** $U^\perp$ (a standard skalárszorzásra)
- **Tudjuk:** $\dim U^\perp = n - k = n - \dim U$, $U^{\perp\perp} = U$
- U bármely ellenőrző mátrixa $U^\perp$ egy generátormátrixa
 - **Biz.:** Ha H egy ell. mátrixa U -nak, akkor
 - $H^T u = 0$ minden $u \in U$ -ra, így $(Hv)^T u = v^T H^T u = 0$ minden $u \in U$, $v \in \mathbb{F}^{n-k}$ -ra. Tehát $H\mathbb{F}^{n-k} \leq U^\perp$, így

$$U \leq (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp.$$

- Ha $u \in (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp$ azaz minden $v \in \mathbb{F}^{n-k}$ -ra $0 = (Hv)^T u = v^T H^T u = v^T (H^T u)$, tehát $H^T u \in \mathbb{F}^{n-k}^\perp = (0)$, így $H^T u = 0$, azaz $u \in U$. Tehát

$$U \geq (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp.$$

- együtt: $U = (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp$, és így $U^\perp = H\mathbb{F}^{n-k}$ is igaz.
- U bármely generátormátrixa $U^\perp$ egy ellenőrző mátrixa

Az Hadamard-kód fele és annak duálisa

- **Köv.:** Ismétlő és paritás-kódok egymás duálisai.
- **Hadamard-kód:** a legf. elsőfokú m -változós polinomok értékei $\mathbb{F}_2^m$ -en
- **Hadamard-kód fele:** a homogén lineáris m -vált. polinomok azaz a lineáris függvények értékei $\mathbb{F}_2^m$ -en
- kidobjuk a 0 helyet: ott minden lin. fvény értéke 0.
- paraméterek: $n = 2^m - 1$, $k = m$, $d = 2^{m-1}$.
- lin. fvények standard bázisa: $f_1, \dots, f_m$, ahol $f_i \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_i$:
 f_1 mátrixa $(1, 0, \dots, 0), \dots, f_m$ mátrixa $(0, \dots, 0, 1)$.
- egy gen. mátrix: (sorai $\mathbb{F}_2^m$ nem nulla vektoraival indexelve):
 $G = (g_{vj})$, ahol $g_{vj} = f_j v$, ami v -nek j -edik komp.
- **Konklúzió:** G sorai: $\mathbb{F}_2^m$ nem 0 vektorai

Az Hadamard-kód fele és annak duálisa

- G gen. mátrix sorai: $\mathbb{F}_2^m$ nem 0 vektorai
- **Hamming-kód:** a duális kód, paraméterek:
 $n = 2^m - 1, k = 2^m - m - 1, d = ?$
- Hamming-kód (egyik) ellenőrző mátrixa G
- **Áll.:** A Hamming-kód távolsága 3:

Biz: Tfh. 2: létezik $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ hogy $\alpha_\ell = 0$, ha $\ell \notin \{i, j\}$, de $\alpha_i = \alpha_j = 1$.

$v \in \text{Hamming}$, azaz $G^T v = 0$. De $G^T v$ a G i -edik és j -edik sorának az összege. Ez nem lehet 0, mert G sorai kül. nem 0 vektorok. Ellentmondás.

A Hamming-kód távolsága

- **Áll.:** A Hamming-kód távolsága 3:

Biz (folyt): Tfh. 1: ekkor olyan $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ kódszó van, amelyre $\alpha_\ell = 0$,

hacsak nem $\ell = i$ és $G^T v$ a G i -edik sora, ezek közt nem szerepel a 0.
Ellentmondás.

≤ 3 : G -nek van 3 sora, amelyek összege 0.

- **Tanulság:** Ha egy U lin. kód (egyik) ellenőrző mátrixa H , akkor U kódtávolsága $\leq \ell \Leftrightarrow H$ -nak van ℓ lin. összefüggő sora
kódtáv. = ell. mátrix min. lin. összefüggő sorainak a száma
- **Megj.:** A kódtávolság kiszámítása NP-nehéz.

A Hamming-korlát

- **Tétel:** Legyen C egy nem feltétlenül lineáris kód a q elemű A ábécé felett. Tfh. C szavainak távolsága $\geq 2t + 1$. Ekkor

$$|C| \sum_{s=0}^t \binom{n}{s} (q-1)^s \leq q^n.$$

Biz.: A^n minden v szavához legyen

$$B(v, t) = \{w \in A^n \mid d(v, w) \leq t\}.$$

ún. Hamming-gömb, "térfogat": $|B(v, t)| = \sum_{s=0}^t \binom{n}{s} (q-1)^s$

Ha $u, v \in C$, akkor $d(u, v) > 2t$ miatt $B(u, t) \cap B(v, t) = \emptyset$, így

$$\sum_{v \in C} |B(v, t)| \leq q^n.$$

- **Perfekt kódok:** ahol a Hamming-korlát egyenlőséggel telj.
- a Hamming-kódok perfektek.

Perfekt kódokról:

- **Hamming-kódok tetsz. $\mathbb{F}_q$ felett:** paraméterek:
$$n = \frac{q^m - 1}{q - 1}, k = \frac{q^m - 1}{q - 1} - m, d = 3.$$
- Az összes nem-triviális perfekt lineáris kód vagy páratlan hosszú ismétlő kód, vagy Hamming-kód, vagy Golay-kód.
- A perfekt Golay-kódok paraméterai: $\mathbb{F}_2$ felett:
 $n = 23, k = 12, d = 7$; $\mathbb{F}_3$ felett: $n = 11, k = 6, d = 5$.
- vannak **kiegészített** Hamming-kódok és kiegészített Golay-kódok
Paritás-kódhoz hasonló konstrukció: kiegészítjük a kódszavakat egy új jeggyel, hogy a jegyek összege 0 legyen.
Hamming és Golay kódokra a hossz és a kódtáv 1-gyel nő.
- **példa:** A teljes Hadamard-kód duálisa a kiegészített bináris Hamming-kód. Paraméterek: $n = 2^m, k = 2^m - m - 1, d = 4$.

Gram-mátrix

Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis V -ben. Ebben a bázisban

- $\langle, \rangle$ Gram-mátrixa $A = (a_{ij})$, ahol $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
- A szimmetrikus: $A^T = A$
- $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ -re

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j a_{ij}$$

- rögz. bázisra: szimm. bilin. fvények $\leftrightarrow$ szimm. mátrixok
- Ortogonális bázisban a Gram-mátrix diagonális, ortonormáltban az egységmátrix.

Gram-mátrixok $\mathbb{F}^n$ standard bázisában

- Ha A szimm. $n \times n$ -es mátrix, akkor $\langle u, v \rangle := u^T A v$ szimm. bilin. fvény $\mathbb{F}^n$ -en,
- ennek a Gram-mátrixa A .
- a $(,)$ standard skalárszorzat Gram-mátrixa I
- **Tul.:** $u^T A v = (u, A v) = (A^T u, v)$

Báziscsere hatása a Gram-mátrixra:

Legyen $v_1, \dots, v_n$ és $v'_1, \dots, v'_n$ két bázis, a $v_i \rightarrow v'_i$ báziscsere mátrixa $C = (c_{ij})$: $v'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i$.

Áll.: Ha $\langle, \rangle$ Gram-mátrixa az első bázisban A , akkor a másodikban

$$C^T A C.$$

Biz.: Jel.: $A = (a_{ij})$. A másik bázisban a Gram-mátrix $A' = (a'_{ij})$.

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \langle v'_i, v'_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n c_{ki} v_k, \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} v_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n c_{ki} \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} a_{k\ell} = \sum_{k=1}^n c_{ki} \sum_{\ell=1}^n a_{k\ell} c_{\ell j} \end{aligned}$$

Belső összegek vektora AC j -edik oszlopa. Ez van skalárszorozva C i -edik oszlopával, azaz C^T i -edik sorával.

Euklideszi terek

$\mathbb{R}^n$ standard skalárszorzatáról

Definitség

V vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\langle, \rangle$ szimm. bilin. fvény V -n

- pozitív definit, ha $\forall 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle > 0$
- pozitív szemidefinit, ha $\forall v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle \geq 0$
- negatív definit, negatív szemidefinit hasonlóan
- indefinit, ha $\exists u, v \in V$, amelyekre $\langle u, u \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle < 0$
- Példa: $\mathbb{R}^2$ -en $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$ és
 $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$ indefinitek. **Feladat:** mik a Gram-mátrixok a standard bázisban?

Néhány feladat

$V = \mathbb{R}^n$, tfh. $\langle u, v \rangle = u^T A v$, azaz a Gram-mátrix a standard bázisban A .

- Mutassuk meg, hogy $\ker A = V^\perp$.
- **Köv:** A szing. $\Leftrightarrow V^\perp \neq (0)$
- **Megj.:** szokásos elnevezés: $\langle, \rangle$ nemelfajuló, ha $V^\perp = (0)$.
- Tfh. $\langle, \rangle$ poz. szemidef. Mutassuk meg, hogy ekkor:
 A szinguláris $\Leftrightarrow \exists 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, hogy $v \in v^\perp$.
- Mut. meg, hogy indefinit $\langle, \rangle$ esetén a fenti ekvivalenciából csak $\Rightarrow$ igaz.

Euklideszi tér

- Valós vektortér pozitív definit $\langle, \rangle$ bilineáris függvénnyel
- **Példa:** $\mathbb{R}^n$, a standard skalárszorzattal
- **Fontos tul.:** Euklideszi tér altere is euklideszi tér
- $\langle f, g \rangle : \int f(x)g(x)dx$ is poz. def., a négyzetesen integrálható fvények tere ∞ dimenziós,
véges sok fvény által generált altér euklideszi tér
- **hossz:** $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
- **távolság:** $|u - v|$

A Gram–Schmidt-Ortogonalizáció

$\langle, \rangle$ poz. def. V -n

- $v_1, \dots, v_n$ bázis V -ben
- $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$, azaz $v_1 \notin v_1^\perp$.
- $\pi : w \mapsto w - \frac{\langle v_1, w \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$ lin. transzf.
(πw a w -nek a v_1 -re merőleges komponense)
- $\ker \pi = \langle v_1 \rangle$, $\pi V = v_1^\perp$
- $v_2, \dots, v_n \leftarrow \pi v_2, \dots, \pi v_n$ bázis $v_1^\perp$ -ben (**Miért?**)
- folytassuk $v_1^\perp$ -ben
- $\vdots$
- eredmény: **ortogonális bázis**
- **normáló lépés:** $v_i \leftarrow \frac{1}{\sqrt{\langle v_i, v_i \rangle}} v_i$
- végeredmény: **ortonormált bázis**

Gram-Schmidt: megjegyzések

- A normáló lépés előttig a báziscsere mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ & 1 & * & \dots & * \\ & & 1 & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$
 alakú
- a normálást is tartalmazó báziscsere mátrixa is felső háromszög alakú, pozitív elemekkel a főátlóban.
- Az utolsó normáló lépés kivételével a más alaptestekre, nem poz. def. $\langle, \rangle$ -re is alkalmazható, hacsak nem találunk $v \in v^\perp$ vektort.
- **Feladat:** tehetünk-e valamit, ha $v_1 \in v_1^\perp$?

Gram-Schmidt: megjegyzések

- Alkalmas egy adott szimmetrikus bilineáris függvény pozitív definitiségének eldöntésére:

Az eljárás nyilván végigmegy, ha annak során nem jön elő olyan v vektor, amelyre $\langle v, v \rangle \leq 0$.

Ha nem jön ilyesmi elő: a végső $v_1, \dots, v_n$ bázis ortogonális és $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, ezért $\langle, \rangle$ poz. def.

- A Gram-mátrix alakulásának követésénél értelmes interpretáció: sorok és oszlopok szerinti Gauss-elimináció:

Pl. a $v_2 \leftarrow v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$ helyettesítésnél

1. a második sorból elimináljuk az első elemet az első sor segítségével
2. az így kapott mátrix második oszlopának első elemét elimináljuk az első oszlopának a segítségével

Gram-Schmidt példa

- Tfh. a v_1, v_2, v_3 bázisban $\langle, \rangle$ Gram-mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- A második sorból levonjuk az első sor kétszeresét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- A második oszlopból levonjuk az első oszlop kétszeresét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Gram-Schmidt példa

- A $v_2 \leftarrow \pi v_2$ után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- A harmadik sorból levonjuk az elsőt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

- A harmadik oszlopból levonjuk az elsőt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Innentől a változtatások a jobb alsó blokkot érintik.

Gram-Schmidt példa

- A $v_1^\perp$ -re való vetítések után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- kivonjuk a második sort a harmadikból:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

- kivonjuk a második oszlopot a harmadikból:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Keletkezett egy -1 a főátlóban, tehát $\langle, \rangle$ indefinit.

Gram-Schmidt megj.

- **Megj:** A Gram-Schmidt eljárás segítségével igazolható, hogy $\mathbb{R}^n$ -en $\langle, \rangle$ akkor és csak akkor pozitív definit, ha valamely (bármely) bázisban felírt A Gram-mátrixára igaz az hogy minden $1 \leq j \leq n$ -re A bal felső $j \times j$ -es blokkjának a determinánsa pozitív.

Izometria

- $V_1, \langle, \rangle$ és $V_2, \langle, \rangle_2$ euklideszi terek. A $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ lin. bijekció **izometria** V_1 és V_2 között, ha

$$\langle v, w \rangle = \langle \phi v, \phi w \rangle_2$$

minden $v, w \in V_1$ -re.

- $V_1, \langle, \rangle$ és $V_2, \langle, \rangle_2$ izometrikusak, ha létezik köztük izometria.
- azaz léteznek olyan bázisok a két térben, amelyekben a Gram-mátrixok megegyeznek.
- **Köv.:** Bármely n -dimenziós eukl. tér izometrikus $\mathbb{R}^n$ -nel.
Gram-Schmidt: létezik ortonormált bázis
- **Megj.:** Az izometria jelentése: távolságtartó Eukl. terek közötti távolságot tartó és 0-t 0-ba vivő leképezések automatikusan lineárisak.

Komplex euklideszi terek

- AKA véges dimenziós Hilbert-terek, unitér terek, Hermite-féle terek, hermitikus terek.
- **Probléma** $n \geq 2$ -re $\mathbb{C}^n$ -ben az $u^T v$ -vel:
 - $\exists 0 \neq v \in \mathbb{C}^n$, amelyre $v \in v^\perp$
 - **Feladat:** mutassunk ilyen v -t.
- $\mathbb{C}^n$ -en $u^T v$ helyett jobb $u^* v$ -t használni.
Def.: u^* az alábbi $m = 1$ -gyel:
- **adjungált mátrix:** A $n \times m$ -es komplex mátrixra

$$A^* := \overline{A^T},$$

a transzponált mátrix elemenkénti komplex konjugáltja.

- Ha A valós, akkor $A^* = A^T$.

Hermitikus függvények

V komplex vektortér, $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ hermitikus (vagy Hermite-féle), ha

- a második változójában lineáris, azaz
 - $\langle u, \lambda v + v' \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$ ($\forall u, v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{C}$),
- és konjugált-szimmetrikus:
 - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ($\forall u, v \in V$)
- **Megj.:** Egy hermitikus függvény az első változóban konjugált-lineáris (avagy antilin.):
 - $\langle \lambda u + u', v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ ($\forall u, u', v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$),

Analógiák a valós esettel:

- **standard skalárszorzat** $\mathbb{C}^n$ -en: $(u, v) = u^* v$
- **Gram-mátrix:** ugyanúgy $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$
- Hermitikus fvény Gram-mátrixa **önadjungált** (avagy hermitikus):

$$A^* = A$$

- $(u, Av) = u^* Av = (A^* u)^* v = (A^* u, v)$
- $u, v \mapsto u^* Av$ hermitikus $\Leftrightarrow A$ önadjungált
- Báziscsere hatása a Gram-mátrixra

$$A \rightarrow C^* A C$$

Definitség

$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ hermitikus fvény

- **Észrevétel:** $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$, tehát $\langle u, u \rangle$ mindig valós.
- $\langle, \rangle$ pozitív definit, ha $\forall 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle > 0$
- pozitív szemidefinit, indefinit, stb. hasonlóan

Komplex euklideszi tér

- **Def.:** komplex vektortér poz. def. $\langle, \rangle$ hermitikus fvénnyel ellátva
- eukl. tér altere is eukl.
- n -dim. komplex eukl. tér izometrikus $\mathbb{C}^n$ -nel
Biz.: (Gram-Schmidt átmegy)
- **Ezután:** euklideszi terekben a $(,)$ jelölést használjuk.
- **hossz:** $\sqrt{(v, v)}$
- **Pythagorasz-tétel:** ha $u \perp v$, akkor $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

Pótlap: A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

- Cauchy (1821):

$$\left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \overline{y_i} \right).$$

- Bunyakovszkij (1859), Schwartz (1888):

$$\left| \int f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx.$$

Alkalmazás: a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség

Komplex (vagy valós) euklideszi térben (Weyl 1918?):

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

■ **Biz.:** ekvivalens megfogalmazás: $|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v)$

■ Feltehető $u \neq 0$ (különben akkor mindkét oldal 0)

■ v felboml. u -val $\parallel$ és u -ra $\perp$ összetevőkre:

$$v = \mu u + v', \text{ ahol } \mu = \frac{(u, v)}{(u, u)} \text{ és } v' = v - \mu u.$$

■ $(v, v) = |\mu|^2 (u, u) + (v', v')$ és $|(u, v)|^2 = |\mu|^2 (u, u)^2$.

■ A bizonyítandó $\leq$ -ség baloldala $|\mu|^2 (u, u)^2$

■ jobboldala $|\mu|^2 (u, u)^2 + (u, u)(v', v')$.

■ **Megj.** A bizonyítás során végül is az u és v vektorokat tartalmazó síkban (vagy egyenesen) dolgoztunk.

A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség

- Komplex (vagy valós) euklideszi térben

$$|(u, v)| \leq |u||v|.$$

- Kifejtett alak:

$$\left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \bar{y}_i \right).$$

- Négyzetesen integrálható függvényekre

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx.$$

(Itt $(h_1(x), h_2(x)) = \int \overline{h_1(x)} h_2(x)$ és a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget az $\overline{f(x)}, g(x)$ párra alkalmazzuk.)

Normális mátrixok

- diagonalizálható (diagonálishoz hasonló) komplex mátrixok fontos családja
- **Def.:** A $n \times n$ -es komplex mátrix **normális**, ha

$$AA^* = A^*A$$

- valós A -ra: $A^T A = A A^T$
- **Példa:** $A = A^*$ önadjungált (valós esetben szimmetrikus)
- **Példa:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ normális (szimmetrikus), de $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nem normális. **Miért?**
 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ normális (ferdén szimmetrikus: $C^T = -C$), de $A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nem normális. **Miért?**

Normális mátrixok

- **Áll.:** Legyen $M = \begin{pmatrix} a & v \\ & C \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{C}$, $v^T \in \mathbb{C}^{n-1}$, C

pedig $n-1 \times n-1$ -es. Ekkor
 M normális $\Leftrightarrow v = 0$ és C normális.

- **Biz.:**

- $MM^* - M^*M$ bal felső eleme $a\bar{a} + vv^* - \bar{a}a = vv^*$.
- tehát ha M normális akkor $vv^* = 0$, így $v = 0$.
- Ha $v = 0$, akkor M blokk diagonális és $MM^* - M^*M$ is.
 Utóbbi diag. blokkjai 0, illetve $CC^* - C^*C$.

- **Köv:** Felső (vagy alsó) háromszögmátrix normális $\Leftrightarrow$
 diagonális

Unitér mátrixok

U $n \times n$ -es.

- **Def.:** Az U $n \times n$ -es mátrix **unitér**, ha $U^*U = I$.
Minden unitér mátrix normális.
- **Áll.:** U unitér $\Leftrightarrow U^*$ unitér. Ekkor $U^* = U^{-1}$.
- **Áll.:** U, U' unitér $\Rightarrow I, U^{-1}$ és UU' unitérek.
- **Áll.:** U unitér $\Leftrightarrow U$ oszlopai egy ortonormált rendszert alkotnak $\Leftrightarrow U$ sorai ortonormált rendszert alkotnak.
- **Átfogalmazva.:** Ekvivalensek:
 - U unitér
 - U a standard bázist egy ortonormált bázisba viszi
 - $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ izometria
 - U $\mathbb{C}^n$ valamely ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi
 - U $\mathbb{C}^n$ bármely ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi
- valós unitér = ortogonális ($UU^T = I$)

Unitér/ortogonális mátrixok: példák

- tetszőleges permutációs mátrix
- $v \mapsto v - 2 \frac{u^T v}{u^T u} u$ az $u^\perp$ hipersíkra való tükrözés
- **Hadamard-kód fele:**
 - A $\mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2$ lineáris függvények, mint 2^m hosszú 0 – 1 vektorok.
 - Ezek közül bármely két különböző 2^{m-1} helyen egyezik, 2^{m-1} helyen különbözik
(Egy nem 0 lin. fvény 2^{m-1} helyen 0, 2^{m-1} helyen 1)
 - $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow -1$
 - 2^m darab 2^m hosszú páronként merőleges ± 1 -vektor
 - $2^{m/2}$ -vel normálva ortogonális mátrixot alkotnak.
- Hadamard-mátrixok $n \times n$ -es ± 1 -mátrixok, páronként merőleges oszlopokkal (sorokkal).
- **Feladat:** van $n \times n$ -es Hadamard-mátrix $\Rightarrow n = 2$ vagy $4|n$
- **Sejtés:** Ha $4|n$, akkor van $n \times n$ -es Hadamard-mátrix.

A Schur-felbontás

Tétel: Tetszőleges A $n \times n$ -es komplex mátrixhoz létezik olyan U $n \times n$ -es unitér mátrix, amelyre U^*AU felső háromszög alakú.

- **Biz.:** Indukció n szerint. $n = 1$: triviális.
- $n > 1$: λ A -nak egy sajátértéke, v megf. 1 hosszú sajátvektor. Legyen U egy olyan $n \times n$ -es unitér mátrix, aminek v az első oszlopa. (U további oszlopai $v^\perp$ egy ortonormált bázisa.) A U oszlopaiból álló bázisban az A -val való szorzás

mátrixa $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}$.

- az indukciós feltevés miatt létezik U' $n - 1 \times n - 1$ -es unitér, hogy $U'^*A'U'$ felső háromszög.

- legyen $U'' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{U'} \end{pmatrix}$. Ekkor UU'' unitér és

- $(UU'')^*A(UU'') = U''^*U^*AUU''$ felső háromszög.

Schur-felbontás - megjegyzések

- általában nem egyértelmű, de
- a diagonális elemek az eredeti mátrix sajátértékei.
- a bal felső eleme az eredeti mátrix tetszőleges sajátértéke lehet.

Spektráltétel normális mátrixokra

- **Észrevétel:** U $n \times n$ -es unitér, A $n \times n$ -es. Ekkor A normális $\Leftrightarrow U^*AU$ normális

Biz.:

$$\Rightarrow: (U^*AU)^*U^*AU = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = U^*AU(U^*AU)^*$$

$\Leftarrow$: Ha $A' = U^*AU$, akkor $A = (U^*)^*A'(U^*)$, így alkalmazható a másik irányú.

- **Köv.:** A normális $\Leftrightarrow$ van U unitér, hogy U^*AU diagonális (azaz valamely Schur-felbontására U^*AU diagonális) ($\Leftrightarrow$ bármely Schur-felbontására U^*AU diagonális)
- **Átfogalmazva.:** A normális $\Leftrightarrow$ van A sajátvektoraiból álló ortonormált bázis (fenti U oszlopai)

Alkalmazás: DFT és inverze

- Az $(12 \dots n)$ permutáció mátrixa ortog., így normális
- n kül. sajátérték $\Rightarrow$ a megf. sajátvektorok merőlegesek.
- Az ω^{-j} sajátértékhez tartozó 1 hosszú sajátvektor

$$w_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{j(n-1)} \end{pmatrix}$$

- Tehát $M = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$ unitér: $M^{-1} = M^*$

- Itt $M^* = \overline{M}$: M -ből $\omega \leftrightarrow \overline{\omega}$ cserével kapható
- Ezen csere erejéig az inverz DFT ugyanolyan, mint a DFT.

Mátrixok definitsége

- **Def.:** az A **önadjungált** mátrix pozitív szemidefinit (pozitív definit), ha $v^*Av \geq 0$ ($v^*Av > 0$) minden $v \in \mathbb{C}^n$ vektorra.
Megj.: Ekvivalens a $\langle u, v \rangle := u^*Av$ hermitikus függvény megfelelő definitságával.
- **Példa:** A tetszőleges $m \times n$ -esre A^*A poz. szemidef. A^*A pontosan akkor poz. def., ha A oszlopai lineárisan függetlenek.
Biz.: $v^*A^*Av = (Av)^*(Av)$ miatt $v^*A^*Av \geq 0$ és $v^*A^*Av = 0$ pont akkor, ha $Av = 0$.

Pótlap: fontos típusú diagonális mátrixok

A komplex diagonális. Ekkor:

- A unitér $\Leftrightarrow A$ diag. elemei 1 abszolút értékűek
- A önadjungált $\Leftrightarrow A$ diag. elemei valósak
- A pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow A$ diag. elemei nemnegatív valósak
- A pozitív definit $\Leftrightarrow A$ diag. elemei pozitív valósak
- A ferdén hermitikus $\Leftrightarrow A$ diag. elemei tiszta képzetesek
(Az $a + bi$ komplex szám tiszta képzetes, ha $a = 0$.)

Fontos típusú normális mátrixok spektruma

- **Áll.:** Legyen U unitér. Ekkor A önadjungált $\Leftrightarrow U^*AU$ önadj. Hasonló ekvivalenciák unitér, pozitív definit, pozitív szemidefinit, ferdén hermitikus ($A^* = -A$) mátrixokra.
- **Jellemzés:** A komplex normális. Ekkor:
 - A unitér $\Leftrightarrow A$ sajátértékei 1 abszolút értékűek
 - A önadjungált $\Leftrightarrow A$ sajátértékei valósak
 - A pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow A$ sajátértékei nemnegatív valós számok
 - A pozitív definit $\Leftrightarrow A$ sajátértékei pozitív valós számok
 - A ferdén hermitikus $\Leftrightarrow A$ sajátértékei tiszta képzetesek

Schur-felbontás valós sajátértékekre

- **Tétel.:** Tfh. A $n \times n$ -es valós, és A sajátértékei valósak. Ekkor létezik olyan U $n \times n$ -es valós ortogonális, amelyre $U^T A U$ felső háromszög.
Biz.: A Schur-felbontás bizonyítása átmegy.
- **Köv.:** A valós szimmetrikusra létezik U valós ortog., hogy $U^T A U$ diagonális.

Pótlap: valós Schur-felbontás biz. I

Áll.: Ha A valós és A kar. polinomjának λ egy valós gyöke, akkor létezik A -nak valós sajátvektora λ sajátértékkel.

Biz.: $\det(\lambda I - A) = 0$ miatt $\lambda I - A$ mint $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin. transzf. szing., azaz a magja $\neq (0)$. Egy nemnulla elem a magból egy sajátvektor λ sajátértékkel.

Pótlap: valós Schur-felbontás biz. II.

Tétel.: Tfh. A $n \times n$ -es valós, és A sajátértékei valósak. Ekkor létezik olyan U $n \times n$ -es valós ortogonális, amelyre $U^T A U$ felső háromszög.

Biz.: Indukció n szerint. $n = 1$: triviális.

$n > 1$: λ A -nak egy sajátértéke, v megf. 1 hosszú sajátvektor. Legyen U egy olyan $n \times n$ -es ortog., aminek v az első oszlopa. (U további oszlopai $v^\perp$ egy ortonormált bázisa.) A U oszlopaiból álló bázisban az A -val való szorzás mátrixa

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}.$$

Az ind. felt. miatt $\exists U'$ $n-1 \times n-1$ -es ortog., hogy $U'^T A' U'$ felső háromszög.

$$\text{Legyen } U'' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{U'} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $(U U'')^T A (U U'') = U''^T U^T A U U''$ felső háromszög. (És persze $U U''$ ortog.).

Projekció (vetítés)

- **Def.:** $\pi : V \rightarrow V$ lin. transzf. projekció, ha $\pi^2 = \pi$.
- **Áll.:** π projekció $\Leftrightarrow \pi$ megszorítása πV -re az identitás.
 $\pi^2 x = \pi x \Leftrightarrow \pi(\pi x) = (\pi x)$
- projekciók sajátértékei $\in \{0, 1\}$.
- **Ortogonalis projekciók (merőleges vetítések):** Euklideszi térben egy olyan projekció, aminek mátrixa normális egy ortonormált bázisban.
- Ortog. proj. mátrixa önadjungált (valósra szimmetrikus).
- Egy normális mátrix projekció $\Leftrightarrow$ (komplex) sajátértékei a $\{0, 1\}$ halmazból kerülnek ki.

Merőleges vetítés altérre

- Legyen P ortogonális projekció mátrixa. Legyen U unitér, hogy $U^*PU = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Ekkor U első néhány oszlopa P képterének egy ortonormált bázisa, a többi pedig P magjáé, ami éppen a képtér $\perp$ -komplementuma.
- **Köv.:** Egy ortogonális projekciót egyért meghatároz a képtere.
- Elnevezés: az altérre való merőleges vetítés.
 - létezés/konstrukció $W \leq V$ -re:
 - $w_1, \dots, w_r$ ortonormált bázis W -ben
 - kiegészítjük $w_{r+1}, \dots, w_n$ -nel V ortonormált bázisává
 - $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i w_i$
 - elő rész: vetület W -re, második rész: vetület $W^\perp$ -re
- Példa: $v \mapsto v - \frac{u^*v}{u^*u}u$ merőleges vetítés az $u^\perp$ hipersíkra
 $v \mapsto \frac{u^*v}{u^*u}u$ merőleges vetítés az $\langle u \rangle$ egyenesre.

Merőleges vetítések további tul.

- **Áll.:** A vetület az altér legközelebbi vektora:
 Legyen $v \in V$, $w \in W$ v merőleges vetülete W -n
 $u \in W$ -re
 a $W \leq V$ -re való merőleges vetítés és $v \in V$, akkor
 tetsz. $u \in W$ -re

$$|v - u| \geq |v - w|,$$

egyenlőség csakis $u = w$ -re.

- **Biz.:** $v = w + w'$, itt $w' \in W^\perp$.
- Legyen $u \in W$. Ekkor
 $v - u = (v - w) + (w - u) = w' + (w - u)$.
- $w' \perp (w - u) \in W$, így $|v - u|^2 = |w'|^2 + |w - u|^2 \geq |w'|^2$
- $u \neq w$ -re a különbség $|w - u| > 0$

Példák ortog. projekciókra

■ Az $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \\ \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \end{pmatrix}$ leképezés merőleges vetítés az

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ irányú egyenesre. Mátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

Példák ortog. projekciókra

- az első néhány standard bázisvektor által feszített altérre való

merőleges vetítés:
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$(1 \ 0 \ \dots \ 0)^T (1 \ 0 \ \dots \ 0) + (0 \ 1 \ \dots \ 0)^T (0 \ 1 \ \dots \ 0) + \dots$$

- Általában, ha $W \leq \mathbb{R}^N$ -nek $w_1, \dots, w_r$ egy ortonormált bázisa, akkor a W -re való merőleges vetítés mátrixa $w_1 w_1^T + \dots + w_r w_r^T$.
- Ha π egy ortogonális projekció a W altérre, akkor $I - \pi$ egy ortogonális projekció a $W^\perp$ altérre. Például ha $u \in \mathbb{C}^n$ egy egységvektor, akkor $u u^*$ az $\langle u \rangle$ altérre való merőleges vetítés, míg $I_n - u u^*$ az $u^\perp$ altérre vetít merőlegesen.

Ortogonalis projekciók főátlója

- **Négyzetes mátrix nyoma:** $\text{tr}A$ az A mátrix főátlójában levő elemeinek összege. A karakterisztikus polinom $n - 1$ -ed fokú tagjának az együtthatója, $-$ előjellel.
- Ezért $\text{tr}C^{-1}AC = \text{tr}A$.
- **Ortogonalis projekciók főátlója:** Legyen $A = (a_{ij})$ egy ortog. proj. mátrixa (a standard bázisban).

- $\text{tr}A = A$ rangja,

Biz.: A diag. alakjában az 1-ek száma, azaz a képtér dim.

- $a_{ii} \geq 0$

Biz.: Legyen $v_1, \dots, v_n$ a standard bázis. $A^2 = A^*A = A$, így $a_{ii} = (v_i, Av_i) = (v_i, A^*Av_i) = (Av_i, Av_i) \geq 0$.

- $a_{ii} \leq 1$:

Biz.: $v_i - Av_i \in \ker A = (A\mathbb{C}^n)^\perp$, így $(Av_i, v_i - Av_i) = 0$, így

$$\begin{aligned} 1 &= (v_i, v_i) = (Av_i, Av_i) + (v_i - Av_i, v_i - Av_i) \\ &\geq (Av_i, Av_i) = (v_i, A^*Av_i) = (v_i, Av_i) = a_{ii}. \end{aligned}$$

Pótlap: Tükrözések

- **Def.** τ lin. transzf. **involúció**, ha $\tau^2 = I$.
- **Áll.** π projekció $\Leftrightarrow I - 2\pi$ involúció

$$(I - 2\pi)^2 = I - 4\pi + 4\pi^2 = I + 4(\pi^2 - \pi)$$
- **Áll.** τ involúció $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(I - \tau)$ projekció
- **Def.:** tükrözés = (standard bázisban) normális mátrixú involúció
- **Áll.** π ortogt. proj. $\Leftrightarrow I - 2\pi$ tükrözés
- **Áll.** τ tükr. $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(I - \tau)$ ortog. proj.
- **Áll.:** T normális mátrix egy tükr. $\Leftrightarrow T$ sajátértékei ± 1
- **Köv.:** tükrözés egyszerre unitér és önadj. (valósra egyszerre ortog. és szimm.)
- **Példa:** $u^\perp$ -re tükr: $v \mapsto v - 2\frac{u^*v}{u^*u}u$

Gyakorló feladatok:

Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definiték és miért?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2 -es valós normális mátrixok

- A 2×2 -es valós
- másodfokú valós kar. pol
- a sajátértékek: vagy egy/két valós, vagy egy konjugált pár
- egy/két valós sajátérték: Ekkor A normális $\Leftrightarrow A$ szimmetrikus.
- konjugált pár: $a + bi, a - bi$. Ekkor A normális $\Leftrightarrow A - aI$ normális $\Leftrightarrow A - aI$ ferdén szimmetrikus:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$$

alakú.

Alkalmazott algebra - SVD

Ivanyos Gábor

2011 ősz

SVD - szinguláris értékek szerinti felbontás

Poz. szemidefinit mátrixok spektrálfelbontásának általánosítása
nem feltétlenül négyzetes mátrixokra

"Közelítő" webkeresés egy modellje

- dokumentumok (weblapok) $\sim$ vektorok,
- a koordináták a (lényeges) szavaknak felelnek meg:
- A koordináták kiszámítására példák:
 - egyszerű incidencia: 0 vagy 1
 - fontosság szerinti súlyok
Pl. relatív említési gyakoriságból kalkulált
Számíthat az említés módja is: címben, hivatkozásban, szövegben
- keresőkérdés $\sim$ dokumentum-vektor
- Feladat: a kérdés vektorához minél jobban illeszkedő:
"hasznló", "közeli" dokumentum-vektor keresése
- Nem pontos illeszkedés: lehet, hogy a legjobb találat nem is tartalmazza a kérdés egy szavát se, inkább
- A kérdés "jelentéséhez" van köze

LSI - mögöttes szemantikájú indexelés

- Latent Semantic Indexing
- m dokumentum (pl. weblap), n szó
- $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$ -es, $\alpha_{ij} \sim j$. szó az i . dok-ban
- A sorai $\sim$ dokumentumok
- A oszlopai: szavak "profilja"
- **Feltevés:**
 - a háttérben (általunk nem ismert) fogalmak, jelentések állnak
 - a szavak jól közelíthetők fontosabb jelentések **elegyével**
 - a jelentéseket a dokumentumokból "tanulhatjuk" meg
 - a közelítés hibája: "zaj", "lényegtelen", "esetleges" dolgok

LSI

- $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$ -es, $\alpha_{ij} \sim j$. szó az i . dok-ban

- Formálisan:

■ léteznek $f_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{m1} \end{pmatrix}, \dots, f_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektorok

(a jelentések profiljai), hogy

- A oszlopai jól közelíthetők $f_1, \dots, f_k$ **lineáris kombinációival**, azaz létezik olyan B $m \times k$ -as mátrix, hogy

$$A \approx FB,$$

ahol $F = (f_{ij})$.

B i -edik sora az A -nak az i -edik oszlopát közelítő kombináció együtthatóiból áll

Alacsony rangú közelítés

- **Áll.:** Legyen A' egy $m \times n$ -es mátrix. Ekkor A' rangja $\leq k \Leftrightarrow$ léteznek olyan B $k \times n$ -es és F $m \times k$ -as mátrixok, amelyekre

$$A' = FB.$$

Biz.: A' rangja $\leq k \Leftrightarrow$ létezik olyan F $m \times k$ -as, hogy A' oszlopai megkaphatók F oszlopainak lineáris kombinációiként
Emellett B i -edik sora az A' i -edik oszlopát előállító kombináció együtthatóiból áll.

- **Tehát:** a "lényeg" $\sim A$ alacsony rangú közelítése

Eredet: főkomponensanalízis

- K. Pearson 1901
- $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$ -es, $\alpha_{ij} \sim j$. adat értéke az i . mérés során
PI. kérdőív kérdéseire adott válaszok, skálázva
- Oszlopok: $\sim$ val. változók mért adatai $a^j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$
- Sorok: egy-egy mérésre az adatok sora $a_i = (\alpha_{i1} \quad \dots \quad \alpha_{in})$
- Feltesszük: $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 0 \sim 0$ -ra normált empirikus átlagok
- $|a_j|^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}^2$: $\sim$ empirikus szórásnégyzet
- a legfontosabb "rejtett összetevő": abban az irányban vett adatok, amerre a leginkább szórnak.

Főkomponensanalízis

- **u irányú adatok:** Legyen $u = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ egységvektor ($u^T u = 1$).

Az i -edik mérés u irányú adata a_i^T vektor u irányú (u -val párhuzamos) komponensének az együtthatója, azaz $a_i u = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mu_j$. Az m darab u irányú adat együtt: Au .

- fő irány: az az u , amelyre $|Au|^2 = \sum_{i=1}^m (a_i u)^2$ maximális
- a megfelelő "rejtett változó" $\sim$ az Au oszlopvektor
- a következő fő irány: az u -ra merőlegesek közül a legnagyobb vetületet adó irány, stb...

Főkomponensanalízis és szinguláris értékek

- $A = (\alpha_{ij})$ tetszőleges $m \times n$ -es mátrix ($\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 0$ nem kell.)
- $u_1 \in \mathbb{R}^n$ olyan egységvektor, amelyre
 $|Au_1|^2$ a lehető legnagyobb
- Ha $u_1, \dots, u_s$ már megvan, u_{s+1} egy olyan egységvektor
 $\{u_1, \dots, u_s\}^\perp$ -ből, amelyre
 $|Au_{s+1}|^2$ a lehető legnagyobb
- Mi lehet $u_1, \dots, u_n$?

Főkomponensanalízis és szinguláris értékek

- **Észrevétel:** $|Au|^2 = u^T A^T A u$, és $A^T A$ poz. szemidefinit
utóbbi biz.: $(A^T A)^T = A^T A$, tehát $A^T A$ szimm.
 $v^T (A^T A) v = (Av)^T (Av) \geq 0$. (Egyenlőség $v \in \ker A$ -ra).
- **Köv.:** $\exists M$ ortog., hogy $M^T A^T A M = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$.
Feltehető, hogy $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.
- (Elnevezés: **szinguláris értékek**)
- **Áll.:** $|u| = 1$ esetén $|Au| \leq \sigma_1$ és ha $|Au| = \sigma_1$, akkor u sajátvektora $A^T A$ -nak σ_1^2 sajátértékkel. (zh091030, 5. fa.)

Biz.: Legyen M mit fent és $v := M^T u = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$. Ekkor $u = Mv$ és

$|Au|^2 = |AMv|^2 = v^T M^T A^T A M v = \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \sigma_1^2 = \sigma_1^2$, és ha $\nu_i \neq 0$ olyan i -re, amelyre $\sigma_i < \sigma_1$, akkor $<$ áll. Különben $u = Mv$ az M olyan oszlopainak lineáris kombinációja, amelyek sajátvektorok σ_1^2 sajátértékkel.

Főkomponensanalízis és szinguláris értékek

- **Áll.:** Tfh. $|u| = 1$ és $u \perp M$ első k oszlopára. Ekkor $|Au| \leq \sigma_{k+1}$ és ha $|Au| = \sigma_k$, akkor u sajátvektora $A^T A$ -nak σ_k^2 sajátértékkel.

Biz.: Legyen $v = M^T u = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$. A merőlegességi feltétel miatt

$\nu_1 = \dots = \nu_k = 0$, Ekkor $Au = AMv$ és

$|Au|^2 = \sum_{i=k+1}^n \nu_i^2 \sigma_i^2 \leq \sum_{i=k+1}^n \nu_i^2 \sigma_{k+1}^2 = \sigma_{k+1}^2$. Az egyenlőség vizsgálata is hasonló a $k = 1$ esethez.

- **Köv.:** A fő irányok $A^T A$ sajátvektorai, azaz (lényegében) M oszlopai.

Szinguláris értékek

A $m \times n$ -es **valós** mátrix **Megj.**: (a komplex eset hasonlóan működik)

- **Def.:** A szinguláris értékei $A^T A$ (nem nulla) sajátértékeinek $\sqrt{}$ -e

- **Áll.:** $A^T A$ rangja = A rangja

Biz.:

Észrevétel: $\ker A^T \cap A\mathbb{R}^n = 0$.

Észrv. biz.: Tfh. $v \in \ker A^T \cap A\mathbb{R}^n$: $A^T v = 0$ és $v = Au$.

Ekkor $u^T A^T A u = u^T A^T v = 0$, így $Au = 0$.

Dimenziótétel A^T -nek $A\mathbb{R}^n$ -re való megszorítására + Észrv.:

$\dim A^T A\mathbb{R}^n = \dim A\mathbb{R}^n - 0 = \dim A\mathbb{R}^n$, azaz

$A^T A$ rangja = A rangja.

- **Köv.:** (poz.) szinguláris értékek száma = rang

└ SVD - szinguláris értékek szerinti felbontás

└ Szinguláris értékek

A és A^T szing. értékei

- **Áll.:** Ha σ (poz.) szing. értéke A -nak, akkor A^T -nak is (és viszont).
- **Részletesebben:** Ha v sajátvektora $A^T A$ -nak $\sigma^2 \neq 0$ sajátértékkel, akkor Av sajátvektora AA^T -nak szintén σ^2 sajátértékkel.
Biz.: Tfh. $0 \neq v$ és $A^T Av = \sigma^2 v$. Ekkor
 $(AA^T)(Av) = A(A^T A)v = A\sigma^2 v = \sigma^2 Av$.
 $v = \frac{1}{\sigma^2} A^T Av$, így $Av \neq 0$.
- **Megj.** A (poz.) szing. értékek multiplicitásai is ugyanazok.
Biz.: A $\frac{1}{\sigma} A$ az $A^T A$ σ^2 -sajátalterét az AA^T σ^2 -sajátalterébe viszi. A $\frac{1}{\sigma} A^T$ pedig fordítva.
 A két leképezés megszorítása a σ^2 -sajátalterekre inverzei egymásnak.

SVD - A fő lemma

Lemma: Tetsz. A $m \times n$ -es valós mátrixhoz léteznek M $n \times n$ -es és M' $m \times m$ -es ortogonális mátrixok, hogy:

$$M'^T A M = \Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix} \text{ illetve } \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Az első az $m > n$ esetet, a második az $m < n$ esetet ábrázolja

$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$: $A^T A$ sajátértékeinek nemnegatív $\sqrt{}$ -e

SVD - a fő lemma bizonyítása

- Legyen M olyan ortog., amelyre

$$M^T A^T A M = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$$

- **Megj:** főkomponensanalízisnél M oszlopai: a fő irányok, AM oszlopai: a fő irányok mentén vett értékek vektorai
- Legyenek AM oszlopai $w_1, \dots, w_n$.
- $(AM)^T(AM) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ miatt
- $w_i^T w_j = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

SVD - a fő lemma bizonyítása II

- $w_i^T w_j = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$
- Tfh. $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, de $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$.
- **Megj.:** $i > r$ -re $w_i = 0$ (mert $w_i^T w_i = \sigma_i^2 = 0$)
- Legyenek $i \leq r$ -re $v_i = \frac{1}{\sigma_i} w_i$
- Ha $m > r$, egészítsük ki $v_{r+1}, \dots, v_m$ -mel $\mathbb{R}^m$ ortonormált bázisává.
- $v_i^T w_j = \begin{cases} \sigma_i, & \text{ha } i=j < r \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$
- Legyenek M' oszlopai: $v_1, \dots, v_m$. Ekkor M' ortog. és $M'^T A M = \Sigma'$

Teljes SVD

Tétel: Tetsz. A $m \times n$ -es valós mátrixhoz léteznek M $n \times n$ -es és M' $m \times m$ -es ortogonális mátrixok, hogy

$$A = M' \Sigma' M^T, \quad \text{ahol}$$

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Biz.: a fő lemma egyenlőségét M' -vel ill. M^T -vel szorozzuk balról-jobbról.

Redukált SVD

Tétel: Tetsz. A $m \times n$ -es valós, r rangú mátrixhoz vannak U' $m \times r$ -es, U $n \times r$ -es mátrixok, hogy

- $U^T U = U'^T U' = I_r$, azaz U , ill. U' oszlopai ortonormált rendszerek
- $A = U' \Sigma U^T$, ahol

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

- $\sigma_1 > \dots > \sigma_r > 0$ A (poz.) szing. értékei.

Megj. (a komplex eset): $U^* U = U'^* U' = I_r$, $A = U' \Sigma U^*$.
(Ekkor $A^* A$ lesz poz. szemidef. önadj.)

Redukált SVD - bizonyítás

- Teljes SVD: $A = M'\Sigma'M^T$
- Legyenek $M = (U|T)$, $M' = (U'|T')$.
 U ill. U' az M ill. M' első r oszlopa. Nyilván $U^T U = U'^T U' = I_r$.
- $\Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A = (U'|T') \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^T \\ T^T \end{pmatrix} = (U'\Sigma|0) \begin{pmatrix} U^T \\ T^T \end{pmatrix} = U'\Sigma U^T$.

SVD: "Egyértelműség" kérdése

- Tfh. $A = U'\Sigma U^T$, ahol $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$,
 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, U' $m \times r$ -es U $n \times r$ -es, $U'^T U' = I_r$,
 $U^T U = I_r$.
- Ekkor $A^T A = U\Sigma U'^T U'\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T$, így $\Sigma^2 = U^T A^T A U$.
- Innen: U oszlopai az $A^T A$ mátrix nem 0 sajátértékeihez tartozó sajátaltérének ortonormált bázisait adják.
 Egészítsük ki U -t egy $n \times n$ -es M ortog. mátrixszá $\ker A^T A$ -ból vett oszlopvektorokkal. Erre $M^T A^T A M = \Sigma'^2$.
- U' : fenti érvelés, $A \leftrightarrow A^T$ cserével.
- **Köv:** ha A pozitív szinguláris értékei páronként kül, akkor U és U' az oszlopok egységszerese (± 1) erejéig egyértelmű.

SVD - példa

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^T A^T A M = \Sigma'^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma' = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\blacksquare M = \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\blacksquare AM = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{12} & c_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{22} & c_{23} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \Sigma = \sqrt{6}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \text{tehát } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

SVD szimmetrikus mátrixokra

$$A^T = A$$

- a szinguláris értékek A sajátértékeinek abszolút értékei (multiplicitással).

- Tfh. $A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T,$

ahol U $n \times n$ -es ortogonális; $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

- Ekkor A egy lehetséges teljes SVD-je

$$A = U' \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & |\lambda_2| & \\ & & \ddots \\ & & & |\lambda_n| \end{pmatrix} U^T,$$

ahol U' i -edik oszlopa U i -edik oszlopának ± 1 -szerese, aszerint, hogy $\lambda_i \geq 0$ vagy $\lambda_i < 0$.

A Frobenius-norma

A $m \times n$ -es valós

- **Def. (Frobenius-norma-négyzet):** (= eukl. hossznégyzet)

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

- Ugyanaz, mint: sorok v. oszlopok hossznégyzet-összege
- Elegáns alak: $\|A\|^2 = \text{tr } A^T A = \text{tr } A A^T$, ahol
- Emlék. (nyom, trace): $B = (b_{ij})$ $n \times n$ -esre $\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii}$
- Megj. (komplex mátrixokra):
 $\|A\|^2 = \sum \sum |a_{ij}|^2 = \text{tr } A^* A = \text{tr } A A^*$
- Nyom tulajdonsága: A $m \times n$ -es, B $n \times m$ -esre:
 $\text{tr } AB = \text{tr } BA.$

Normatartó szorzások:

Áll.: Tfh. A $m \times n$ -es, B olyan $m' \times m$ -es amelynek az oszlopai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $B^T B = I_m$), C olyan $n \times n'$ -es, amelynek a sorai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $CC^T = I_n$). Ekkor

$$\|BA\|^2 = \|A\|^2 = \|AC\|^2.$$

Biz.: A oszlopai $a^1, \dots, a^n$, BA oszlopai $Ba^1, \dots, Ba^n$. B az $\mathbb{R}^m$ standard bázisát B képterének egy ortonormált bázisába viszi, tehát B egy izometria $\mathbb{R}^m$ és B képtere között.

Így $|Ba^j|^2 = |a^j|^2$ és $\|BA\|^2 = \sum |Ba^j|^2 = \sum |a^j|^2 = \|A\|^2$.

A másik =ség innen $A \leftarrow A^T$, $B \leftarrow C^T$ helyettesítéssel.

Másik biz.:

$$\|BA\|^2 = \text{tr } A^T B^T BA = \text{tr } A^T I_m A = \text{tr } A^T A = \|A\|^2.$$

Az Eckart–Young-tétel

- Eckart–Young 1936 (Psychometrika)
- Korábban: Schmidt approximációs tétele 1907 (függvények kontextusában)
- **Redukált SVD:** $A = U'\Sigma U^T$.
- $k \leq r$ -re legyenek
 - $U^{(k)}$: U első k oszlopa
 - $U'^{(k)}$: U' első k oszlopa
 - $\Sigma^{(k)} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$: Σ bal felső $k \times k$ -as része
 - $A^{(k)} := U'^{(k)}\Sigma^{(k)}U^{(k)T}$
- **Tétel:** A -nal $A^{(k)}$ az (egyik) legjobb $\leq k$ rangú közelítése a Frobenius-normában
(A hiba: $\|A - A^{(k)}\|^2 = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2$)
- **Megj.:** Mirsky 1960: és még sok más fontos normában is ez a legjobb

Eckart–Young teljes SVD-vel

- **Teljes SVD:** $A = M'\Sigma'M^T$, ahol
- Σ' $m \times n$ -es diagonális, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ nemnulla átlós elemekkel
- $\Sigma'^{(k)}$: írjunk Σ' -ben $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$ helyébe 0-t
- $A^{(k)} = M'\Sigma'^{(k)}M^T$

Eckart–Young bizonyítása

- Az U'^T -vel való balról, U -val jobbról szorzás tartja a Frobenius-normát:

- $$\|A - A^{(k)}\|^2 = \|U'^T(A - A^{(k)})U\|^2 = \|\Sigma - \widetilde{\Sigma}^{(k)}\|^2 = \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

ahol $\widetilde{\Sigma}^{(k)} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$ $r \times r$ -es

- Legyen A' egy $\leq k$ rangú $m \times n$ -es

- $$\|A - A'\|^2 = \|U'^T(A - A')U\|^2 = \|U'^T A U - U'^T A' U\|^2 = \|\Sigma - C\|^2,$$

ahol $C := U'^T A' U \leq k$ rangú $r \times r$ -es

- Elég tehát a következő spec. esetet igazolni:

- **Spec. eset:** tetsz. $C \leq k$ rangú $r \times r$ -esre:

$$\|\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) - C\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

Eckart–Young spec. eset bizonyítása

Spec. eset: tetsz. $C \leq k$ rangú $r \times r$ -esre:

$$\|\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) - C\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

- Legyen $W = \ker C$ egy $r - k$ dimenziós altere
- U_1 $r \times (r - k)$ -as oszlopai: W egy ortonormált bázisa
- U_2 $r \times k$ -as oszlopai: $W^\perp$ egy ortonormált bázisa
- $(U_1 | U_2)$ $r \times r$ -es ortogonális
- $D := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$

Eckart–Young spec eset bizonyítása II

$$\begin{aligned}
\|D - C\|^2 &= \|(U_1|U_2)^T(D - C)(U_1|U_2)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} (D - C)(U_1|U_2) \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} U_1^T(D - C) \\ U_2^T(D - C) \end{pmatrix} (U_1|U_2) \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} U_1^T(D - C)U_1 & U_1^T(D - C)U_2 \\ U_2^T(D - C)U_1 & U_2^T(D - C)U_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&\geq \|U_1^T(D - C)U_1\|^2 = \|U_1^T D U_1 - U_1^T C U_1\|^2 = \|U_1^T D U_1\|^2
\end{aligned}$$

$\geq$: a mátrix normája $\geq$ a mátrix bal felső blokkjának a normája

utolsó =: $U_1^T C U_1 = 0$ mert $C U_1 = 0$ (U_1 oszlopai C magjából)

Elég tehát: $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ -re és tetsz olyan U_1 $r \times (r - k)$ -asra, amelyre

$U_1^T U_1 = I_{r-k}$, teljesül

$$\|U_1^T D U_1\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2$$

Eckart–Young spec eset bizonyítása III

Utolsó lépés $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, U_1 $r \times (r - k)$ -as, amelyre $U_1^T U_1 = I_{r-k}$.

$$\begin{aligned} \|U_1^T D U_1\|^2 &= \text{tr}(U_1^T D U_1)^T U_1^T D U_1 = \text{tr} U_1^T D^T D U_1 = \text{tr} U_1 U_1^T D^T D = \text{tr} U_1 U_1^T D^2 \\ &= \sum_{i=1}^r \beta_{ii} \sigma_i^2, \end{aligned}$$

ahol $U_1 U_1^T = (\beta_{ij})$.

- **Áll.:** $U_1 U_1^T$ egy $r - k$ rangú merőleges vetítés
 $(U_1 U_1^T)^T = U_1 U_1^T$ és $(U_1 U_1^T)^2 = U_1 U_1^T U_1 U_1^T = U_1 I_{r-k} U_1^T = U_1 U_1^T$
- **Innen:** $0 \leq \beta_{ii} \leq 1$ és $\sum_{i=1}^r \beta_{ii} = r - k$.
- Fenti feltételek mellett: $\sum_{i=1}^r \beta_{ii} \sigma_i^2 \rightarrow \min$, ha a legkisebb σ_i^2 -eket vesszük a lehető legnagyobb súllyal:
- $\|U_1^T D U_1\|^2 = \sum_{i=1}^r \beta_{ii} \sigma_i^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2$, épp ez kellett.

LSI - keresés záró megj.

- **Észrevétel:** Ha w A egy sora, az $A^{(k)}$ mátrixnak a megfelelő sora éppen w vetülete az $A^{(k)}$ sorai által generált altérre.
Biz.: Ha nem az lenne, kicserélve a sort w vetületével jobb közelítést kapnánk
- Keresőkérdés $\sim$ dokumentum-vektor $\sim A$ sorai.
- **Eljárás:** A keresőkérdés vektorát levetítjük $A^{(k)}$ sorai által gen. altérre.

Az SVD kiszámításáról

- **Naiv módszer:** $A^T A$ sajátértékei a kar. pol.-ból, majd a sajátalterek homogén lin. egyenletrendszerekkel
Gauss-elimináció
- **Gond:** a Gauss-elimináció numerikus hibákra instabil
- Hatékony **numerikus módszerek** vannak (később tárgyaljuk)

Négyzetgyök

Áll.: Ha A $n \times n$ -es valós poz. szemidef., akkor $\exists!$ olyan B $n \times n$ -es poz. szemidef., hogy $A = B^2$ (jel.: $B = \sqrt{A}$).

Biz.: Legyen U ortog., hogy $D = U^T A U$ diag. (≥ 0 elemekkel),

$B' = \sqrt{D}$ (elemenként).

B' valós, poz. szemidef. és $B'^2 = D$.

$B = UB'U^T$ is poz. szemidef, továbbá

$$B^2 = UB'U^T UB'U^T = UB'^2U^T = UDU^T = A.$$

Egyértelműség: Tfh $A = B^2$. Legyen U olyan ortog., hogy $U^T B U = B'$ diag. Ekkor $U^T A U = U^T B^2 U = B'^2$ diag.

Innen: $U^T A U$ és B' sajátalterei ugyanazok: $U^T A U v = \lambda v \Leftrightarrow B' v = \sqrt{\lambda} v$

Innen: ($v = Uu$): $Au = \lambda u \Leftrightarrow UB'U^T u = \sqrt{\lambda} u \Leftrightarrow Bu = \sqrt{\lambda} u$. Így B nem lehet más, mint fenti konstrukció.

Poláris felbontás

Tétel: Tetsz. A $n \times n$ -es valós mátrixra $A = PM$, ahol

- M $n \times n$ -es ortog.
- P $n \times n$ -es poz. szemidef.
- P egyértelmű, és ha A nemszing., akkor M is.

Biz. Létezés: A teljes SVD-je: $A = U'\Sigma'U^T$, ahol U és U' $n \times n$ -es ortog., Σ' pedig egy $n \times n$ -es diag. nemneg. Legyen $P = U'\Sigma U'^T$ és $M = U'U^T$.

P egyért.: $AA^T = PMM^TP = P^2$, így $P = \sqrt{AA^T}$. Ha A invertálható, akkor P is az és $M = P^{-1}A$.

Megj.: hasonlóan, $A = M'P'$, ahol M' unitér és P' poz. szemidef.
 $P' = P$ akkor és csak akkor, ha $A^TA = AA^T$, azaz ha A normális.

Megj: Komplex $A = PM$, ahol M unitér, P poz. szemidef önadj.
 1-dim. komplex eset: komplex számok felbontása $re^{i\phi}$ alakban.

(teljes) SVD a poláris felbontásból

Négyzetes mátrixokra

- $A = PM$
- M ortog.
- P poz. szemidef: $M'^T P M' = \Sigma$ diag,
- $A = U' \Sigma U^T$, ahol $U' = M'^T$, $U = M^T M'^T$.

Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása SVD-vel

- **A feladat:** $Ax = 0$ megoldása, azaz $\ker A$ számítása.
- **Emlékeztető:** $A^T A$ rangja = A rangja, így (pl. a dimenziótételből)

$$\ker A^T A = \ker A.$$

- **Teljes SVD:** $A = M' \Sigma' M^T$
 $\Sigma' = M'^T A M$, innen
 $\Sigma'^2 = \Sigma'^T \Sigma' = M^T A^T M' M'^T A M = M^T A^T A M$
- $\Sigma'^2 = M^T A^T A M$, azaz M oszlopai $A^T A$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis
- **Köv.:** M utolsó $n - r$ oszlopa: $\ker A^T A = \ker A$ egy ortonormált bázisa

Homogén lin. egyenletrendszerek megoldása legkisebb négyzetes hibával

- Elnevezés: "total least squares"
- $Ax = 0$ közelítő megoldása a legkisebb négyzetes hibával $|x| = 1$ mellett:

$$|Ax|^2 \longrightarrow \min, \text{ feltéve } |x| = 1.$$

Feltehető: $\ker A = 0$, így n poz. szing. érték van.

- SVD: $A = U'\Sigma U^T$ így $\Sigma^2 = U^T A^T A U$.
- legyenek $v_1, \dots, v_n$ U oszlopai. Ortonormált bázis, $A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$.
- Legyen $x = \sum \alpha_i v_i$, ahol $|x|^2 = \sum |\alpha_i|^2 = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= (Ax, Ax) = (x, A^T A x) = \left(\sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i \sigma_i^2 v_i \right) = \sum \sigma_i^2 |\alpha_i|^2 \\ &\geq \sum |\alpha_i|^2 \sigma_n^2 = \sigma_n^2, \quad (\text{ez, a másik irányban volt a főkomp-nél}) \end{aligned}$$

- az optimum σ_n^2 , $x = v_n$ -nel el is érhető
- $\sigma_{n-1} > \sigma_n$ esetén az optimális x ± 1 -szeres erejéig egyértelmű.

Inhomogén egyenletrendszerek megoldása legkisebb négyzetes hibával

- $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer. A $m \times n$ -es valós, $b \in \mathbb{R}^n$
- nem mindig van **pontos megoldás**: olyan $x \in \mathbb{R}^n$, amelyre $Ax - b = 0$
- **Közelítő megoldás**: olyan x , amelyre $|Ax - b|^2 \rightarrow \min$
- Ilyen x -re Ax éppen b -nek $A\mathbb{R}^n$ -re való $\perp$ vetülete
Tudjuk: altér legközelebbi pontja a vetület
- **Fogjuk látni**: létezik A^+ $n \times m$ -es, amelyre
 AA^+ éppen az $A\mathbb{R}^n$ -re való $\perp$ vetítés
- (az egyik) **legkisebb négyzetes hibájú megoldás**: $x = A^+b$.
(mert $Ax = AA^+b =$ a vetület)
- az összes mo.: a $\ker A + A^+b$ eltolt altér

A Moore–Penrose-féle pszeudoinverz

- **Def.:** A $m \times n$ -es valós mátrixnak egy pszeudoinverze egy olyan A^+ $n \times m$ -es valós mátrix, amelyre

- $AA^+A = A$,
- $A^+AA^+ = A^+$,
- AA^+ szimmetrikus,
- A^+A szimmetrikus.

(Megj.: komplex A -ra szimm. helyett önadj.)

- **Pszeudoinverz az SVD-ből:** Ha A red. SVD-je $A = U'\Sigma U^T$, akkor $A' = U\Sigma^{-1}U'^T$ (egy) pszeudoinverze A -nak.

Biz.: $U^T U = U'^T U' = I_r$ -ből $AA' = U'\Sigma U^T U\Sigma^{-1}U'^T = U'U'^T$ és $A'A = U\Sigma^{-1}U'^T U'\Sigma U^T = UU^T$.

Az $AA' = U'U'^T$ és $A'A = UU^T$ a segítségével:

- $AA'A = U'U'^T A = U'U'^T U'\Sigma U^T = U'\Sigma U^T = A$.
- $A'AA' = A'U'U'^T = U\Sigma^{-1}U'^T U'U'^T = U\Sigma^{-1}U'^T = A'$
- $(AA')^T = (U'U'^T)^T = U'U'^T = AA'$.
- $(A'A)^T = (UU^T)^T = UU^T = A'A$.

Pszeudoinverz és vetítés

Lemma: Tfh. A^+ egy pszeudoinverze A -nak. Ekkor AA^+ az $\mathbb{R}^m$ tér merőleges vetítése A képterére, A^+A pedig az $\mathbb{R}^n$ tér merőleges vetítése A^T képterére.

Biz.:

- AA^+ szimm. és $(AA^+)^2 = AA^+$, azaz egy merőleges vetítés. AA^+ képtere nyilván $\subseteq A$ képtere. $A = (AA^+)A$ képtere nyilván $\subseteq AA^+$ képtere.

Tehát AA^+ merőleges vetítés A képterére.

- A^+A is merőleges vetítés (hasonló biz.).

A^+A szimm., így $A^+A = A^T A^{+T}$, ezért A^+A képtere $\subseteq A^T$ képtere.

$A = AA^+A$ miatt A^+A rangja $\geq A$ rangja, ami egyben A^T rangja. Ezért a két képtér megegyezik.

Tehát A^+A merőleges vetítés A^T képterére.

Pszeudoinverz - egyértelműség

- **Áll.:** A^+ és A' két pszeudoinverze A -nak $\Rightarrow A' = A^+$.
 - **Biz.:** A lemma miatt AA^+ is és AA' az ortogonális projekció A képterére, így
 - $AA' = AA^+$.
 - Hasonlóan, $A'A = A^+A$.
 - Ezekből $A' = A'AA' = A'AA^+ = A^+AA^+ = A^+$.
- **Köv.:** Ha $A = U'\Sigma U^T$ az A mátrix red. SVD-je, akkor A pszeudoinverze $A^+ = U\Sigma^{-1}U'^T$.

Pszeudoinverz - példa I.

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \text{SVD: } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} A^T$$

Pszeudoinverz - példa II.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$
- SVD: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$
- $A^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T.$

Pszeudoinverz - feladatok

- $(A^+)^+ = A$.
- $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
- A^+ rangja = A rangja.
- Ha A invertálható négyzetes mátrix, akkor $A^+ = A^{-1}$.
- Ha A egy merőleges vetítés (négyzetes) mátrixa, akkor $A^+ = A$.

Pseudoinverz - példa III.

- Legyen $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- A és B merőleges vetítések, így $A^+ = A$, $B^+ = B$.
- $(AB)(BA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A$
- $(AB)(BA)$ nem vetítés, de $(AB)(AB)^+$ az kell legyen, így
- $(AB)^+ \neq BA = B^+A^+$.
- AB SVD-je $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2BA$.

A pszeudoinverz és a magtér

A $m \times n$ -es valós

- **Áll.:** A^T képtere $= (\ker A)^\perp$
 - **Biz.:**
 - $\subseteq$: Ha $x \in \ker A$ és $y \in \mathbb{R}^m$, akkor $(A^T y)^T x = y^T A x = 0$, azaz $x \perp A y$. Tehát $A^T \mathbb{R}^m \leq (\ker A)^\perp$.
 - dimenziók =:
 $\dim A^T = A^T$ rangja $= A$ rangja $= \dim A \mathbb{R}^n = n - \dim \ker A = \dim(\ker A)^\perp$.
- **Köv.:** $I - A^+ A$ merőleges vetítés A magterére
 - **Biz.:** $A^+ A$ merőleges vetítés $A^T \mathbb{R}^m$ -re
 - $I - A^+ A$ merőleges vetítés $(A^T \mathbb{R}^m)^\perp$ -re
 - $(A^T \mathbb{R}^m)^\perp = (\ker A)^{\perp\perp} = \ker A$

SVD - feladatok

- **számpéldák önálló gyakorlásra** zh101029, 3. és 4. feladatok; pzh101108, 3. és 4. feladatok; pzh091106 2.feladat
- (zh091030, 6. feladat) Legyen A egy $m \times n$ -es valós. Legyen B a következő

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array} \right).$$

Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?

Alkalmazott algebra - Nemnegatív mátrixok

Ivanyos Gábor

2011 ősz

Markov-láncok

- **Pontosabban:** véges állapotú, **homogén** (AKA stacionárius átmenet-valószínűségű) **Markov-láncok**
- **Állapotok:** $\{1, \dots, n\}$
- Állapot-értékű val. változók: $X_0, X_1, X_2, \dots,$
- **Átmenet-valószínűségek:** a_{ij} : az $j \rightarrow i$ átmenet valsz:

$$\Pr(X_{k+1} = i | X_k = j) = a_{ij}$$

- X_k eloszlása: $\sim v^k = \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \vdots \\ \gamma_n^k \end{pmatrix}$ sztochasztikus vektor:

$$\gamma_j^k \geq 0, \sum_{j=1}^n \gamma_j^k = 1$$

Markov-láncok

- Kezdeti eloszlás: v^0 .
- $v^{k+1} = Av^k$
- $A = (a_{ij})$ átmenet-mátrix
(oszlop-)sztochasztikus
(sztochasztikus vektort sztochasztikusba képez):
 - $a_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$)
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ ($j = 1, \dots, n$)
- $v^k = A^k v^0$
- kérdés: v^k aszimptotikus viselkedése
 v^k konvergál-e és hova?
ha konvergál, milyen gyorsan?

Szörfölő:

- állapotok: weblapok
- átment-valószínűség: $a_{ij} = \frac{\#j \rightarrow i \text{ linkek}}{\#j \rightarrow ? \text{ linkek}}$
- feltesszük, hogy minden j -re van $j \rightarrow ?$ link
(pl. szükség esetén beiktatható saját magára mutató virtuális link)
- Korábban említett problémák:
 - több erős komponens: **reducibilitás**
 - "körbemutató linkek": **periodicitás/imprimitivitás**
- **Majd látjuk:** Több fontos sajátosság megfogható a link-gráffal (egyszeres irányított élek, lehetnek hurkok)
- **Markov-láncra**, (v. tetsz. mátrixra) a gráf
 - $j \rightarrow i$, ha $a_{ij} > 0$ és
 - a türelmetlen szörfölőre ez a teljes gráf

A spektrálsugár

- A $n \times n$ -es komplex vagy valós mátrix
- A spektrálsugara:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}.$$

- **Tudjuk:** ha $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A^k v^0 = v$, akkor $Av = v$
Ha ez a $v \neq 0$, akkor v sajátvektora A -nak 1 sajátértékkel

- **Tétel:**

(1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

(2) Ha $\rho(A) > 1$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = \infty$.

Biz.: Schur-felb.: $A = U^* B U$: U unitér, B felső háromszög.

$$(2) \therefore \|A^k\|^2 = \text{tr } A^{k*} A^k = \text{tr } U B^{k*} U^* U B^k U^* =$$

$\text{tr } U B^{k*} B^k U^* = \text{tr } B^{k*} B^k U^* U = \text{tr } B^{k*} B^k = \|B^k\|^2$, elég
tehát B -re belátni. Tfh. $B = (b_{ij})$ -ben $|b_{ii}| > 1$. Ekkor B^k -nak
az i -edik átlós eleme b_{ii}^k és $\|B^k\| \geq |b_{ii}|^k \rightarrow \infty$.

(1) $\therefore$ -hez a köv. lemma.

A spektrálsugár II.

- **Lemma:** $C = (c_{ij})$, $C' = (c'_{ij})$ komplex $n \times n$ -es mátrixok, $D = (d_{ij})$, $D' = (d'_{ij})$ nemnegatív elemű valós mátrixok, hogy $|c_{ij}| \leq d_{ij}$, $|c'_{ij}| \leq d'_{ij}$. Ekkor $|c''_{ij}| \leq d''_{ij}$, ahol $CC' = (c''_{ij})$, $DD' = (d''_{ij})$.

Biz.:

$$|c''_{ij}| = |\sum_{k=1}^n c_{ik} c'_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |c_{ik} c'_{kj}| = \sum_{k=1}^n |c_{ik}| |c'_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n d_{ik} d'_{kj} = d''_{ij}$$

- **Tétel:** (1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

Biz.: Schur-felb.: $A = U^* B U$: U unitér, B felső háromszög. Mivel $A^k = U^* B^k U$, elég B -re.

Legyen $D = (d_{ij})$ egy olyan nemneg. elemű $|b_{ij}| \leq d_{ij}$, továbbá D mindegyik átlós eleme < 1 , de ezek páronként kül.

Ha $B^k = (b^k_{ij})$ és $D^k = (d^k_{ij})$, akkor a lemma miatt $|b^k_{ij}| \leq d^k_{ij}$, így elég $\lim D^k = 0$.

A spektrálsugár III.

- **Tétel:** (1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

Biz. (folyt):

Eddigiek miatt elég arra az esetre, ha A -nak n kül. sajátértéke van. (Előbbi D ilyen lett.)

Spektráltétel spec. esete: $\exists C$, hogy

$$A = C^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) C.$$

$$A^k = C^{-1} \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) C \longrightarrow C^{-1} \text{diag}(0, \dots, 0) C = 0.$$

- **Megj.:** belátható, hogy $\|A^k\| = O(\rho(A)^k)$,
tehát $\rho(A) < 1$ esetén a konvergencia exponenciális
 $O()$ -ban a konstans függ A -tól

A spektrálsugár IV.

- **Egy egyszerű konvergencia-tétel:** Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x - \lambda) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ ($i = 1, \dots, n-1$). Ekkor létezik $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{\lambda} A)^k$, és az egy (nem felt. ortog.) vetítés A -nak a λ -hoz tartozó sajátalterére. **Biz.:** Legyen v egy sajátvektora A -nak λ sajátértékkel és legyen C egy olyan invertálható, aminek első oszlopa v , a többi pedig $(\lambda I - A)C^n$ egy bázisát alkotja. Ekkor $C^{-1} \frac{1}{\lambda} AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, ahol $\rho(A') < 1$. Ezért $\lim A'^k = 0$ és

emiat létezik $\lim (C^{-1} \frac{1}{\lambda} AC)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vetítés az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ által gen. altérre.

Így létezik $\lim (\frac{1}{\lambda} A)^k = C \lim (C^{-1} \frac{1}{\lambda} AC)^k C^{-1}$, és az egy vetítés a $\langle v \rangle$ sajátaltérre.

- **Megj.:** A határérték-vetítés magtere $\lambda I - A$ képtere
- **Megj.:** A konvergencia $\frac{\rho_2(A)}{\rho(A)}$ -ban exponenciális ($\rho_2(A)$ a második legnagyobb sajátérték-absz. érték) 

A spektrálsugár V .

Egyszerű konvergencia-tétel - változat: Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x - \lambda) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ ($i = 1, \dots, n-1$). Legyen $v^0 \notin (A - \lambda I)\mathbb{C}^n$ és $v^k = A^k v^0$. Ekkor a $\langle v^k \rangle$ 1-dim altér "konvergens" és a "határérték" a λ -hoz tartozó sajátaltér.

Biz.: Legyen $w^k = \frac{1}{\lambda^k} v^k$. Ekkor (mivel $v^0 \notin (A - \lambda I)\mathbb{C}^n \supseteq \ker A^k$) $\langle w^k \rangle = \langle v^k \rangle$ és $\lim w^k = (\lim (\frac{1}{\lambda} A)^k) v^0$ egy sajátvektor a λ -sajátaltérből. ($\neq 0$, mert v^0 nem esik a vetítés magjába, ami $A - \lambda I$ képtere.)

a $\langle v^k \rangle$ "irány" konvergenciája helyett szokás:

- v^k koordinátáinak 1 összegűre normálása
(bizonyos feltételek mellett, pl. minden koord. ≥ 0)
- v^k egységvektorra normálása: v^k helyett $\frac{1}{|v^k|} v^k$

ekkor a v^k sorozatnak egy *részsorozata* konvergens
de nagy k -ra v^k közel van egy sajátvektorhoz

Nemnegatív mátrixok - jelölések

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad A = (a_{ij}), \quad A' = (a'_{ij}) \quad n \times n\text{-es valós mátrixok.}$$

- $v \geq 0$, ha $\gamma_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$)
- $v > 0$, ha $\gamma_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$)
- $A \geq 0$, ha $a_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$)
- $A > 0$, ha $a_{ij} > 0$ ($i, j = 1, \dots, n$)
- $v \geq v'$ (illetve $v > v'$), ha $v - v' \geq 0$ ($v - v' > 0$)
- $A \geq A'$ (illetve $A > A'$), ha $A - A' \geq 0$ ($A - A' > 0$)
- **Megj.:** $0 \neq v \geq 0$ -ból nem következik $v > 0$.

Nemnegatív mátrixok - elemi észrevételek

- $A \geq 0 \Leftrightarrow Av \geq 0$ minden $v \geq 0$ vektorra.
- $A > 0 \Leftrightarrow Av > 0$ minden $0 \neq v \geq 0$ vektorra.
- $A \geq A', v \geq v' \Rightarrow Av \geq A'v'$.
- $A \geq A', B \geq B' \Rightarrow A + B \geq A' + B'$.
- $A \geq A', B \geq B' \Rightarrow AB \geq A'B'$.

láttuk erősebb formában komplex mátrixokra

Nemnegatív mátrixok spektrálsugara ("max-min")

Ideiglenes def.: $A = (a_{ij}) \geq 0$, $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq 0$ -ra:

$$\blacksquare \rho'_v(A) := \max \{r \in \mathbb{R} \mid Av \geq rv\} = \min_i \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j$$

(konvenció: 0 nevezőjű tört:= ∞).

A mennyire tudja v -t az összes koordináta irányában megnyújtani.

$$\blacksquare \rho'(A) := \sup \{\rho'_v(A) \mid 0 \neq v \geq 0\}$$

$$\blacksquare \text{Áll.: } \rho'(A) = \sup \{\rho'_v(A) \mid v \geq 0, |v| = 1\} = \max \{\rho'_v(A) \mid v \geq 0, |v| = 1\}.$$

Biz.: első =ség: $\rho'_v(A)$ nem vált a $v \leftarrow \frac{1}{|v|}v$ cserével

második =ség: a $\{v \mid v \geq 0, |v| = 1\}$ halmaz korlátos és zárt, továbbá

$v \mapsto \rho'_v(A)$ folytonos v -ben ezen a halmazon.

Egyenértékűség - előkészületek

- **Áll.:** $0 \leq A \leq A'$ esetén $\rho'(A) \leq \rho'(A')$.

Biz.: Minden $v \geq 0$ -ra $\rho'_v(A) \leq \rho'_v(A')$.

- **Lemma:** $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij})$ nemnegatív valós, hogy $|b_{ij}| \leq a_{ij}$ esetén: $\rho(B) \leq \rho'(A)$. Speciálisan $\rho(A) \leq \rho'(A)$.

Biz.: Tfh. $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ sajátvektora B -nek λ sajátértékkel. A $Bv = \lambda v$ -ben az

i -edik koordinátát felírva: $\lambda \gamma_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \gamma_j$, innen

$|\lambda| |\gamma_i| = \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \gamma_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |\gamma_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |\gamma_j|$, így

$$|\lambda| \leq \min_i \frac{1}{|\gamma_i|} \sum_{j=1}^n a_{ij} |\gamma_j| = \rho'_w(A) \leq \rho'(A), \text{ ahol } w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ |\gamma_2| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix}.$$

Spektrálsugár: egyenértékűség a pozitív esetre

- **Áll.:** Tfh. $A > 0$ és $0 \neq v \geq 0$, hogy $Av \geq \rho'(A)v$ (azaz $\rho'_v(A) = \rho'(A)$). Ekkor $Av = \rho'(A)v$.

Biz.: $\rho := \rho'(A)$ jelöléssel tfh. $Av \neq \rho v$. $0 \neq w := Av - \rho v \geq 0$, így ($A > 0$ miatt) $Aw > 0$. A -val szorozva:

$0 < Aw = A(Av) - \rho \cdot (Av)$, innen $A(Av) > \rho \cdot (Av)$. Ekkor $\rho'_{Av}(A) > \rho$, ellentmondás.

- **Köv.:** Ha $A > 0$, akkor van olyan $0 \neq v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A) = \rho'(A)$.

Biz.: Tudjuk, hogy $\rho'(A) = \rho'_v(A)$ valamely $0 \neq v \geq 0$ vektorra. Az előző állítás alkalmazható.

Spektrálsugár: egyenértékűség

Áll.: Ha $A \geq 0$, akkor van olyan $v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A) = \rho'(A)$.

Biz.: Legyen $k \geq 1$ -re $A_k := A + \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$.

$A_k > 0$, tetsz. $0 \neq v \geq 0$ -ra $\rho'_v(A) \leq \rho'_v(A_k) \leq \rho'_v(A_1)$. Így $\rho'(A) \leq \rho'(A_k) \leq \rho'(A_1)$.

Legyen $v_k \geq 0$ olyan (előző áll), hogy $|v_k| = 1$ és $A_k v_k = \rho'(A_k)v_k$.

A $(v_k, \rho'(A_k))$ sorozat tagjai $\mathbb{R}^{n+1}$ egy korlátos részhalmazából vannak, így (Bolzano-Weierstrass) van konvergens részsorozat: $k_1 < k_2 < \dots < k_\ell < \dots$, hogy létezik $\lim_{\ell \rightarrow \infty} v_{k_\ell} = v$ és $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho'(A_{k_\ell}) = \rho'$.

Tudjuk: $0 \leq v$ és $|v| = 1$, továbbá $\rho'(A) \leq \lim \rho'(A_{k_\ell}) = \rho'$, és

$Av = \lim A_{k_\ell} v_{k_\ell} = \lim \rho'(A_{k_\ell}) v_{k_\ell} = \rho' v$. Utóbbi miatt $\rho' = |\rho'| \leq \rho(A) \leq \rho'(A)$ is igaz, így $\rho' = \rho'(A)$.

Spektrálsugár: "max-min" egy interpretációja (pótlap)

Gazdaság egy modellje: (Leontyev)

- egységnyi i termék előállításához a_{ij} mennyiségű j termék kell
- **készlet:** $v = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$: j -ből γ_j -nyi van
- ezt felhasználva i -ből $\sum_j a_{ij}\gamma_j$ -nyi lesz:
- **új készlet:** Av
- $\rho'_v(A)$: a legrosszabb i -ből a készlet bővülése (v. zsugorodása)
- $\rho'(A)$: $\rho'_v(A)$ **optimuma**
- $\rho'(A) = \rho(A)$ interpretációja: optimális esetben minden termékből ugyanaz ($\rho(A)$) a bővülés aránya
a gazdaság minden szektorában ugyanakkora a növekedés

Alsó és felső korlát a spektrálsugárra

Áll.: $A \geq 0$ -ra

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Biz. (Felső korlát): Tfh. $0 \neq v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq 0$ -ra $\rho'_v(A) = \rho(A)$.

i_0 : az az index, amelyre a $\gamma_{i_0} \geq \gamma_j$ ($j = 1, \dots, n$). Ekkor

$$\rho(A) = \rho'_v(A) \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0j} \frac{\gamma_j}{\gamma_{i_0}} \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0j} \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Alsó és felső korlát a spektrálsugárra

Áll.: $A \geq 0$ -ra

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Biz. (alsó korlát): $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ -re

$$\rho'_v(A) = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

ugyanakkor $\rho(A) = \rho'(A) \geq \rho'_v(A)$.

További egyenlőtlenségek

$$A \geq 0$$

- **Köv.:** $\min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$.

Biz.: $\rho(A^T) = \rho(A)$ (ugyanaz a karakterisztikus polinom).

- **Köv.:** Ha A sor- vagy oszlop-sztochasztikus, akkor $\rho(A) = 1$.
- **Köv.:** Tetsz. $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_n > 0$ -ra:

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i}.$$

Biz.: Legyen $D = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ és $A' = D^{-1}AD = (a'_{ij})$. Ekkor $a'_{ij} = a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i}$, továbbá, mivel A és A' hasonlóak, $\rho(A) = \rho(A')$. Alkalmazzuk a sorösszeg-bebecsléseket az A' mátrixra.

- **Köv.:** $\min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} \leq \rho(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i}$.

Pozitív mátrixok - Perron elmélete

$$A > 0$$

- **Áll.:** $\rho(A) > 0$

Biz.: $\rho(A) \geq a$ legkisebb sorösszeg

- **Áll:** A -nak van pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

Biz.: Tudjuk már, hogy van nemneg. sajátvektor: $0 \neq v \geq 0$: $Av = \rho(A)v$.

$A > 0$ miatt $Av > 0$, így $v = \frac{1}{\rho(A)}Av > 0$.

- **Áll.:** A -nak a $\rho(A)$ sajátértékhez tartozó pozitív sajátvektora skalárszoros erejéig egyértelmű.

Biz.: Tfh. $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} > 0$ és $v' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} > 0$ két sajátvektor: $Av = \rho(A)v$ és

$Av' = \rho(A)v'$. Legyen $\mu = \min_i \frac{\gamma'_i}{\gamma_i}$ és $w = (v' - \mu v) \geq 0$.

$w = \frac{1}{\rho(A)}Aw$, így $A > 0$ miatt $w > 0$, ha $w \neq 0$. De w i -edik koordinátája 0, így csak $w = 0$ lehet, azaz $v' = \mu v$.

Perron II

$$A > 0$$

Áll.: Ha λ komplex sajátértéke A -nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és v egy (komplex) sajátvektora A -nak λ sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.

Biz.: Legyen $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Bármely $i = 1, \dots, n$ -re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}\gamma_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j|,$$

így $w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix}$ jelöléssel $0 \neq w \geq 0$ és $\rho(A)w \leq Aw$. Tudjuk, hogy $\rho(A) = \rho'(A)$ és

volt korábban, hogy $Aw \geq \rho'(A)w$ esetén $Aw = \rho'(A)w$, azaz w egy

nemneg. sajátvektor $\rho'(A)$ sajátértékkel. Így persze $w > 0$ is igaz és a fent az $\leq$

helyett = teljesül:

Perron III

$$A > 0$$

Áll.: Ha λ komplex sajátértéke A -nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és v egy (komplex) sajátvektora A -nak λ sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.

Biz. (folyt):

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |\gamma_j| \quad (i = 1, \dots, n)$$

Ez csak úgy lehet, ha az összes γ_j egy irányba mutat: a $c = \gamma_i / |\gamma_i|$ 1 absz. értékű komplex szám i -től fttlen és $v = cw$.

Perron IV.

Segédáll.: Tfh. B egy $n \times n$ -es $n - 1$ rangú valós mátrix. Legyen $v \in \ker B$, $u \in \ker B^T$. Ha $v^T u \neq 0$, akkor B -nek a $B\mathbb{R}^n$ képtérre vett megszorítása nemelfajuló.

Biz.: rang = $n - 1$ miatt $\ker B = \langle v \rangle$, így elég $v \notin B\mathbb{R}^n$ -t igazolni. Tfh, indirekte, hogy $v = Bw$. Ekkor $v^T u = (Bw)^T u = w^T B^T u = 0$, ellentmondás.

Áll.: $A > 0$ esetén A karakterisztikus polinomjának $\rho(A)$ egyszeres gyöke.

Biz.: Legyenek $v, u > 0$: $Av = \rho(A)v$ és $A^T u = \rho(A^T)u = \rho(A)u$. Ekkor $v^T u > 0$ és $B = A - \rho(A)I$ -vel segédáll miatt $B\mathbb{R}^n$ egy bázisát v -vel kiegészítve bázist kapunk. ebben a bázisban A mátrixa

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $\rho = \rho(A)$ és A' a $B + \rho I$ -nek a $B\mathbb{R}^n$ -re való megszorításának a mátrixa, ennek pedig nem sajátértéke ρ . A kar. polinomja $= (x - \rho)g(x)$, ahol $g(x)$ A' kar. pol.

Perron V

- **Köv.:** $A > 0$ -ra $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{\rho(A)} A)^k$ létezik és az egy projekció a $\rho(A)$ -hoz tartozó 1-dim. sajátaltérre.
- **Pontosabban.:** Legyen $A > 0$ és legyenek $v > 0, u > 0$, amelyekre $Av = \rho(A)v$, $A^T u = \rho(A)u$ és $u^T v = 1$. Ekkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{\rho(A)} A)^k = vu^T$$

Biz.: ld. a következőt.

Perron VI

Segédáll.: Legyen $u, v \in \mathbb{R}^n$, hogy $u^T v = 1$. Ekkor vu^T az egyetlen olyan P projekció-mátrix, amelyre P képtere $\langle v \rangle$ és P^T képtere $\langle u \rangle$.

Megj: $u = v$ -re a $\langle v \rangle$ -ra való merőleges vetítés

Biz.: vu^T rangja 1, $(vu^T)v = v(u^T v) = v1 = v$, és $(vu^T)(vu^T) = v(u^T v)u^T = v1u^T = vu^T$, így vu^T tényleg egy $\langle v \rangle$ képterű projekció. Ugyanígy, $(vu^T) = uv^T$ egy $\langle u \rangle$ képterű projekció.

Egyértelműség: Tfh. P telj. a feltételeket. Ekkor $P(vu^T) = (Pv)u^T = vu^T$ és

$$(vu^T)P = v(u^T P) = v(Pu)^T = vu^T. \text{ Innen}$$

$(P - vu^T)^2 = P - Pvu^T - vu^T P + vu^T = P - vu^T$. Mivel $(P - vu^T)$ képtere $\subseteq \langle v \rangle$, $P - vu^T$ vagy 0 vagy egy projekció $\langle v \rangle$ -re. Utóbbi $(P - vu^T)v = 0$ miatt nem lehet.

Perron és a türelmetlen szörfölő

- **Köv.:** Legyen $A > 0$ és legyen v az a sztochasztikus vektor amelyre $Av = \rho(A)v$. Legyen w^0 tetsz. sztochasztikus vektor és legyen

$$w^{k+1} = Aw^k \text{ sztochasztikusra normálva}$$

(leosztva a koordináták összegével). Ekkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w^k = v.$$

- Tudjuk: sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1.
- **Köv.:** Legyen $A > 0$ sztoch. és legyen v az a sztochasztikus vektor amelyre $Av = v$. Legyen w^0 tetsz. sztochasztikus vektor és legyen

$$w^k = A^k w^0. \quad \text{Ekkor} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} w^k = v.$$

Irreducibilis mátrixok - Frobenius elmélete

$A \geq 0$ $n \times n$ -es

- **Def.: A reducibilis**, ha $\exists \emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}$ (valódi részhalmaz), hogy $a_{ij} = 0$ $j \in J, i \notin J$ esetén.
- **Átfogalmazás:** A reducibilis, ha $\exists P$ permutációmátrix., hogy $P^{-1}AP$ valódi blokk felső háromszög: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} \end{pmatrix}$
(A_{11} $\ell \times \ell$ -es, A_{22} $(n - \ell) \times (n - \ell)$ -es, A_{12} $\ell \times (n - \ell)$ -es.)
- **Gráfos átfogalmazás.** Legyen G_A az az irányított (esetleg hurokéles) gráf $\{1, \dots, n\}$ -en, amelyben $j \rightarrow i$ akkor él, ha $a_{ij} > 0$.
- A reducibilis, ha a G_A csúcsai valódi módon feloszthatók két részre úgy, hogy az első részből a másodikba nem megy él (a második részből az elsőbe még mehet.)
- **Def.: A irreducibilis**, ha nem reducibilis, azaz ha G_A erősen összefüggő

Példák reducibilis/irreducibilis mátrixokra

■ Reducibilisek: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

■ Irreducibilisek: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Megjegyzés:** Itt csak G_A számít, mindegy, hogy A pozitív elemeiben mi áll konkrétan.

Reducibilis/irreducibilis mátrixok: feladatok

- Mutassuk meg, hogy ha $A \geq 0$ irreducibilis, akkor A^T is irreducibilis.
- Ha egy $A \geq 0$ szimmetrikus mátrix reducibilis, akkor valamely P permutációs mátrixra $P^{-1}AP$ blokk-diagonális alakú.
- Minimum hány nulla eleme van egy $n \times n$ -es reducibilis mátrixnak?
- Maximum hány nulla eleme van egy $n \times n$ -es irreducibilis mátrixnak?

Irreducibilitás jellemzése

Áll: Legyen $A \geq 0$ $n \times n$ -es. Ekkor A irreducibilis $\Leftrightarrow (A + I)^n > 0$.

Biz. $\Leftarrow$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} + I & * \\ 0 & A_{22} + I \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (A_{11} + I)^n & * \\ 0 & (A_{22} + I)^n \end{pmatrix} \not> 0.$$

$\Rightarrow$: Legyen A irred. és $0 \neq v \geq 0$.

Legyen J azon koordináták halmaza, amelyekben v pozitív.

$(A + I)v = v + Av$ pozitív J -ben,

és még, ha $|J| < n$, akkor (mivel A irred.), i -ben is,

ahol $i \notin J, j \in J$, hogy $a_{ij} > 0$ (A irred.).

Ekkor $(A + I)v$ több helyen pozitív, mint v .

Indukcióval: ha $0 \neq v \geq 0$, akkor $(A + I)^k v$ legalább $\min(k + 1, n)$ helyen pozitív.

Tehát $(A + I)^n v > 0$ (sőt, $(A + I)^{n-1} > 0$) bármely $v \geq 0$ -ra.

Irreducibilitás jellemzése gráffal

- Észrevétel: $A, B \geq 0$ $n \times n$ -es mátrixokra G_{AB} -ben $j \rightarrow i$ él, ha van olyan $k \in \{1, \dots, n\}$ amelyre $k \rightarrow i$ él G_A -ban és $j \rightarrow k$ pár él G_B -ben.
- **Köv.:** $j \rightarrow i$ él G_{A^ℓ} -ben $\Leftrightarrow$ van G_A -ban j -ből i -be menő ℓ hosszú irányított séta.
Biz.: $\ell = 1$ -re G_A definíciója, $\ell > 1$ -re indukciós lépés: észrevétel A -val és $B = A^{\ell-1}$ -gyel.
- **Köv.:** $j \rightarrow i$ él $G_{(A+I)^\ell}$ -ben $\Leftrightarrow$ van G_A -ban j -ből i -be menő $\leq \ell$ hosszú irányított út.
- **Köv.:** $\ell \geq n - 1$ esetén $j \rightarrow i$ él $G_{(A+I)^\ell}$ -ben $\Leftrightarrow$ van G_A -ban j -ből i -be menő irányított út.

Irreducibilis mátrixok spektrálsugara - Frobenius

- **Áll.:** Ha $A \geq 0$ irreducibilis akkor $\rho(A) > 0$.
 Biz. A -ban nincs csupa 0 sor; a min. sorösszeg alsó korlát $\leq \rho(A)$.
- **Észrevétel:** Ha v sajátvektora A -nak λ sajátértékkel, akkor v sajátvektora $(A + I)^n$ -nek is, $(\lambda + 1)^n$ sajátértékkel.
- **Speciálisan:** ha v sajátvektora A -nak $\rho(A)$ sajátértékkel (tudjuk, hogy $A \geq 0$ esetén van ilyen $v \geq 0$), akkor v sajátvektora $(A + I)^n$ -nek is, $\rho((A + I)^n) = (\rho(A) + 1)^n$ sajátértékkel.
 Ha A irreducibilis, akkor tehát alkalmazható $(A + I)^n$ -re a Perron-elmélet:
- **Tétel (Frobenius):** Tfh. $A \geq 0$ $n \times n$ -es irred. Ekkor
 - $\rho(A)$ sajátértéke A -nak;
 - $\rho(A)$ egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának;
 - létezik A -nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

Példa: ciklus

- Legyen A az $(12 \dots n)$ ciklus permutációmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- A irreducibilis,
- $\rho(A) = 1$,
- A összes sajátértéke 1 absz. értékű,
- $A^k v$ csak kivételes v -re konvergens.

Primitív mátrixok

- **Def.:** Legyen $A \geq 0$ irred. A primitív, ha $\rho(A)$ az egyetlen $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke
- Primitív mátrixra telj. az egyszerű konvergenciatétel feltételei:
- **Tétel:** Tegyük fel, hogy az $A \geq 0$ irreducibilis mátrix primitív. Ekkor

$$\left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k \longrightarrow vu^T,$$

ahol v A -nak, u pedig A^T -nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel, amelyekre $u^T v = 1$.

Változat: $w^0 \geq 0$, $w^{k+1} = Aw^k$, lenormálva (1 hosszára vagy sztochasztikusra) konvergál előbbi v lenormáltjához

- **Példa:** Ha $A \geq 0$ irreducibilis, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor A primitív.

Alkalmazás: gyűjtőlapok és tekintélyek

- Kleinberg 1998
- **Modell:** kétféle lap:
 - értékes infot tartalmazó
 - linkgyűjtemény
- **Róka fogta csuka:**
 - tekintélyes lapra sok jó gyűjtemény mutat
 - jó gyűjtemény sok tekintélyes lapra mutat
- **Számszerűen:**
 - lapok gyűjtő-értéke γ_i , tekintély-értéke τ_i
 - $\tau_i = c \cdot \sum_{j \rightarrow i} \gamma_j \quad (i = 1, \dots, n)$
 - $\gamma_j = c' \cdot \sum_{i \leftarrow j} \tau_i \quad (j = 1, \dots, n)$
 - c és c' normáló tényezők
 - hogy pl. $\sum_{j=1}^n \gamma_j^2 = 1$ és $\sum_{i=1}^n \tau_i^2 = 1$ teljesüljön.

Gyűjtőlapok és tekintélyek II.

■ Róka fogta csuka feloldása

k -adik időpontban a lapok gyűjtő-értéke γ_i^k , tekintély-értéke τ_i^k

- $\tau_i^{k+1} = c' \cdot \sum_{j \rightarrow i} \gamma_j^k$
- $\gamma_j^k = c \cdot \sum_{i \leftarrow j} \tau_i^k$

■ Mátrixosan-vektorosan

- $A = (a_{ij})$ adjacencia-mátrix: $a_{ij} = 1$, ha j mutat i -re, különben 0.
- $\underline{g}^k = (\gamma_1^k, \dots, \gamma_n^k)^T$, $\underline{t}^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_m^k)^T$
- kezdetben $\underline{g}^0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})^T$
- $\underline{t}^k = c_k \cdot A \underline{g}^k \quad k = 0, 1, 2 \dots$
- $\underline{g}^{k+1} = c'_k \cdot A^T \underline{t}^k \quad k = 0, 1, 2 \dots$
- "jó" esetben: $\underline{g} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{g}^k$, $\underline{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{t}^k$
- $\underline{t} = A \underline{g}$, lenormálva

Gyűjtőlapok és tekintélyek III.

- Két sorozatú rekurzióból egy
 - $\underline{t}^k = c_k \cdot A \underline{g}^k$
 - $\underline{g}^{k+1} = c'_k \cdot A^T \underline{t}^k$
helyett
 - $\underline{g}^{k+1} = c''_k \cdot A^T A \underline{g}^k \quad k = 0, 1, 2 \dots$
- **Észrevétel:** $A^T A \geq 0$ poz. szemidef.: primitív, ha irred.
- **Reducibilitás:** Akkor, ha van a lapoknak egy G valódi és egy T része, hogy
 - G beli lap csak T belire mutat
 - G -n kívüli lap csak T -n kívültre mutat

Gyűjtőlapok és tekintélyek IV.

- **Konvergenciatétel alk.:** Irred. esetben $\underline{g}^k$ konvergál a $\rho(A^T A)$ -hoz tartozó pozitív 1 hosszú sajátvektorhoz.
- gyűjtő-értékek $\underline{g}$, tekintély-értékek $A\underline{g}$ alapján.
- Gyakorlatban: nem az egész WWW-re, hanem csak egy viszonylag kicsi, az adott témakörben releváns részére
- **Megj.:** Reducibilis esetben:
 - feltehető: $A^T A$ blokk diagonális
(alk. P -re $P^{-1}A^T A P$ blokk diag.)
 - a blokkok $\sim G_{A^T A}$ összefüggő komponensei
 - a blokkok irreducibilisek
 - konvergencia blokkonként: $(D^{-1}A)^k = D^{-k}A^k$ konvergens,
 D A -val felcs. diag. mátrix: blokkonként a max. sajátérték
 - $\underline{g}^k$ ekkor is konvergál (valamelyik nemneg. $\rho(A)$ -sajátvektorhoz)

Primitív mátrixok egyszerű jellemzései

- **Köv.:** $A \geq 0$ primitív $\Leftrightarrow A^k > 0$ valamely k -ra.
Biz.: $\Rightarrow$: $(\frac{1}{\rho(A)} A)^k \rightarrow vu^T > 0$, így $A^k > 0$, ha k elég nagy.
 $\Leftarrow$: Ha $A^k > 0$, akkor (Perron) A^k -nak $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ az egyetlen $\rho(A)^k$ absz. értékű sajátértéke, és az egyszeres gyöke A^k kar. pol.-jának de akkor A -nak is csak egyetlen $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van.
- **Megj.:** $A \geq 0$ esetén ha $A^k > 0$, akkor $A^\ell > 0$ $\ell > k$ -ra is.
- **Áll.:** Ha $B \geq 0$ irred. és van B -nek pozitív diag. eleme, akkor $B^k > 0$ valamely $1 \leq k \leq 2(n-1)$ -re.
Biz.: Tfh. ℓ -edik diag. elem > 0 . Ekkor, ha G_B -ben i -ből elérhető ℓ és ℓ -ből elérhető j legfeljebb k hosszú ir. úttal, akkor B^k -ban az ij -edik elem > 0 .
- **Köv.:** $A \geq 0$ nem primitív $\Leftrightarrow A^k$ reducibilis valamely $0 < k \leq n$ -re.
- **Köv.:** $A \geq 0$ primitív $\Leftrightarrow A^k > 0$ valamely $k \leq 2n(n-1)$ -re.
Megj.: Az éles korlát $n^2 - 2n + 2$ (Wielandt)

Imprimitív irreducibilis mátrixok

Lemma: Tfh. $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij}) \geq 0$ valós irred., amelyekre $|b_{ij}| \leq a_{ij}$. (Tudjuk már, hogy ekkor $\rho(B) \leq \rho(A) = \rho'(A)$.) Tfh. még: $\rho(B) = \rho(A)$ és $\lambda = \omega \rho(A)$ egy komplex sajátértéke B -nek, ahol $|\omega| = 1$. Ekkor $B = \omega D^{-1} A D$ alakú, ahol $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ és $|d_i| = 1$.

Biz.: Legyen $0 \neq v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, hogy $Bv = \lambda v$. Mindegyik $i = 1, \dots, n$ -re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \gamma_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |\gamma_j|,$$

így a $0 \neq w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix} \geq 0$ -ra $Aw \geq \rho(A)w = \rho'(A)w$. Ekkor szükségképpen $w > 0$

és $Aw = \rho(A)w$. Utóbbi miatt $\leq$ helyett $=$ áll:

Imprimitív mátrixok II.

Lemma biz. (folyt):

$$\left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \gamma_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |\gamma_j|,$$

azaz

$$\left| \sum_{j=1}^n b_{ij} d_j |\gamma_j| \right| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |\gamma_j| \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol $d_j = \gamma_j / |\gamma_j|$. Ez csak úgy lehet, hogy $|b_{ij}| = a_{ij}$ és a nem-nulla komponensek mind a d_i irányba mutatnak:

ha $a_{ij} \neq 0$, akkor $b_{ij}/a_{ij} d_j = d_i$.

Így $b_{ij} = d_i^{-1} a_{ij} d_j$, legyen a_{ij} akár > 0 , akár 0 , azaz $B = D^{-1}AD$, ahol

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Imprimitív mátrixok III.

- $A \geq 0$ irred.
- **Áll.:** Tfh. $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$. Ekkor
 $\omega\rho(a)$ sajátértéke A -nak $\Leftrightarrow \omega A$ hasonló hasonló A -hoz.
 Ez esetben $\omega\rho(a)$ egyszeres gyöke A karakt. polinomjának.
 - **Biz.:** $\Rightarrow$: Lemma $B = A$ -val.
 - $\Leftarrow$: Tfh. $\omega A = D^{-1}AD$, azaz $A = \omega DAD^{-1}$. Ha $Av = \rho(A)v$, akkor
 $w = Dv$ -re $Aw = \omega DAD^{-1}Dv = \omega DAv = \omega\rho(A)Dv = \omega\rho(A)w$.
 - Egyszeresség: Ha $\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - A$ -nak, akkor $\omega\rho(A)$
 egyszeres gyöke $\det xI - \omega A$ -nak.
- **Köv.:** Ha $|\omega| = 1$, $|\omega'| = 1$, továbbá $\omega\rho(A)$ és $\omega'\rho(A)$
 sajátértékei A -nak, akkor ω^{-1} és $\omega\omega'$ is sajátértéke A -nak.
Biz.: Ha $\omega A = D^{-1}AD$ és $\omega' A = D'^{-1}AD'$, akkor $\omega^{-1}A = DAD^{-1}$ és
 $\omega\omega' A = (D'D)^{-1}AD'D$.
- **Áll.:** Ha A -nak s darab $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke van,
 akkor ezek: $e^{2\ell\pi i/s}\rho(A)$, $(\ell = 0, \dots, s-1)$.

Imprimitív mátrixok IV.

Tétel: Tfh. $A \geq 0$ irred, A -nak $s > 1$ darab $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van. Ekkor akkor alkalmas P permutációs mátrixszal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & A_{12} & & & \\ & & A_{23} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{s-2,s-1} \\ A_{s1} & & & & A_{s-1,s} \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} illetve az ij helyen álló nulla (üres) blokk $\mu_i \times \mu_j$ méretű $(i, j = 1, \dots, s)$.

Biz.: Tudjuk: $\omega = e^{2\pi i/s}$ -vel léteznek $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$, hogy $|d_i| = 1$ és

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ -re $D^{-1}AD = \omega A$. Ekkor $\omega a_{ij} = \frac{d_j}{d_i} a_{ij}$, tehát $a_{ij} = 0$, hacsak nem $d_j = \omega d_i$.

Alkalmas permutációval elérhető: $0 = t_0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_s \leq n$, D -nel $\omega^\ell d_1$ -gyel megegyező diagonális elemei $d_{t_\ell+1}, \dots, d_{t_{\ell+1}}$, $\ell = 0, \dots, s-1$.

Imprimitív mátrixok V.

Tétel biz. (folyt.): Mivel A irred., van olyan $i \in \{1, \dots, t_1\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$ valamely $1 \leq j \leq n$ -re. Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega d_1$, így $t_1 + 1 \leq j \leq t_2$ (és innen $t_1 < t_2$).

Hasonlóan, ha $t_2 < n$, akkor van $i \in \{t_1 + 1, \dots, t_2\}$ és $j \in \{1, \dots, n\}$, amelyekre $a_{ij} \neq 0$. Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega^2 d_1$, így $t_2 + 1 \leq j \leq t_3$ és $t_3 > t_2$.

Így folytatva: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s \leq n$.

Ha $t_s < n$, akkor van olyan $0 \leq \ell \leq s - 1$, $t_\ell < i \leq t_{\ell+1}$ és $j > t_s$, hogy $a_{ij} = 0$.

Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega^{\ell+1} d_1$, ellentmondás.

Tehát $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = n$.

Ha $t_\ell + 1 \leq i \leq t_{\ell+1}$, és $a_{ij} \neq 0$, akkor $d_j = \omega d_i = \omega^{\ell+1} d_1$, tehát $t_{\ell+1} + 1 \leq j \leq t_{\ell+2}$, ahol $\ell + 1$ illetve $\ell + 2$ modulo s értendő.

Azaz a cserék után a mátrix tényleg a fenti alakú, ahol $\mu_\ell = t_\ell - t_{\ell-1}$.

Megj. Ha A fenti alakú, akkor A^s blokk diag. s blokkal, így A tényleg imprimitív.

Imprimitív mátrixok és periodicitás (pótlap)

- **Tétel átfogalmazása:** Tfh. $A \geq 0$ irred, A -nak $s > 1$ darab $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van. Ekkor G_A csúcsai feloszthatók s darab $V_1, \dots, V_s$ részre úgy, hogy irányított élek csak V_i és V_{i+1} között mennek ($i + 1$ modulo s értendő).
- **Köv.:** A tétel feltételei mellett G_A minden irányított körének a hossza osztható s -sel
- **Köv.:** Thf. $A \geq 0$ irred. Ekkor: G_A köreinek hosszúságának lko-ja $1 \Leftrightarrow A$ primitív.
Biz.: $\Rightarrow$: előző köv.
 $\Leftarrow$: Tfh. az lko $s > 1$. Ekkor A^ℓ főátlójában csak s -sel osztható ℓ -re van pozitív elem.

Sztochasztikus mátrixok

- $A \geq 0$ $n \times n$ -es (oszlop-)sztochasztikus
- **Def. (emlékeztető):** A minden oszlopának összege 1
- **Ekv. jellemzés:** Aw sztoch. minden w sztoch. vektorra
- **Másik ekv. jellemzés:** $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektora A^T -nak 1 sajátértékkel
- **Köv.:** sztoch. mátrixok szorzata is sztoch.
- **Tudjuk:** $\rho(A) = 1$.
- **Köv.:** Ha A még primitív is, akkor $A^k \rightarrow v(1, \dots, 1)$, ahol v a sztochasztikus sajátvektora A -nak 1 sajátértékkel.
- **Megj.** $v(1, \dots, 1)$ minden oszlopa v

Sztochasztikus mátrixok/Markov láncok: értelmezések

- sztochasztikus sajátvektor(ok) 1 sajátértékkel: stacionárius eloszlás(ok)
- **Irreducibilitás:** Minden állapotból minden állapot elérhető pozitív valószínűséggel
- **Imprimitivitás** ~ **periodicitás**
- **Konvergenciatétel:** Primitív ("aperiodikus irreducibilis") esetben tetsz. kezdeti elo. esetén a lánc eloszlása konvergál az (egyért.) stacionáriushoz

Duplán sztochasztikus mátrixok

- **Def.:** $A = (a_{ij}) \geq 0$ duplán sztochasztikus, ha A és A^T is (oszlop-)sztochasztikus.
- **Ekv. jellemzés:** $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektora A -nak és A^T -nak is 1 sajátértékkel
- **Köv.:** Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata és konvex kombinációja is duplán sztochasztikus
- **Példa:** Permutációmátrix (imprimitív).

Duplán sztochasztikus mátrixok II.

- **Áll.:** Duplán sztoch. A reducibilis $\Leftrightarrow$ alkalmas P permutációval $P^{-1}AP$ blokk-diag., azaz $\exists \emptyset \subset J \subset \{1, \dots, n\}$, hogy $i \in J, j \notin J$ esetén $a_{ij} = a_{ji} = 0$.

Biz.: Tfh. $A = (a_{ij})$ imprimitív: van $\emptyset \subset J \subset \{1, \dots, n\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$, ha $i \notin J, j \notin J$. Ekkor $j \in J$ -re

$$1 = \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i \in J} a_{ij}, \text{ ezért } \sum_{j \in J} \sum_{i \in J} a_{ij} = |J|.$$

Ekkor

$$|J| = \sum_{i \in J} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} a_{ij} + \sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} a_{ij} = |J| + \sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} a_{ij}, \text{ így } \sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} a_{ij} = 0.$$

Ebből $i \in J, j \notin J$ esetén $a_{ij} = 0$.

- **Konvergenciatétel:** Primitív duplán sztoch. A -ra

$$A^k \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Birkhoff tétele

Tétel: A duplán sztochasztikus $\Leftrightarrow A$ permutációmátrixok konvex kombinációja.

- **Biz.:** $\Leftarrow$: permutációmátrixok d.sz. és d.sz. mátrixok konvex komb.-ja is d.sz.
- $\Rightarrow$:

Segédáll.: $A = (a_{ij})$ duplán sztoch. $\Rightarrow \exists \pi$ perm.: $a_{i\pi(i)} > 0$ ($i = 1, \dots, n$).

- **Indukció segédáll.** alapján, a nemnulla elemeinek a száma szerint:
 Legyen π a segédállban szereplő perm., $a = \min_i a_{i\pi(i)}$ és $P \pi^{-1}$ mátrixa. Ekkor
 $A \neq P$ esetén $a < 1$ és $A = aP + (1-a)(1-a)^{-1}(A-aP)$: A P -nek és
 $(1-a)^{-1}(A-aP)$ -nek konvex komb.-ja. $(1-a)^{-1}(A-aP)$ duplán sztoch. és
 kevesebb helyen poz., mint A .

Birkhoff tétele II

- **Segédáll.:** $A = (a_{ij})$ duplán sztoch. $\Rightarrow$ exists π perm.:
 $a_{i\pi(i)} > 0$.
- **Tétel (Frobenius-König-Hall):** Tetsz. véges $G = (U, V, E)$ páros gráfra
 $\exists$ G -ben U -t lefedő párosítás



bármely $W \subseteq U$ -ra:

$$|\{v \in V \mid \exists w \in W : (w, v) \in E\}| \geq |W| \quad (\text{Hall-feltétel}).$$

- **Segédáll biz.:** Legyen $U, V = \{1, \dots, n\}$, $(i, j) \in E$, ha $a_{ij} \neq 0$. Ekkor keresett $\pi \leftrightarrow U$ -t lefedő párosítás G -ben. Tetsz. $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ -re legyen $J' = \{j \mid a_{ij} \neq 0 \text{ valamely } i \in J\}$.

$$|J| = \sum_{i \in J} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J'} a_{ij} = \sum_{j \in J'} \sum_{i \in J} a_{ij} \leq \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^n a_{ij} = |J'|,$$

tehát teljesül a Hall-feltétel.

Alkalmazott algebra - algoritmusok

Ivanyos Gábor

2011 ősz

A hatvány-iteráció

- **Egyszerű konvergencia-tétel - változat:** Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x - \lambda) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ ($i = 1, \dots, n-1$). Legyen $v^0 \notin (A - \lambda I)\mathbb{C}^n$ és $v^k = A^k v^0$. Ekkor a $\langle v^k \rangle$ 1-dim altér "konvergens" és a "határérték" a λ -hoz tartozó sajátaltér.
Változatok diagonalizálható mátrixokra, pl. a következő:
- **Pozitív szemidefinitre:** Tfh. A pozitív szemidef, $\lambda > 0$ legnagyobb sajátértékkel. Ekkor $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{\lambda} A)^k$ a merőleges vetítés A λ -sajátalterére. Így **majdnem minden** v^0 -ra $\langle A^k v^0 \rangle$ egy λ -sajátvektor által gen. altérhez tart:
- **Hatvány-iteráció:** $v^0 :=$ véletlen (egység)vektor, $v^{k+1} := A v^k$, "lenormálva".
Poz. szemidef A -ra, nagy k -ra v^k közelítő sajátvektor

A QR-felbontás

- A $m \times n$ -es valós
- $A = QR$, ahol Q $m \times m$ -es ortogonális, R $m \times n$ -es felső háromszög

QR-felb. Gram-Schmidt-ortogonalizációval

Egyszerűsítés: $m = n$, A invertálható

- $A^T A$ -ra Gram-Schmidt: $G^T A^T A G = I_n$,
- **Emlék:** G felső háromszög
- $Q := A G$ ortogonális: $Q^T Q = (A G)^T A G = G^T A^T A G = I_n$.
- $Q = A G$, $R = G^{-1}$ -gyel $A = QR$.

Householder-tükrözések

■ Emlék. (hipersíkra tükrözés):

- $u \neq 0$ rögz., $u^\perp$ -re való tükrözés:
- $\tau_u : v \mapsto v - 2 \frac{(u,v)}{(u,u)} u = v - 2 \frac{u^* v}{u^* u} u$
 mátrixa a standard bázisban: $I - \frac{2}{u^* u} u u^*$
- ortogonális és szimmetrikus egyszerre

■ Szögfelezőre tükrözés:

- Tfh. $v, w \neq 0$.
- $u = \frac{|v|}{|w|} w - v$
- $u^\perp = v$ és w szögfelező hipersíkja
- $\tau_u : v \leftrightarrow \frac{|v|}{|w|} w$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

- A $m \times n$ -es valós

- $v = A$ első oszlopa, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Ha $v \neq 0$, legyen T_1 a $v \leftrightarrow |v|w$ tükr. mátrixa
- Ha $v = 0$, $T_1 = I$
- $T_1 A$ első oszlopa $T_1 v = |v|w$.
- $T_1 = I_n - 2u'u'^T$, ahol u' a szögfelezőre $\perp$ egységvektor
- $T_1 A = A - 2u'u^T A$, $O(n^2)$ művelettel

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel II.

- $T_1 A$ első oszlopa rendben
- Rekurzió A jobb alsó $n - 1 \times n - 1$ -es A' blokkjára:

$$A' = T_2' \cdots T_\ell' R',$$

ahol R' $m - 1 \times n - 1$ -es felső háromszög, $\ell \leq \min(m - 1, n - 1)$.

- legyen $i = 2, 3 \dots$ -re $T_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{T_i'} \end{pmatrix}$.

- $R = \begin{pmatrix} ? & ? \\ & \boxed{R'} \end{pmatrix}$ (az első sor $T_1 A$ első sora)

- $T_1 A = T_2 \cdots T_\ell R$, így $A = QR$, ahol $Q = T_1 T_2 \cdots T_\ell$.
- összköltség: $O(\min(m, n)m^2)$.

QR-felbontás - megjegyzések

- **"Egyértelműség":** Tfh. $A = QR$ oszlopai lin. ftlenek, R főátlóbeli elemei pozitívak. Ekkor $A^T A = R^T R$ és R felső $n \times n$ -es blokkja éppen $A^T A$ Gram-Schmidt-ortogonalizációjának felel meg.
- **Változat:** $AP = QR$, ahol P permutációs mátrix és R felső delta alakú: valamely k indexre $r_{jj} \neq 0$, ha $j \leq k$; $r_{ij} = 0$ ha $i > j$ vagy ha $i > k$.

Előállítás: Az eredeti módszer azzal, hogy ha csupa 0 maradékú oszlop jönne, kicseréljük egy olyannal, aminek a maradéka nem csupa 0 (addig, amíg van ilyen).

QR-felbontás - alkalmazások

- determináns, rang, képtér
- numerikusan stabilabb, mint Gauss-elim, vagy Gram-Schmidt
- LSI-ben SVD helyett: könnyebben számolható, gyakran viszonylag tűrhető alacsony rangú közelítés kapható R szabdalásával

A QR-algoritmus

- $A_1 = A$
- $A_1 = Q_1 R_1$ (Q_1 ortog., R_1 felső háromszög)
- $\vdots$
- $A_i = Q_i R_i$ (Q_i ortog., R_i felső háromszög)
- $A_{i+1} := R_i Q_i$
- $A_{i+1} = Q_{i+1} R_{i+1}$ (Q_{i+1} ortog., R_{i+1} felső háromszög)

- **Észrevétel:** $A_{i+1} = Q_i^T A_i Q_i$
- tehát $A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots$ mátrixok hasonlóak
- sőt, ortog. konjugáló mátrixszal

A QR-algoritmus II.

- $A_1 = A$

⋮

- $A_i = Q_i R_i$

- $A_{i+1} := R_i Q_i$

⋮

- Alkalmas feltételek mellett konvergál A (egy) Schur-felbontásához.

- **Spec. eset.:** Ha A pozitív def. valós szimm.,
 - a határérték diagonális, sőt, - a Q_i -k szorzatának határértéke diagonalizálja A -t.

- Vannak javított, adott körülményekhez igazított változatok

Hessenberg-mátrixok

- **Def.:** $A = (a_{ij})$ $n \times n$ -es mátrix felső Hessenberg-alakú, ha $i > j + 1$ esetén $a_{ij} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

- **Tul.:** A $n \times n$ -es felső Hessenberg, B $n \times n$ -es felső háromszög $\Rightarrow AB$ és BA is felső Hessenberg.

Biz.: $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = 0$, ha $i > j$. Legyen $AB = (c_{ij})$. $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Ha $i > k + 1$, akkor $a_{ik} = 0$ és ha $k > j$, akkor $b_{kj} = 0$. Így $a_{ik} b_{kj} = 0$, kivéve esetleg $i \leq k + 1$ és $k \leq j$. Ha $i > j + 1$, nincs ilyen k , tehát $c_{ij} = 0$.

BA -ra hasonló biz.

Hessenberg-alakra hozás Householder-tükrözésekkel

- A $n \times n$ -es

- Első lépés: $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{T'_1} \end{pmatrix}$, ahol T'_1 az A alsó $n-1$ soros

részenek az első oszlopát rendbe tevő Householder-tükrözés (vagy I_{n-1}). Ekkor

$$T_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix} \text{ alakú, és ez megmarad a } T_1\text{-gyel való jobbról}$$

szorzással is: az nem bántja az első oszlopot.

- A QR -felbontáshoz hasonló rekurzióval vagy iterációval:
- Végeredmény: $A = T_1 \cdots T_{n-3} H T_{n-3} \cdots T_1$, ahol H felső Hessenberg.
- Költség: $O(n^3)$.

QR-algoritmus Hessenberg-mátrixokkal

- Ha A felső Hessenberg- alakú, a QR -felbontásánál a T_i Householder-tükrözések csak az i -edik és $i+1$ -edik sort érintik:

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & * & * & \\ & & & * & * & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- T_i -vel való szorzás költsége $O(n)$, QR -felb. összköltsége $O(n^2)$.
- Ha $A_i = Q_i R_i$ f. Hess., akkor Q_i is, és így $A_{i+1} = R_i Q_i$ is.
(invertálható esetben: $Q_i = A_i R_i^{-1}$)
- érdemes QR -algoritmus előtt f. Hessenberg-alakra hozni

QR-algoritmus szimmetrikus tridiagonális mátrixokra

- A szimmetrikus $\longrightarrow U^T A U$ felső Hessenberg és szimmetrikus
($U = T_1 \cdots T_{n-2}$ Hessenberg-alakra hozó tükrözések)
- Szimmetrikus Hessenberg-mátrixok = tridiagonális mátrixok:

$$\begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

- Tridiag. mátrix QR-felbontása:
 - Householder-tükrözések: 2 sort érintenek
 - 1 sorban max 3 nemnulla elem
 - Összköltség: $O(n)$
- $A_i = Q_i R_i$ szimm. tridiag. $\Rightarrow A_{i+1} = R_i Q_i = Q_i^T A_i Q_i$ is szimm. tridiag.

Hessenberg-alakra hozó bázis

- U ortog, U oszlopai: $v_1, \dots, v_n$ ortonormált bázis
- $U^T A U$ felső Hessenberg $\Leftrightarrow j = 1, \dots, n - 1$ -re:

$$A \langle v_1, \dots, v_j \rangle \leq \langle v_1, \dots, v_j, v_{j+1} \rangle$$

- Egyenértékű: $j = 1, \dots, n - 1$ -re:

$$A v_j \in \langle v_1, \dots, v_j, v_{j+1} \rangle$$

Biz.: $i < j$ -re $A v_i \in \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle \leq \langle v_1, \dots, v_j \rangle$

- **Eljárás** ($\sim$ Arnoldi)
 - v_1 tetsz. egységvektor
 - Tfh. $v_1, \dots, v_j$ már megvan
 - Ha $A v_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$, v_{j+1} tetsz. $v_1, \dots, v_j$ -re $\perp$ egységvektor.
 - Különben v_{j+1} legyen $A v_j$ -nek $v_1, \dots, v_j$ -re $\perp$ része, egységhosszúra normálva

- Arnoldi szimmetrikus A -ra
- **Tudjuk:** az eredmény szimm. Hessenberg, azaz tridiag:

$$U^T A U = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{j-1} & \\ & & & a_j & b_j \\ & & & b_j & a_{j+1} & b_{j+1} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Tehát $Av_j = b_{-1}v_{j-1} + a_jv_j + b_jv_{j+1}$

Lánzos algoritmus II.

$$Av_j = b_{-1}v_{j-1} + a_jv_j + b_jv_{j+1}$$

- $v_0 := 0, b_0 := 0.$
- v_1 véletlen egységvektor
- $j = 1, \dots, n - 1:$
 - $w'_j := Av_j - b_{j-1}v_{j-1}$
 - $a_j := v_j^T w_j$
 - $w_{j+1} := w'_j - a_jv_j$
 - $b_j := |w_{j+1}|$
 - Ha $b_j \neq 0$, akkor $v_{j+1} = \frac{1}{b_j}w_{j+1}$
 - Ha $b_j = 0$, akkor v_{j+1} véletlen egységvektor (?)
- **Költség:** $O(n^2) + n - 1$ vektor szorzása A -val
Jó, ha A ritka vagy 2 ritka szorzata (pl. LSI).
- Nem igazán robusztus: v_i -k ortogonalitása elromolhat ...

SVD közelítő kiszámítása

- A $m \times n$ -es, $m \geq n$
- **Teljes SVD:** $A = M'\Sigma'M^T$
- M az $A^T A$ -t diagonalizáló ortog: $M^T A^T A M = \Sigma'^2$
- M' az AM -ből
- **Kézenfekvő megközelítés** M kiszámítása $A^T A$ diagonalizálásával
- **Például:**
 - Először tridiagonalizáljuk $A^T A$ -t (Householder-tükrözésekkel v. Lánccal)
 - Majd QR-algoritmus
- Nem elég stabil

SVD kiszámítása II.

- Egyszerűsítő feltevés: $m = n$.

- **Észrevétel:** U_1, U_2 unitér

A SVD-je $\longleftrightarrow U_1 A U_2$ SVD-je

különösen, ha U_1, U_2 könnyen számolható

pl. Householder-tükrözések szorzata

- Először bidiagonlizáljuk A -t: $U_1 A U_2 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$

- **Megj.:** Bidiagonális A -re $A^T A$ tridiagonális

SVD kiszámítása III - bidiagonalizálás

- T_1 Householder-tükrözéssel:

$$T_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

- Majd a második oszlopnál kezdődő Z_1 Householder-tükrözéssel

$$T_1 A Z_1 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

SVD kiszámítása IV - bidiagonalizálás II

- Első menet után:

$$T_1 A Z_1 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

- Következő menet:

$$T_2 T_1 A Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & * & * & * \end{pmatrix}.$$

- Végül $T_{n-1} \cdots T_1 A Z_1 \cdots Z_{n-2}$ bidiagonális.
- **Megj.** Az eljárás hasonlít a Hessenberg-alakra hozáshoz

SVD kiszámítása IV - $A^T A$ helyett másik szimmetrizált

- Tfh. $M'^T A M = \Sigma'$, M, M' ortog.
- $M^T A^T M' = \Sigma'^T = \Sigma'$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} M & M' \\ M' & -M' \end{pmatrix}$ ortog. és
- $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} M^T & M'^T \\ M^T & -M'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & M' \\ M' & -M' \end{pmatrix} =$
 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} M'^T A & M'^T A^T \\ -M'^T A & M'^T A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & M' \\ M' & -M' \end{pmatrix} =$
 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} M'^T A M + M'^T A^T M' & M'^T A M - M'^T A^T M' \\ -M'^T A M + M'^T A^T M' & -M'^T A M - M'^T A^T M' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma' & \\ & -\Sigma' \end{pmatrix},$
- azaz $\begin{pmatrix} A & A^T \end{pmatrix}$ sajátértékei A szing. értékei $\pm$ előjellel, és
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} M & M' \\ M' & -M' \end{pmatrix}$ oszlopai adják a sajátvektorok egy ortonormált bázisát (ld. zh091030, 6. feladat).

SVD kiszámítása V

- A szing. értékei $\longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & A^T \end{pmatrix}$ sajátértékei (előjel erejéig)
- A SVD-ja $\longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & A^T \end{pmatrix}$ sajátvektorai
- **Észrevétel:** Ha A bidiag., akkor alkalmas permutáció P permutációmátrixszal $P^T \begin{pmatrix} A & A^T \end{pmatrix} P$ szimm. tridiag, 0 főátlóval.
- Az $\begin{pmatrix} A & A^T \end{pmatrix}$ mátrixot csak impliciten használják az algoritmusok
- Numerikusan stabilabb.