BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

# Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 – FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK – 2022

## Algebrai struktúrák, vektorterek

SKALÁROK, VEKTOROK, MÁTRIXOK, LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

# Tartalomjegyzék

# Ismeretek, képességek, célok

- Test, gyűrű, vektortér felismerése
- Számolás véges testekkel
- Mátrixszorzás, lineáris leképezés
- Vektorterek izomorfizmusa

# Bevezetés

## Rövidítések, jelölések

- **Rövidítések:** **D**efiníció, **J**elölés, **Á**llítás, **T**étel, **B**izonyítás, **L**emma, **P**élda, **F**eladat, **M**egoldás, **m**egjegyzés
  **L!** Legyen, **Amh** Azt mondjuk hogy, **Tfh** Tegyük fel hogy
- **Számhalmazok:** $\mathbb{R}$ valós, $\mathbb{N}$ természetes, $\mathbb{N}^+$ pozitív egész, $\mathbb{Q}$ racionális, $\mathbb{Z}$ egész, $\mathbb{C}$ komplex

D L! $H$ halmaz, $H^n$ = a $H$ elemeiből képzett rendezett elem-$n$-esek halmaza, azaz $H^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in H, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

D *R reláció a H halmazon*: a $H$ rendezett párjai egy részhalmaza, azaz $R \subseteq H^2$.

J ha $(a, b) \in R$, akkor $a\ R\ b$

P $H = \{1, 2, 3\}$, $'<' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \subset H^2$, azaz $1 < 2$, $1 < 3$, $2 < 3$.

D **Ekvivalenciareláció**

A $H$ halmazon értelmezett $R$ reláció ekvivalenciareláció, ha $\forall a, b, c \in H$ elemre

(1) $a\ R\ a$ (reflexív),

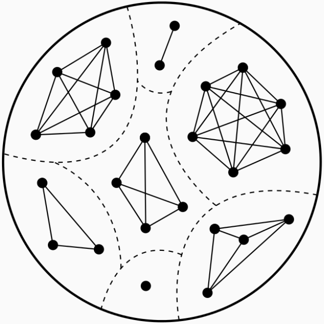
(2) ha $a\ R\ b$, akkor $b\ R\ a$ (szimmetrikus),

(3) ha $a\ R\ b$, $b\ R\ c$, akkor $a\ R\ c$ (tranzitív).

F Melyik ekvivalenciareláció az alábbiak közül? egyenlőség, $<$, párhuzamosság, $\leqslant$, évfolyamtárs, ismerős, felmenő.

M egyenlőség, párhuzamosság, (évfolyamtárs,) a többi nem.

**T** Minden $H$-n értelmezett $R$ ekvivalenciareláció megad $H$-n egy osztályozást, azaz $H$-t diszjunkt részhalmazok – egymással ekvivalens elemek ún. ekvivalenciaosztályainak – uniójára bontja.



(ábra a wikipédiából)

# Algebrai struktúrák

# Algebrai struktúrák

## Számok: test és gyűrű

## Test – számolunk, mint a valós számokkal

**D** Egy legalább kételemű $\mathbb{F}$ halmazt (jelölje e két elemet 0 és 1) testnek nevezünk, ha értelmezve van $\mathbb{F}$ elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű bináris művelet, melyekre bármely $a, b, c \in \mathbb{F}$ elemekre és bármely $d \in \mathbb{F} \setminus 0$ elemre

| | | |
|---|---|---|
| $a + b = b + a$ | $ab = ba$ | kommutativitás |
| $a + (b + c) = (a + b) + c$ | $a(bc) = (ab)c$ | asszociativitás |
| $0 + a = a$ | $1a = a$ | semleges elemek |
| $\exists x \in \mathbb{F} : a + x = 0$ | $\exists y \in \mathbb{F} : dy = 1$ | additív/multipl. inverz |
| $(a + b)c = ac + bc$ | | disztributivitás |

**P** $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$

**P** Véges testek: $\mathbb{Z}_p$ (prím modulusú maradékosztályok teste, más jelölések: $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{GF}(p)$), $\mathbb{F}_q = \mathrm{GF}(q)$, ahol $q$ prímhatvány.

# Maradékosztály-test

$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2 = \mathrm{GF}(2)$:

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{F}_3 = \mathrm{GF}(3)$:

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| × | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

$\mathbb{Z}_5 = \mathbb{F}_5 = \mathrm{GF}(5)$:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

# Gyűrű – számolunk, mint az egészekkel

D Ha a testnél definiált szorzás csak asszociatív, gyűrűről, ha kommutatív is, kommutatív gyűrűről, ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, egységelemes gyűrűről beszélünk.

P Minden test gyűrű.

P $\mathbb{Z}$ egységelemes kommutatív gyűrű, $\mathbb{N}$ nem gyűrű.

P A páros számok kommutatív gyűrűt alkotnak, de ez nem egységelemes.

P A modulo $m$ maradékosztályok $\mathbb{Z}_m$ struktúrája egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha $m$ prím.

P Az $\mathbb{F}$ test fölötti együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak, jelölés: $\mathbb{F}[x]$.

P Az $\mathbb{F}^{n\times n}$ négyzetes mátrixai az összeadásra és szorzásra nézve egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

# Maradékosztály-gyűrű

$\mathbb{Z}_6$ gyűrű:

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**D** Az $R$ gyűrű nullosztómentes, ha $a \cdot b = 0$ esetén $a$ vagy $b$ nulla.

**Á** Ha $m$ nem prím, akkor $\mathbb{Z}_m$ nem nullosztómentes. Pl. $\mathbb{Z}_6$-ban $2 \cdot 3 = 0$.

**m** Véges testeket és gyűrűket alkalmazza a kódelmélet, a kriptográfia, a kombinatorika (pl. racionális test fölötti polinomok faktorizációjában, a nagy Fermat-tétel bizonyításában…)

- m $\mathrm{GF}(4)$: L! $p$ egy $\mathbb{F}_2$ fölötti másodfokú felbonthatatlan polinom, pl. $p = x^2 + x + 1$. Ha egy másod vagy harmadfokú polinom felbontható, akkor van elsőfokú tényezője, így van gyöke, de ennek nincs, mert 0-ban és 1-ben sem 0 az értéke.
- \- A $\mathrm{GF}(4)$ elemei 0, 1, $x$, $x + 1$ (a legföljebb elsőfokú polinomok), és a számolás köztük modulo $x^2 + x + 1$ történik (pl. $x + x = 0$, hisz $x + x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = (1 + 1)x = 0x = 0$, vagy $x \cdot x = x + 1$, hisz $x \cdot x = x^2 : (x^2 + x + 1) = 1$, és a maradék $x + 1$).

| $+$ | $0$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
| $1$ | $1$ | $0$ | $x+1$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $x+1$ | $0$ | $1$ |
| $x+1$ | $x+1$ | $x$ | $1$ | $0$ |

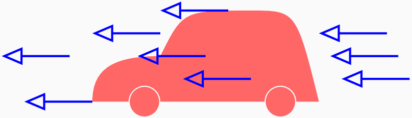
| $\times$ | $0$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
| $x$ | $0$ | $x$ | $x+1$ | $1$ |
| $x+1$ | $0$ | $x+1$ | $1$ | $x$ |

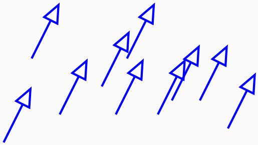
- m $\mathrm{GF}(2^n)$ konstrukciója hasonlóan megy egy $\mathrm{GF}(2)$ fölötti $n$-edfokú felbonthatatlan (=irreducibilis) polinommal.

# Algebrai struktúrák

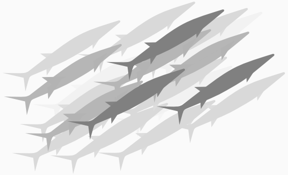
## Vektorok: vektortér

# Szabad vektor





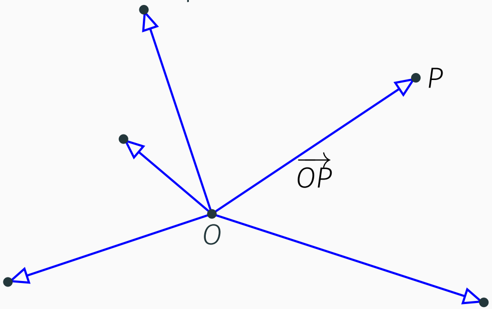
- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.



**D** *R*: két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. Ekkor a vektorok az ekvivalenciaosztályok.

# Origó

- A közös kezdőpont




- A pontok és a vektorok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy $P$ pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.
- Tehát az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy pontot és egy vektort is jelölhet.

D

## Vektortér

A $\mathcal{V}$ halmazt $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek nevezzük (jel.: $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$), ha tartalmaz egy $\mathbf{0}$-val jelölt elemet, és értelmezve van rajta egy összeadás és egy skalárral szorzás művelet, melyekre tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén

| | | |
|---|---|---|
| (A1) | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | az összeadás kommutatív |
| (A2) | $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | az összeadás asszociatív |
| (A3) | $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | az összeadás nulleleme |
| (M1) | $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$ | a két szorzás kompatibilis |
| (M2) | $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ | a test egységelemével |
| (M3) | $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ | a test nullelemével |
| (D1) | $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ | disztributív |
| (D2) | $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ | disztributív. |

# Más, szokásos definíció*

Á (M3) kicserélhető a következő tulajdonsággal

(A4) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}\ \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}\colon\ \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ additív inverz létezése (J: $-\mathbf{u}$)

B (M3) $\Rightarrow$ (A4): tetszőleges $\mathbf{u}$-ra $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} = (1-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$.

(A4) $\Rightarrow$ (M3): $0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \rightsquigarrow$
$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \mathbf{v} = 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} = 0\mathbf{u}$.

m A vektortér definíciójára (A1)–(A4), (M1)–(M2), (D1)–(D2) is használható (ált. így szokták).

# Példák vektorterekre

Á $\mathcal{Z} = \{0\}$ bármely test fölött vektortér. Ezt nev. zérustérnek.

P $\mathbb{F}^n$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos vektorműveletekkel.
Speciálisan $\mathbb{F}^1$ (azaz maga $\mathbb{F}$) is $\mathbb{F}$ fölötti vektortér.

P – az $\mathbb{F}$ fölötti $m \times n$-es mátrixok $\mathbb{F}^{m\times n}$ tere,
- a polinomok $\mathbb{F}[x]$ tere, $\mathbb{F}[x]_n = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f \leqslant n\}$,
- $\mathbb{F}[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$ a formális hatványsorok
- $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$, és $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}$ az $\mathbb{R}$-en folytonos, illetve folytonosan diffható fv-ek
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a végtelen valós sorozatok
- $\mathbb{R}^{\infty}$: azon $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-beliek, ahol véges sok elemet kivéve $\forall$ elem 0

T **Az $\mathbb{F}^X$ és $\mathcal{V}^X$ függvényterek vektorterek***

L! $X \neq \emptyset$ tetsz. halmaz, $\mathbb{F}$ test, $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött,
$\mathbb{F}^X := \{X \to \mathbb{F}\ \text{ függvények}\}$, $\mathcal{V}^X := \{X \to \mathcal{V}\ \text{ függvények}\}$.
$\mathbb{F}^X$ és $\mathcal{V}^X$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos műveletekkel: $\forall x \in X$:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$, nullvekt=zérusfüggvény.

D **Altér**

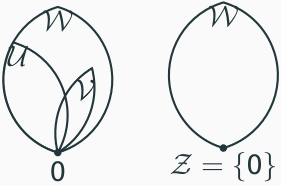
$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ altere $\mathcal{V}$-nek, ha nem üres és zárt a vektorösszeadás és skalárral szorzás műveleteire nézve (tehát $\mathcal{U}$ is vektortér).
Jelölés: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

Á Minden altérnek eleme a nullvektor és ha $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, akkor $-\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

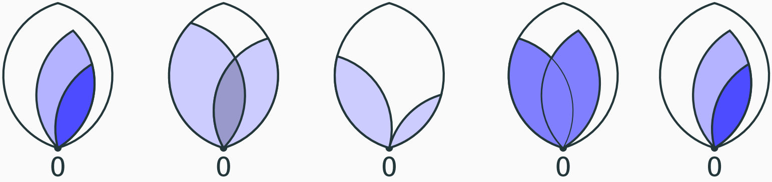
P A zérustér és $\mathcal{V}$ is alterek: $\mathcal{Z} \leqslant \mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}$.

P $\mathbb{R}^3$ alterei: zérustér, origón átmenő egyenes/sík vektorai, $\mathbb{R}^3$

Á $\mathbb{F}[x]_n \leqslant \mathbb{F}[x] \leqslant \mathbb{F}[[x]]$, $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}} \leqslant \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$)




- Á Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.
- Á Alterek metszete altér: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$.
- Á Két altér uniója pontosan akkor altér, ha egyikük altere a másiknak.



# Mátrixok, lineáris leképezések

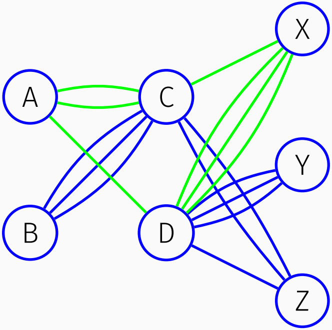
# Mátrixok, lineáris leképezések

## Táblázatok, mátrixok

P Az alábbi két táblázat azt mutatja, hogy az A és B városokból hány különböző autópálya vezet közvetlenül a C és D városokba, illetve a C és D városokból az X, Y és Z városokba.

| | C | D |
|---|---|---|
| A | 2 | 1 |
| B | 3 | 0 |

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| C | 1 | 0 | 2 |
| D | 3 | 3 | 1 |




| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| C | 1 | 0 | 2 |
| D | 3 | 3 | 1 |

| | C | D |
|---|---|---|
| A | 2 | 1 |
| B | 3 | 0 |

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 3 | 5 |
| B | 3 | 0 | 6 |

# Mátrixszorzás

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ c_{ij} \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & & \mathbf{B} \\ m \times s & & t \times n \end{array}$$

feltéve, hogy
$s = t$

**C** $=$ **AB** típusa
$m \times n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} b_{kj} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}$$

# Lineáris helyettesítések kompozíciója

**P** Írjuk fel a következő két lineáris helyettesítés egymás után való elvégzésével, azaz kompozíciójával kapott lineáris helyettesítés egyenleteit!

$$\begin{aligned} a &= 2c + d \qquad & c &= x \phantom{{}+3y} + 2z \\ b &= 3c & d &= 3x + 3y + z \end{aligned}$$

**M** A következőt kapjuk:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | 1 | 0 | 2 |
| $d$ | 3 | 3 | 1 |

$$\begin{aligned} a &= 5x + 3y + 5z \\ b &= 3x \phantom{{}+3y} + 6z \end{aligned}$$

táblázatosítva:

| | $c$ | $d$ |
|---|---|---|
| $a$ | 2 | 1 |
| $b$ | 3 | 0 |

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 5 | 3 | 5 |
| $b$ | 3 | 0 | 6 |

# Mátrix és vektor szorzata

m Az föntiek így is írhatók:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Á L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ekkor az $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezés a következő két tulajdonsággal rendelkezik:

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n,\ \forall c \in \mathbb{F} : A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$ (homogén)
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n : A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ (additív)

# Mátrixok, lineáris leképezések

## Lineáris leképezések

D **Lineáris leképezés**

Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Azt mondjuk, hogy egy $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés lineáris, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ elemre és $c \in \mathbb{F}$ skalárra

$$A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} \qquad (A \text{ homogén,})$$

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad (A \text{ additív.})$$

A $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezést lineáris transzformációnak is nev.

P A síkbeli vektorok egy $O$ pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

P A $D : f \mapsto f'$ és az $I : f \mapsto \int_a^b f$ leképezések lineáris leképezések.

P Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixra az $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezés lineáris leképezés.

# További példák

**D** Négyzetes mátrix nyomán főátlójában lévő elemeinek összegét értjük. jelölés: $\mathrm{trace}(\mathbf{A})$.

**Á** A nyom egy $\mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezés, mert

1. $\mathrm{trace}(c\mathbf{A}) = c\,\mathrm{trace}\,\mathbf{A}$
2. $\mathrm{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{trace}\,\mathbf{A} + \mathrm{trace}\,\mathbf{B}$

**P** $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} ca & cb \\ e & f \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$.

**Á** A determináns minden sorában (a többi sor rögzítése mellett) lineáris leképezés, mert minden sorában homogén és additív. Egy $n \times n$-es determináns, mint sorvektorainak $n$-változós függvénye, minden változójában lineáris, az ilyen függvényt nevezzük multilineárisnak.

# Lineáris leképezés ekvivalens definíciói

**Á** Egy tetszőleges $A : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $A$ lineáris, azaz homogén és additív.
2. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$

3. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$

4. „Megőrzi” a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$ skalárra

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

# A lineáris $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezések mátrixleképezések

**T** Egy $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ függvény pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az $A$ = az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezéssel. Ekkor $\boxed{\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_2|\dots|A\mathbf{e}_n],}$ ahol $\mathbf{e}_i$ az $i$-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \dots, n$).

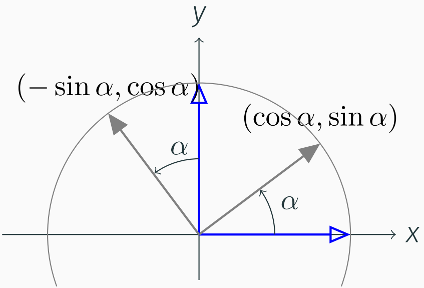
**B** ($A$ mátrixleképezés $\Rightarrow$ $A$ lineáris) $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} \rightsquigarrow$

$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$

($A$ mátrixleképezés $\Leftarrow$ $A$ lineáris)

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Forgatás 2D-ben: $\begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$




- Forgatás tengely körül 3D-ben:
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

# Kvaterniók*


Sir William Rowan Hamilton 1843 október 16. Kvaterniók: $a+bi+cj+dk$ alakú számok, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $i, j, k$ olyan „imaginárius” számok, melyekre $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$,…, összeadás „koordinátánként”, szorzás az előző szabályok szerint: az $\mathbf{u} = u_1 i+u_2 j+u_3 k$, $\mathbf{v} = v_1 i+v_2 j+v_3 k$ jelöléssel $(a+\mathbf{u})(b+\mathbf{v}) = ab - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

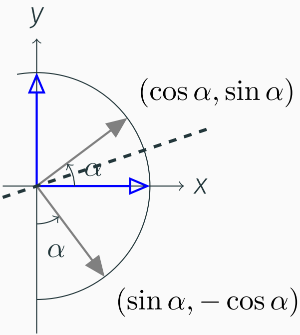
Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge. (Broom Bridge Dublin)

**T** Forgatás kvaterniókkal: $\mathbf{q} = \cos\frac{\alpha}{2} + (e_1 i + e_2 j + e_3 k)\sin\frac{\alpha}{2}$ a forgatást jellemző kvaternió, a $(v_1, v_2, v_3)$-hoz tartozó kvaternió $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$. Az elforgatott: $\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$, ahol $\mathbf{q}^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2} - (e_1 i + e_2 j + e_3 k)\sin\frac{\alpha}{2}$

# Tükrözés

**T** A sík vektorait az $x$-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

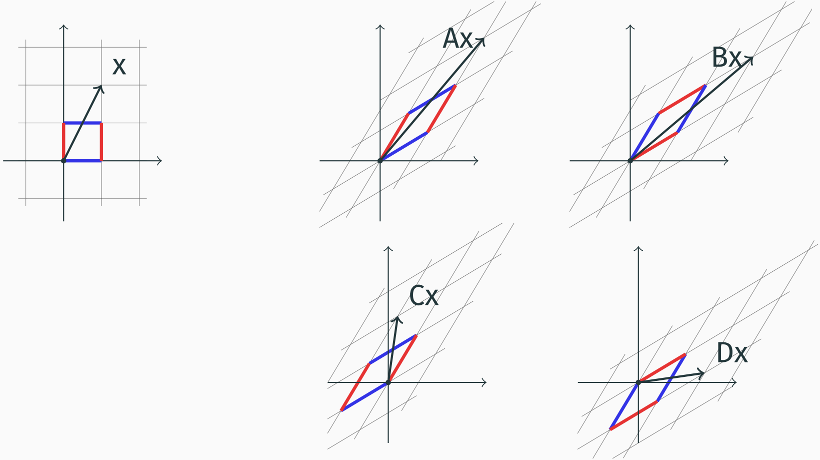


# Mátrixleképezés és lineáris leképezés különbségei

- Lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa (pl. végtelen dimenziós vektorterek esetén).
- A lineáris leképezés független a bázistól, a mátrixleképezés egy adott bázisra vonatkozó koordinás alakok közt hat, így egy lineáris leképezésnek másik bázisban más lehet a mátrixa.
- A lineáris $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezések azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans (NEM az $x \mapsto cx + b$ függvények!!!).

# A mátrixleképezés szemléltetése négyzetráccsal

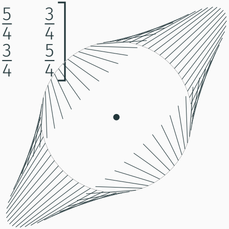
$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



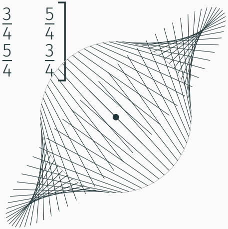

ld. az összeállítást a 3Blue1Brown csatorna clipjeiből.

# A mátrixleképezés szemléltetése egységkör-ábrával

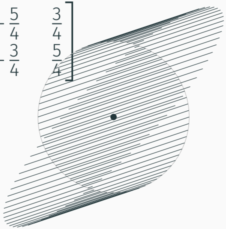
$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



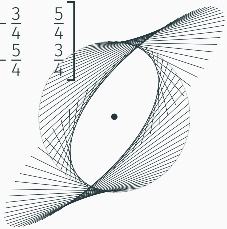
$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



$$D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



# Képtér, magtér, altér képe

**D** L! $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés. Az $A$ értékkészlete altér $\mathcal{W}$-ben, amit az $A$ képterének nevezünk, jele $\mathrm{Im}(A)$. $\mathrm{Im}(A) \leqslant \mathcal{W}$.

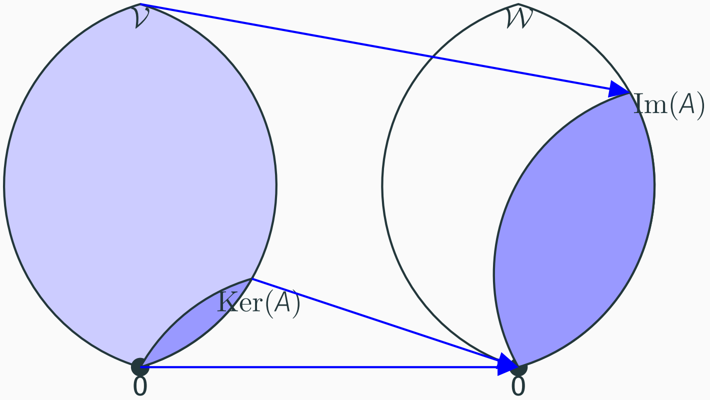
**D** Azok az $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektorok, melyekre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alteret alkotnak, amit az $A$ magterének (kernel) nevezünk, jele $\mathrm{Ker}(A)$. $\mathrm{Ker}(A) \leqslant \mathcal{V}$.

**D** Egy altér eltoltjait affin altereknek nevezzük.

Tehát ha $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$ és $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, akkor $\mathcal{V} + \mathbf{u} = \{\mathbf{v} + \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ affin altér. ($\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ esetén $\mathcal{V} + \mathbf{u} = \mathcal{V}$, tehát az altér is affin altér, de ha egy affin altérnek nem eleme a nullvektor, akkor az nem altér.)

**Á** Lineáris leképezés alteret altérbe, affin alteret affin altérbe visz.

# A lineáris leképezés szemléltetése levéldiagrammal



# Izomorfizmus

## Az izomorfizmus fogalma

- Két algebrai struktúra izomorf, ha elemeik közt van egy művelettartó bijekció.
- Például az egyműveletes $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ izomorf $\langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, + \rangle$ struktúrával, ahol a bijekció

  $(0,0) \leftrightarrow 0$, $(1,1) \leftrightarrow 1$, $(0,2) \leftrightarrow 2$, $(1,0) \leftrightarrow 3$, $(0,1) \leftrightarrow 4$, $(1,2) \leftrightarrow 5$,

  azaz általánosan $(a,b) \leftrightarrow (3a+4b) \bmod 6$.

  pl. $(1,0)+(1,2)=(0,2)$, másrészt $3+5=8\equiv 2 \pmod 6$.

D Két vektortér izomorf, ha létezik köztük egy bijektív lineáris leképezés. E leképezés neve izomorfizmus.

J $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$

# Az izomorfizmus tulajdonságai

**T** Két izomorfizmus kompozíciója és egy izomorfizmus inverze is izomorfizmus.

**T** **Véges dimenziós terek jellemzése**

Ha az $\mathbb{F}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortérnek van $n$-elemű bázisa, akkor $\mathcal{V} \simeq \mathbb{F}^n$.

**P** $\mathcal{P}_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ a legföljebb elsőfokú polinomok tere, akkor $\mathcal{P}_1 \simeq \mathbb{R}^2$.

**P** Komplex számsík: $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}_\mathbb{R} \quad (\mathbb{C}_\mathbb{R} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R})$

**m** $\mathbb{R}^2$ egy bázisa $\{(1,0),(0,1)\}$ $((a,b) = a(1,0) + b(0,1),\ a, b \in \mathbb{R})$

$\mathbb{C}_\mathbb{R}$ egy bázisa $\{1, \mathrm{i}\}$ $(a + \mathrm{i}b = a \cdot 1 + b \cdot \mathrm{i},\ a, b \in \mathbb{R})$

$\mathbb{C}$, mint a $\mathbb{C}$ fölötti vektortér bázisa $\{1\}$ $(z = z \cdot 1,\ z \in \mathbb{C})$