

1. feladat (4+8=12 pont)

(a) Mit értünk azon, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$? (Adja meg a definíciót!)

(b) A definíció alapján igazolja a következő állítás helyességét!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 9n}{n - 3} = +\infty$$

a) D.i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, ha $\forall P > 0$ esetén $\exists N(P) \in \mathbb{N}$,
melyre $a_n \geq P$, ha $n \geq N(P)$. (4)

b,

$$a_n = \frac{n^3 - 9n}{n - 3} = \frac{n(n+3)(n-3)}{n-3} \geq n^2 \geq P, \text{ ha } n \geq \sqrt{P}$$

$N(P) = \sqrt{P}$ (2)

2. feladat (12+12+12=36 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$; (b) $b_n = \left(\frac{2n-3}{5+2n} \right)^{n+2}$; (c) $c_n = \sqrt[n]{\frac{2n+5}{n^2+1}}$

a,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{n^2 + 2n - n^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{1} + 1}{2} = 1$$

b,

$$b_n = \left(\frac{2n-3}{5+2n} \right)^{n+2} = \left(\frac{2n-3}{5+2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \frac{3}{2n}}{1 + \frac{5}{2n}} \right)^n \rightarrow 1 \cdot \frac{e^{-3/2}}{e^{5/2}} = e^{-4}$$

c,

$$\frac{2}{\sqrt[n]{2} \cdot (\sqrt[n]{n})^2} = \sqrt[n]{\frac{2}{2n^2}} \leq c_n = \sqrt[n]{\frac{2n+5}{n^2+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{6 \cdot 2^n}{1}} = \sqrt[n]{6} \cdot 2$$

Rendőr szabály: $\lim_n c_n = 2$ (2)

3. feladat (8+14=22 pont)

(a) $\frac{3+2i}{3i-5} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

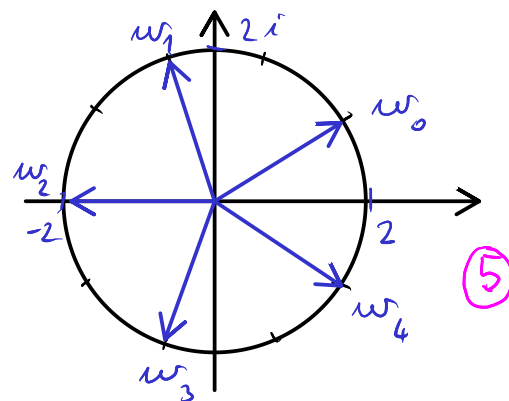
(b) $\sqrt[5]{-32} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

$$a) \quad \frac{3+2i}{3i-5} = \frac{(3+2i)(-5-3i)}{3^2+5^2} = \frac{1}{34}(-15-9i-10i+6) = \frac{-9}{34} - \frac{19}{34}i \quad (4)$$

$$b) \quad -32 = 32 \cdot e^{i\pi} \quad (3)$$

$$(\sqrt[5]{-32})_k = \omega_k = 2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k)} \quad (6)$$

$$k=0,1,2,3,4$$



4. feladat (14+8+8=30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

(a) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$.

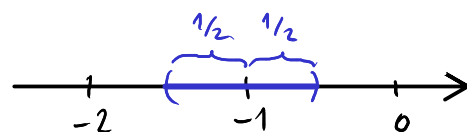
(b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

$$a) \quad |f(x) - 2| = \left| \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} - 2 \right| = \left| \frac{x+3-2(x+2)}{x+2} \right| = \frac{|-x-1|}{|x+2|} = \quad (4)$$

$$\text{Ha } x > -2 \Rightarrow \frac{|x+1|}{x+2} \leq \frac{|x+1|}{1/2} < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad (2)$$



$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = f(-3) = \frac{(-3)^2 - 9}{(-3)^2 - 3 - 6} = 0 \quad (8)$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = 1 \quad (1)$$