1. *Két urna közül az egyikben 5 fekete és 7 fehér, a másikban 3 fekete és 8 fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk egyet a másodikba, majd onnan találomra visszaveszünk kettőt. Megint az elsőből húzva, mennyi a valószínűsége a fehérnek?*

Megoldás. A cserélések után az első urna tartalma az alábbiak szerint alakulhat:

$$A_1 : 4 \text{ fekete}, 9 \text{ fehér} \qquad P(A_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{1}\binom{12}{2}} = \frac{140}{792}$$

$$A_2 : 5 \text{ fekete}, 8 \text{ fehér} \qquad P(A_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{12}{1}\binom{12}{2}} + \frac{\binom{7}{1}\binom{9}{2}}{\binom{12}{1}\binom{12}{2}} = \frac{412}{792}$$

$$A_3 : 6 \text{ fekete}, 7 \text{ fehér} \qquad P(A_2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{1}\binom{12}{2}} + \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{12}{1}\binom{12}{2}} = \frac{219}{792}$$

$$A_4 : 7 \text{ fekete}, 6 \text{ fehér} \qquad P(A_3) = \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{12}{1}\binom{12}{2}} = \frac{21}{792}$$

Bevezetve az $F =$ fehéret húzunk a csere után az 1. urnából eseményt, kiszámolhatjuk az alábbi feltételes valószínűségeket:

$$P(F|A_1) = \frac{9}{13}, \quad P(F|A_2) = \frac{8}{13}, \quad P(F|A_3) = \frac{7}{13}, \quad P(F|A_4) = \frac{6}{13}$$

A fentieket és a teljes valószínűség tételét felhasználva adódik a megoldás:

$$P(F) = \sum_{i=1}^{4} P(F|A_i)P(A_i) = \frac{9 \cdot 140 + 8 \cdot 412 + 7 \cdot 219 + 6 \cdot 21}{13 \cdot 792} = \frac{6215}{10296} =\approx 0.6$$

2. *Az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk 5 pontot. Jelölje X azon pontok számát, melyek ezek közül beleesnek az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, 1)$ és $(1, 0)$ pontok által meghatározott háromszög belsejébe is. Adja meg a $P(X \leq 3)$ valószínűséget!*

Megoldás. A háromszöget és az egységnégyzetet felrajzolva kiszámolható, hogy annak a valószínűsége, hogy egy adott pont beleesik a megadott háromszögbe, pontosan $\frac{1}{4}$. Mivel az egyes pontok helye egymástól független, így a háromszögbe eső pontok száma binomiális eloszlású, azaz $X \in B(5, \frac{1}{4})$. Az ismert képletet felhasználva $P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} \binom{5}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{5-i}$.

3. *Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 2$ paraméterrel és $Y = [X] + 3$, ahol $[X]$ az X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?*

Megoldás. Belátható, hogy $Y - 2 \in G(1 - e^{-2})$. Ebből következik, hogy $\mathbb{E}(Y-2) = \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2-1}$, azaz $\mathbb{E}Y = \frac{e^2}{e^2-1} + 2 = 3.15$, valamint $\sigma(Y - 2) = \sigma Y = \sqrt{\frac{\frac{1}{e^2}}{(\frac{e^2-1}{e^2})^2}} = \frac{e}{e^2-1} = 0.425$.

4. *Egy jól megkevert 52 lapos francia kártyacsomagból leosztunk 10-et. Legyen $X = 1$, ha a leosztott lapok között van treff, és $X = 0$, ha nincs. Legyen továbbá $Y = 1$, ha van a tíz lap között van ász, és $Y = 0$ különben. Adja meg X és Y együttes eloszlását és a kovarianciát!*

Megoldás.

$$P(X=0,Y=0) = \frac{\binom{36}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{254186856}{15820024220}$$
$$P(X=0,Y=1) = \frac{\sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}\binom{36}{10-i}}{\binom{52}{10}} = \frac{381558540}{15820024220}$$
$$P(X=1,Y=0) = \frac{\sum_{i=1}^{10}\binom{13}{i}\binom{36}{10-i}}{\binom{52}{10}} = \frac{7963635680}{15820024220}$$
$$P(X=1,Y=1) = 1 - P(X=0,Y=0) - P(X=0,Y=1) - P(X=1,Y=0) = \frac{7220643144}{15820024220}$$

A fentiek alapján számolhatók a várható értékek is:

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X = \frac{15184278824}{15820024220}$$
$$\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}Y = \frac{7602201684}{15820024220}$$
$$\mathbb{E}XY = \frac{7220643144}{15820024220}$$

Azaz a kovariancia:

$$\mathrm{cov}(X,Y) \approx -0.0048075$$

5. *Legyen X a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó és $Y = \sqrt{2X+2}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!*

Megoldás. Y eloszlásfüggvénye a $(\sqrt{2}, 2)$ intervallumon a következő:

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(\sqrt{2X+2} < t) = P(X < \frac{t^2-2}{2}) = \frac{t^2-2}{2},$$

amit deriválva megkapjuk a sűrűségfüggvényt: $f_X(t) = t$, ha $t \in (\sqrt{2}, 2)$

A momentumokat kétféleképpen lehet számítani:

a.) $\mathbb{E}Y = \int_{\sqrt{2}}^{2} t^2 dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{1}{3}(8 - 2\sqrt{2})$

$\mathbb{E}Y^2 = \int_{1}^{\sqrt{2}} t^3 dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{1}{4}(16-4) = 3$

b.) $\mathbb{E}\sqrt{2X+2} = \int_0^1 \sqrt{2t+2}dt = \left[\frac{(2t+2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(8 - 2\sqrt{2})$

$\mathbb{E}(2X+2) = 1 + 2 = 3$

A fentieket felhasználva a szórásnégyzet:

$$\sigma^2 Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = 3 - \frac{1}{9}(8 - 2\sqrt{2})^2 \approx 0.02831$$

Azaz $\sigma Y \approx 0.1682$