Valószínűségszámítás vizsga megoldása
Műszaki informatika szak
2011. január 20.

1. Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan hárman nincsen reklamáció. Poisson eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább öt reklamáció érkezik?
   Mo.: X a reklamációk száma egyetlen napon,
   $\mathbf{P}(X=0) = \frac{3}{20} = e^{-\lambda} \Longrightarrow \lambda = \ln\frac{20}{3}$
   $\mathbf{P}(X \geq 5) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \mathbf{P}(X=i) = 1 - \frac{3}{20}\left(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4\right)$

2. Tekintsük az $f(x) = \frac{3x^2}{7},\ x \in [-2,-1]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0,1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$!
   Mo.: $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} \frac{3t^2}{7} dt = \frac{x^3}{7} + \frac{1}{7}, x \in [-2,-1]$
   $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{7x+1}$, tehát $Y = \sqrt[3]{7X+1}$ eloszlása jó lesz.

3. Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{8}\right)$.
   Határozza meg a $Z = \max\{X,Y\}$ sűrűségfüggvényét!
   Mo.: $X, Y \in N(0,2)$ függetlenek.
   $F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t) = \left(\Phi\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$
   $f_Z(t) = 2\Phi\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \Phi\left(\frac{t}{2}\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$

4. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = \frac{2Y^2}{1+X}$. Számolja ki a Z várható értékét!
   Mo.: $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}\left(2Y^2\right) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}dx =$
   $= \frac{2}{3} \cdot \ln 2$

5. Tekintsük a $\{0,1\}$ állapotterű,
   $$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$
   átmenetvalószínűség-mátrixszal adott Markov-láncot! Számolja ki a $\mathbf{P}(X_3 = 1)$ valószínűséget, ha $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$!
   Mo.: A kezdeti eloszlás és az abszolút eloszlások közötti kapcsolat alapján:
   $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_3=0), & \mathbf{P}(X_3=1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_0=0), & \mathbf{P}(X_0=1) \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^3$
   $\underline{\underline{\Pi}}^3 = \frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 244 & 756 \\ 252 & 748 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P}(X_3 = 1) = 0.756.$

6. Adja meg az egymintás u-próba próbastatisztikáját! Milyen eloszlást követ a próbastatisztika, ha igaz a nullhipotézis?
   Mo.: $\frac{\bar{X}_n - \theta_0}{\sigma_0} \sqrt{n} \in N(0, 1)$, ha a nullhipotézis igaz.