1. (15 p) Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^3 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i = 0$$

Megoldás

Átrendezve:

$$z^3 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

Így az egyenlet megoldásai a $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ szám harmadik gyökei lesznek. Ezek megkereséséhez írjuk át trigonometrikus alakba! $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i = 4\sqrt{2}(1-i) = 8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

Innen gyököt vonva:

$$z_{1,2,3} = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2$$

Azaz az egyenlet három megoldása:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right)$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)$$

2. (15 p) Határozza meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, ahol az

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

függvény szigorú monoton! Van $f(x)$-nek lokális szélsőértéke és ha igen milyen típusú?

Megoldás

$D_f = \mathbb{R}$, mert $f(x)$ folytonos függvények összetétele. A monotonitás vizsgálatához és a szélsőértékek meghatározásához az első deriváltat kell kiszámítanunk.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$$

Azaz az első derivált egy felfelé nyíló parabola, ezért a két gyöke között vesz fel negatív értékeket, azaz ha $x \in (-1, 3)$, akkor a függvény szigorú monoton csökken. A többi helyen pozitív, így $f(x)$ szigorú monoton nő a $(-\infty, -1)$ és a $(3, \infty)$ intervallumokon. Mivel az első derivált előjelet vált a gyökeiben, így mindkettő lokális szélsőérték. $x_1 = -1$-ben pozitívból negatívba vált, így itt lokális maximum van, $x_2 = 3$-ben negatívból pozitívba vált, így itt lokális minimum van.

3. (20 p) Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{e}^{3x} - 2}{\sinh(3x)} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{5x^2}$$

Megoldás Mivel $\mathrm{e}^0 = 1$ és $\sinh(0) = 0$, így az első határérték $\frac{0}{0}$ alakú, így alkalmazható a L'Hospital szabály

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{e}^{3x} - 2}{\sinh(3x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{6\,\mathrm{e}^{3x}}{3\cosh(3x)} = \frac{6}{3} = 2$$

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, így a második határérték $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, így erre is alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{5x^2} =^{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{3x}}{10x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{10x^2} = 0$$

4. (15 p) Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

$$f(x) = (x^2 + \cos(2x^3) + 14)^2 \qquad g(x) = \frac{x - 2\sinh(3x)}{\tan(4x+1)}$$

Megoldás

$$f'(x) = 2(x^2 + \cos(2x^3) + 14)(2x - \sin(2x^3)6x^2)$$

$$g'(x) = \frac{(1 - 2\cosh(3x)3)\tan(4x+1) - (x - 2\sinh(3x))(\tan^2(4x+1) + 1)4}{\tan^2(4x+1)}$$

5. (15 p) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int_0^\pi \cos^8(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

Megoldás

Mivel az integrandus "összetett függvény deriváltja, szorozva belső függvény deriváltja" típusú, így

$$-\int_0^\pi \cos^8(x)(-\sin(x))\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos^9(x)}{9}\right]_0^\pi = -\frac{\cos^9(\pi)}{9} - \left(-\frac{\cos^9(0)}{9}\right) = -\frac{-1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

6. (20 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat a $t = \sqrt{x+1}$ új változó bevezetésével!

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$$

Megoldás

$t = \sqrt{x+1}$, innen $t^2 = x+1$, azaz $t^2 - 1 = x$, azaz $\dfrac{dx}{dt} = 2t$. Átírva az integrált új változóra:

$$\int \frac{t^2+1}{t}2t\mathrm{d}t = \int 2t^2 + 2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 + 2t + C = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x+1} + C$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós konstans.

Továbbá a Newton-Leibniz formula miatt:

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x+1}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(2)^3 + 2\cdot 2 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{20}{3}$$

7. (+15 p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)* Határozza meg az $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ függvény 0 körüli harmadrendű Taylor-polinomját! Mekkora hibát vétünk, ha $\mathrm{e}^{0.2}$-t ezen polinom helyettesítési értékével közelítjük?

Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 2e^{2x} & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= 4e^{2x} & f''(0) &= 4 \\ f'''(x) &= 8e^{2x} & f'''(0) &= 8 \end{aligned}$$

Innen

$$T_3(x) = \frac{1}{0!}(x-0)^0 + \frac{2}{1!}(x-0)^1 + \frac{4}{2!}(x-0)^2 + \frac{8}{3!}(x-0)^3 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

Ezek alapján $\mathrm{e}^{0.2}$ közelítő értékét úgy kapjuk, hogy ebbe a polinomba helyettesítünk $x = 0.1$-et. Az elkövetett hiba becséléhez szükség van a negyedik deriváltra:

$$f^{(iv)}(x) = 16e^{2x}.$$

Végül a Lagrange-féle hibatag felhasználásával (az elkövetett hibát H-val jelölve):

$$|H| = \left|\frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(0.1-0)^4\right| \leq \frac{16\,\mathrm{e}^{0.2}}{24}10^{-4} = \frac{10^{-4}\,\mathrm{e}^{0.2}}{3}$$

8. (15 p) **Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.** Oldja meg az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ 4x + 12y - z &= -9 \\ 6x + 7y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás

Gauss-eliminációval dolgozunk. Ehhez először írjuk fel a kibővített együtthatómátrixot!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & -1 & -9 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Mivel az utolsó sor ellentmondás, ezért az egyenletrendszernek nincsen megoldása a valós számok körében.