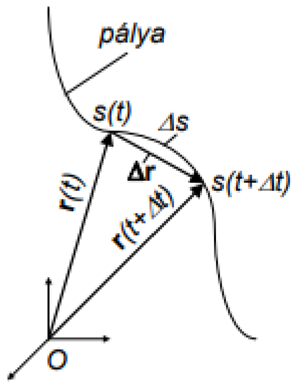
# 1. Kinematikai mennyiségek és összefüggéseik

## Tömegpont mozgásának kinematikai leírása




Egy test valamilyen **pályán** mozog (lásd ábra), és minden időpillanatra tudjuk, hogy ezen a pályán hol helyezkedik el. Ezt a helyet hívjuk **helyzetvektor**nak, és $r(t)$ függvény mondja meg, hogy adott időben hol a test. Választanunk kell egy viszonyítási pontot (origo, $O$), és ahhoz képest mondjuk meg ezt a vektort. A helyzetvektor változása az **elmozdulás**. A távolságokat méterben $(m)$ adjuk meg. Az elmozdulás mértékét még **út**ként $(s(t))$ is megadhatjuk. Ez nem vektor, csak egy skalár, például egy autónak a kilométeróra-állása az utat méri.

Ha megnézzük, hogy mennyi idő alatt mennyit mozdult el a test, az a **sebesség**e $(v(t))$. Az időt másodpercben, vagyis szekundumban $(s)$ mérjük, és mivel azt vizsgáljuk, hogy az elmozdulás az időhöz képest mennyi, ezért a kettő hányadosa lesz a mértékegység, vagyis a $\frac{m}{s}$. Az ábrán látható, hogy az elmozdulásnak $(\Delta r)$ mérete és iránya is van, akárcsak a sebességnek. Egy függvény változása igazából annak a deriváltja: idő szerint deriváltuk az elmozdulást, ebből lesz a **sebesség** ($v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$), ezért is kerül ide a szekundumos osztás. A sebesség tehát az elmozdulás deriváltja, és ez visszafelé is érvényes, az elmozdulás a sebesség integrálja.

Ha azt nézzük, hogy a sebesség hogyan változik, vagyis mi a test **gyorsulás**a $(a(t))$ egy adott időpillanatban, ugyanezt játsszuk el. Még egyet deriválunk ($a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$), és mivel még egyszer osztunk a szekundummal, vagyis már $\frac{m}{s^2}$ lesz a mértékegység. Szintén működik visszafelé, a gyorsulást integrálva a sebességet kapjuk.

## A kinematika alapmennyiségei

- Elmozdulás (**r**): hol van épp a test. Vektormennyiség, mértékegysége a méter.
- Sebesség (**v**): milyen gyorsan és merre változik a test elmozdulása. Vektormennyiség, mértékegysége a méter/szekundum. Az elmozdulás deriváltja.
- Gyorsulás (**a**): milyen gyorsan és merre változik a test sebessége. Vektormennyiség, mértékegysége a méter/szekundum$^2$. A sebesség deriváltja.

## A kinematikai mennyiségek általános összefüggései

$$\mathbf{a}(t) \xrightarrow{\textit{integrálás}} \mathbf{v}(t) \xrightarrow{\textit{integrálás}} \mathbf{r}(t)$$

Ennek ellentéte pedig a deriválás.

# Kinematikai összefüggések konkrét esetekben

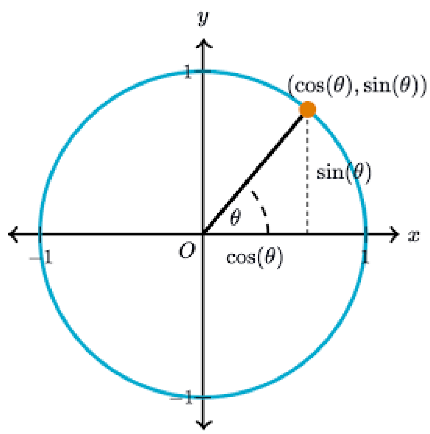
Mivel azt mondtuk, hogy az út az elmozdulás mértéke, ezért felírhatjuk az utat az elmozdulás hosszának: $|r'(t)| = s'(t)$. Ebből kijönnek a vektoros képletek skaláris verziói, ahol a sebességnek csak a nagyságát vesszük, nem a vektorát: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, vagy ha időben nem változnak, akkor a klasszikus általános iskolás képlet: $v = \frac{s}{t}$. Ezt hívjuk úgy, hogy egyenes vonalú egyenletes mozgás, mert nem változik sem az irány, sem a sebesség.

## Mozgás állandó gyorsulással

Ha a gyorsulás állandó (ilyen például a gravitáció), akkor könnyű dolgunk van, hogy akár a sebességet, akár az elmozdulást levezessük. Az állandó gyorsulás $a$, ilyenkor itt is elhagyjuk a függvényparamétert, mert nem változik időben. Mivel a sebesség a gyorsulás idő szerinti integrálja, könnyű dolgunk van egy állandóval: $v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 + a \cdot t$. Itt $v_0$ a kezdősebesség, és ha 0, akkor elhagyható. Az elmozdulás pedig a sebesség idő szerinti integrálja, annak, ami az előbb jött ki: $r(t) = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$. Ne tanuld meg ezt a képletet, csak integráld az előzőt, ha ezt kapod.

## Egyéb

Létezik még rezgőmozgás is, amiről a 12. tétel ír. Az utolsó mozgás a körmozgás. Ilyenkor nem a gyorsulásból, hanem magából a mozgásból indulunk ki, és onnan jutunk el a gyorsulásig. Ilyenkor két tengelyen tudjuk felírni a körmozgást szögfüggvények segítségével: $r_x(t) = cos(t)$ és $r_y(t) = sin(t)$. Az elmozdulás deriváltja a sebesség, annak a deriváltja pedig a gyorsulás. Ezeket sem kell megtanulni, helyben is könnyen deriválható, de így néznek ki:




$$v_x(t) = r_x'(t) = (cos(t))' = -sin(t)$$

$$v_y(t) = r_y'(t) = (sin(t))' = cos(t)$$

$$a_x(t) = v_x'(t) = (-sin(t))' = -cos(t)$$

$$a_y(t) = v_y'(t) = (cos(t))' = -sin(t)$$

# 2. Newton-törvények, a mozgásegyenlet

## Tömegpont mozgásának dinamikai leírása

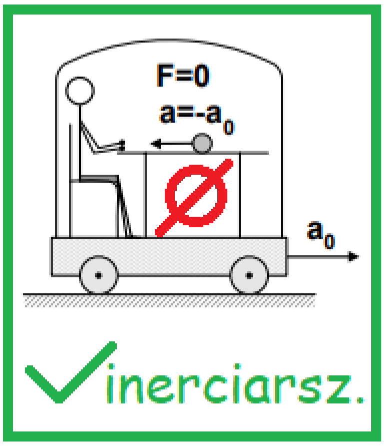
Egyszerűen azt vizsgáljuk, hogy a test miért mozog úgy, ahogy, és ezt a különböző erőkre vezetjük vissza.

## Az erő és a tömeg fogalma

Vegyünk egy hatást, ami mozgat egy tömeget. Tegyünk a kettő közé egy rugót. Amennyire megnyúlik a rugó, az a hatás “mértéke”. Ezt olyan módon vezessük vissza a hatásra, hogy a rugó kikerüljön a képletből, ekkor kaptuk meg a hatás erejét. Az **erő** jele **F**, mint force, és vektormennyiség, mert nem csak mértéke, hanem iránya is van, például meg tudnak ütni gyengén és erősen, balról és jobbról. Hogy egy test mennyire áll ellen a rá ható erőknek, azt a **tömeg** írja le. Minél nagyobb a tömeg, annál nagyobb erőt kell kifejteni, hogy ugyanúgy gyorsuljon. A tömeg jele $m$, mint mass.

## Az inerciarendszer fogalma

Viszonyítási rendszer. Olyan középpont, amihez képest a történéseket le lehet úgy írni, hogy Newton törvényei érvényben vannak, vagyis nincs láthatatlan külső erő (tehetetlenségi erőnek hívjuk). Egy mozgó autó például nem helyes inerciarendszer, mert ha gyorsulsz vele, akkor egy belülről nem leírható erő ránt hátra. Elvileg a Föld se lehetne inerciarendszer, mert forog és kering, de elhanyagoljuk a hibákat az itteni mérésekben, és inerciarendszernek vesszük, olyan kicsik ezek a hibák.



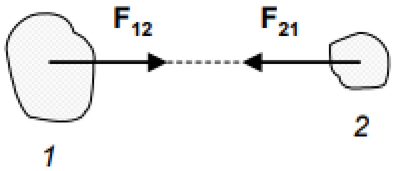

## Newton I. törvénye

Azt írja le, hogy az inerciarendszerek léteznek. Ha egy testet egy inerciarendszerben nem ér erő, vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (sebessége, iránya, gyorsulása nem változik). Ezt hívjuk a tehetetlenség törvényének.

## Newton II. törvénye

Alapból csak annyit tudtunk, hogy ha erőt fejtünk ki egy testre, akkor azzal az erővel arányosan gyorsul, de minden testnél más volt, hogy mennyi erőt kellett kifejteni ugyanahhoz a gyorsuláshoz. Ezért bevezettünk egy arányszámot, az erő és a gyorsulás hányadosát elneveztük tehetetlen tömegnek. Ez átrendezve $F = m \cdot a$, azaz Newton II. törvénye.

# Newton III. törvénye




Minden erőre létezik azonos irányú, de ugyanolyan mértékű ellenerő. Tehát ha test 1 hat test 2-re $F_{12}$-vel, akkor $F_{12} = \ - F_{21}$.

# Mozgásmennyiség (impulzus)

Egy test impulzusa a tömegének és sebességének szorzata, vagyis hogy milyen súllyal szerepel egy kölcsönhatásban: $p = m \cdot v$. Newton III. törvényéből levezethető, hogy két test közti kölcsönhatásban a két test impulzusának összege $(p_1 + p_2)$ állandó, vagyis $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 =$ állandó.

# Newton IV. törvénye

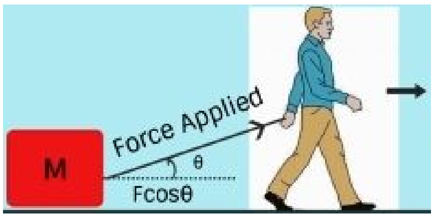
Ha több erő hat egy testre, azok egyszerűen összeadódnak. Ezt hívjuk eredő erőnek, és mivel a test tömege ugyanaz, nem egy beható erőtől függ, ezért a gyorsulásokat a II. törvényből szintén összeadjuk, és egy vektorként (vagy függvényként, ha úgy van megadva) össze lehet adni. Például ha hat a testre $F_1$ és $F_2$ erő, akkor összeadva őket olyan, mintha csak egyetlen erő hatna a testre, aminek mértéke $F = F_1 + F_2$.

# A mozgásegyenlet

A mozgásegyenlet Newton II. törvényének neve, $F = m \cdot a$-t jelent. Azért egyenlet, mert a gyorsulást bárhogy felírhatjuk ($a$ konstans helyett $a(t)$ képletként is), így az egész képlet időben érvényes: lehet rezgőmozgás is, ami szinuszon alapszik, vagy bármilyen komplex képlet is, egy a lényeg: mindent leír a mozgásról. Ha a gyorsulást integráljuk, sebesség lesz, ha pedig a sebességet integráljuk, még az elmozdulást is megkapjuk. A mozgásegyenlet tehát két levezetést adhat meg: ha ismerjük, milyen erők hatnak, akkor meg tudjuk "jósolni", hogy a test mikor melyik pontban lesz, illetve ugyanez érvényes visszafelé: ha tudjuk, hogy mikor hol van a test, akkor meg tudjuk mondani a rá ható erőt.

# 3. Mechanikai munka, energia, konzervatív erőtér

## A munka fogalma




A mozgásegyenlet megoldása az, hogy mikor és hol vagyunk, tehát eljutunk belőle **r**-ig. Ehhez természetesen $F = m * a$-ból tudnunk kell mindent: a gyorsulás függvényét, a tömeget, és kifejteni az erőt. Most megtanuljuk kifejteni az erőt, de előbb a munkát kell bevezetni. Munkát ($W$, mint work) akkor végzünk, ha az erő bármilyen mozgást okoz a testben. Előjeles mennyiség, mert a munka okozhat olyat, hogy a test megy előre, és lassítja, tehát ellene dolgozik. Ha a mozgás merőleges az erőre, akkor azért nem végzünk munkát, mert képzeld el, hogy egy mozgó autót oldalról meglöksz, amitől az nyilván nem fog elkanyarodni, tehát nem csináltál semmi hatásosat.

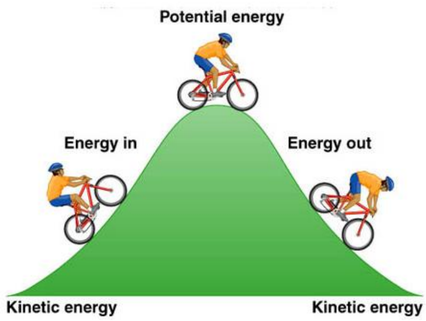
A munka az, amikor erő befektetésével mozgásra bírunk egy tömegpontot. Egyenes vonalon ez $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ vagy $W = F \cdot s \cdot cos(\alpha)$, ahol α az, hogy mekkora szögben hat az erő. Az első képlet bármilyen úton működik, a munka pedig az, ha összegezzük (integráljuk) a teljes megtett útra, hogy melyik pontokon milyen erő milyen mozgást váltott ki.

## Munkatétel, mozgási energia

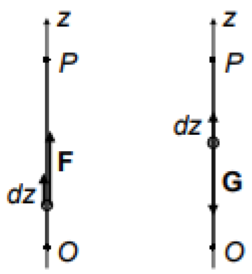
A mozgási energia, vagyis $E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ írja le a megváltozott munkavégző képességet, ugyanis munkával gyorsítottuk a testet, tehát $W_e = \Delta E_m$, a tömegpontra ható eredő erő munkája a mozgási energia megváltozásával egyenlő.

Röviden ismételve: ha gyorsítunk egy testet, adunk neki energiát, ezt láttuk, hogy attól függ, mekkora sebességre is gyorsítottuk fel. Ha lelassítjuk, a folyamat során ez az energia visszanyerhető. Korábban beláttuk, hogy annyi munkát végeztünk rajt, amennyivel a mozgási energiáját megváltoztattuk.

## Helyzeti energia




$E_h = m \cdot g \cdot h$, vagyis a tömeg, a gravitációs erő, és egy vonatkoztatási ponttól (pl. talajtól) számított magasság mondja meg, hogy mennyi energia alakulhat mozgássá, avagy mennyi a helyzeti/potenciális energia.



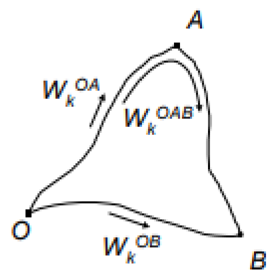

A bal oldali ábrán egy tömeget állandó sebességgel emeltünk, tehát a sebesség nem változott, így erő se ment bele a rendszerbe. Tudjuk Newton törvényeiből, hogy az a mozgás megváltoztatásához, gyorsuláshoz kellene csak. Ettől még a gravitációt le kell győzni, ami munka: a gravitáció $m \cdot g$ erőt fejt ki 1 méteren, amit a $h$ (height) magassággal is szorzunk, mert mint tanultuk, a munka távolság függvénye. Mivel lefelé húzná a testet, ezért a gravitáció munkája negatív előjelet kap, ami erővel pedig mi ellensúlyozzuk, és ami miatt lehetséges az emelés, tehát a gravitációval ellentétesen áll, az pozitív.

## Az energiamegmaradás tétele tömegpontra

Egy tömegpont energiája a helyzeti és a mozgási közt vándorolhat csak át, összegük mindig állandó: $E = E_h + E_m$. Az állandóságot úgy jelöljük, hogy valami nem változik, tehát $\Delta E = 0$.

## A konzervatív erőtér fogalma

Ahol csak az elmozdulás kezdeti- és végpontja számít a munkavégzésben, ott az energia nem vész el, csak átalakul, ezt hívjuk konzervatív erőtérnek. Például ha kimozdítunk valamit a gravitáció vonzásából, mondjuk felemeljük a talajról a Földön (adunk neki potenciális energiát), azt a gravitáció általi konzervatív erőtér visszahúzza (mozgási energiává alakul a potenciális energiája).



# 4. Megmaradási tételek (mozgásmennyiség, impulzusmomentum, energia) pontrendszerben

## Mozgásmennyiség (lendület)

A lendületet korábban impulzusnak hívtuk, és úgy írtuk le, hogy $p = m \cdot v$, tehát a lendület a tömeg és a sebesség szorzata, amit például ütközések hatásának számolásához használunk. Egy pontrendszerben több tömegpont található, mindegyiknek van saját sebessége is, mehetnek más irányba. Így felírhatunk például egy sétáló embert is, akinek különböző testrészei változó sebességgel mozognak különböző irányokba (például a kezek ívesen, ellentétes irányba mozognak), és természetesen a különböző testrészek tömege nem azonos. Ez persze nem jelenti azt, hogy ezt az embert ne írhatnánk fel egyetlen tömegként és sebességként, elvégre így számolunk a mindennapokban. A pontrendszer lendülete ($p_R$) egyszerűen csak az összes lendület összege:

$$p_R = \sum_i p_i,$$

ahol $p_i$ egy pont lendülete, minden egyes pontét összegezzük. Ez egy tömegközéppontra vonatkozik.

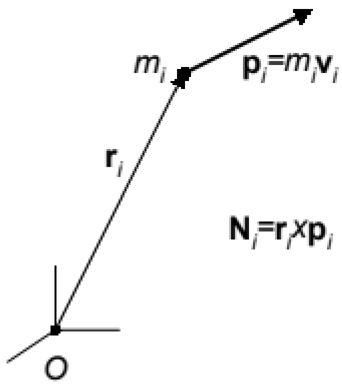
*A lendület vektormennyiség, tehát nem csak nagysága, hanem iránya is van. A sebességet úgy kapjuk meg a lendületből, ha a $p = m \cdot v$ képletet átrendezzük $v$-re, vagyis leosztunk a tömeggel, ami a pontrendszer esetében az össztömeg.*

Newton törvényeiből tudjuk, hogy $F = m \cdot a$, és ez állandó. Ebből le lehet vezetni, hogy a lendület is állandó. Mivel $a$ a $v$ deriváltja (1. tétel), $m$ pedig konstans szorzó, ezért kijön, hogy az erő valójában a lendület deriváltja: $F = \Delta p$.

Láthatjuk, hogy a rendszerre ható erő a lendület változásával jár, vagyis ha a rendszerre nem hat erő, akkor a lendület nem változik. A képletet egy pontra írtuk fel, de simán lehet $p$ helyén $p_R$ is, elvégre a rendszert egy pontra egyszerűsítettük, szóval bizonyítottuk, hogy a pontrendszer lendülete megmarad, ez a lendületmegmaradás törvénye pontrendszerre.

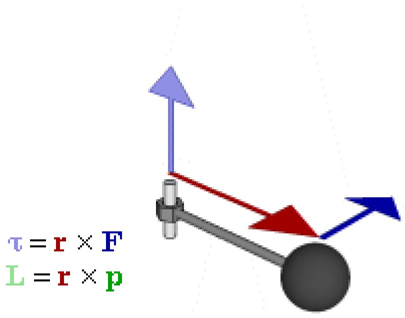
## Impulzusmomentum (perdület)

A perdület lényegében annak a mértékegysége, hogy egy adott tömegpont mennyire akar egy perdítő tengely körül elfordulni, például egy lendített kalapács, amíg az atléta tartja. A képlete egyetlen tömegpontra $N = r \times p$, az ábrán az $i$. tömegpontot jelzik, mert minden pontra külön számolható.




Itt $r_i$ az, hogy az $O$ vonatkoztatási ponttól merre van a tömegpont (ez egy helyvektor, mert a relatív helyét mondja el a pontnak), $p_i$ pedig a lendülete.

A perdület deriváltját hívjuk forgatónyomatéknak. A jobb oldali ábrán világoszöld a perdület, és azt mutatja meg, hogy milyen egyenes körül perdül a tömegpont (az irányához képest balra), a nagysága pedig a sebességgel arányos, elvégre a keresztszorzat része a lendület, ami sebességtől függ. Ennek deriváltja a világoskék forgatónyomaték, ami definíció szerint a perdület változása, és a képletéből ($M = r \times F$) is látszik, hogy a külső erők hatása, amik a testet mozgása megváltoztatására kényszerítik. Az erő úgy került oda, hogy a lendület deriváltja az eredő erő.




Egy pontrendszer perdülete az összes pont perdületének összege, képlettel: $N_R = \sum_i N_i$.

Láttuk, hogy $N$ (perdület) deriváltja $M$ (forgatónyomaték). Ez egyenlő a külső és belső erők összegével, viszont Newton III. törvénye (erő-ellenerő) miatt tudjuk, hogy a belső erők egymást kiütik, és az összegük 0, szóval maradnak a külső erők:

$$\frac{dN_R}{dt} = M_K = \sum_i r_i \times F_{Ki}.$$

Itt látható, hogy a perdület változása kizárólag külső erők függvénye, amik hiányában a derivált 0, tehát az $N_R$, vagyis az egész rendszer perdülete változatlan. Ezt hívjuk a perdületmegmaradás tételének.

# Energia

Egy adott pont vagy ponttá egyszerűsített pontrendszer munkája az energia változásaként is felírható, ami az 1-es és 2-es állapot között ez:

$$W_e = \Delta E_m = E_2 - E_1.$$

Itt jönne rengeteg csúnya átalakítás, de szépen, szavakban is meg lehet fogalmazni: a munkát először is felosztjuk külső és belső munkára, tehát $W_e = W_K + W_B$, ezek közül konzervatív és nem konzervatív erőre mindkettőt, például $W_K = W_{K,k} + W_{K,nk}$. Így lesz egy nagyon hosszú egyenlőségünk $E_2 - E_1$-re sok $W$-vel. A konzervatív erők munkája igazából a helyzeti energia megváltozásának ellentéte, szóval át tudjuk vinni az egyenlet másik oldalára, és marad ennyi:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = \Delta E_m + \Delta E_h.$$

A jobb oldalon az összenergia változását láthatjuk, amit akár össze is vonhatunk úgy, hogy egyetlen $\Delta E_R$-rel jelöljük, mint a rendszer energiaváltozása. Ez azt írja le, hogy energiát csak munkával, azaz külső erőkkel változtathatunk meg, vagyis ha nincs munka, az energiamennyiség nem változik, ez az energiamegmaradás tétele.

# 5. Termodinamikai állapotjellemzés, extenzív és intenzív mennyiségek és szerepük a termodinamikában

## Állapotjellemzés

Amit a világból kiválasztunk vizsgálatra, az a rendszer. A rendszernek makroszkopikusnak kell lennie, vagyis atomi méreteknél jóval nagyobbnak, hiszen a termodinamika atomok kölcsönhatásával foglalkozik. Ami a rendszeren kívül van, az a környezete. Általában azt tételezzük fel, hogy a környezet a rendszer állapotát nem változtatja meg.

A rendszer termodinamikai leírásához használt mennyiségeket két részre osztjuk: extenzív és intenzív. Extenzív az, aminél részekre bonthatjuk a rendszert, és a részekben összeadva az értéküket megkapjuk a rendszer értékét, például ha egy két részre osztott rendszer egyik felén van 200 atom, a másik felén 300, akkor a rendszerben összesen van 500, vagyis az atomok száma egy extenzív jellemző. Ezt a tulajdonságot úgy hívjuk, hogy additív. Ilyen még a térfogat és az energia is. Az intenzív jellemzők nem additívak, hanem lokálisan értelmezhetők, és elindíthatnak kiegyenlítési folyamatokat, ezek a nyomás és a hőmérséklet.

## A hőmérséklet fogalma

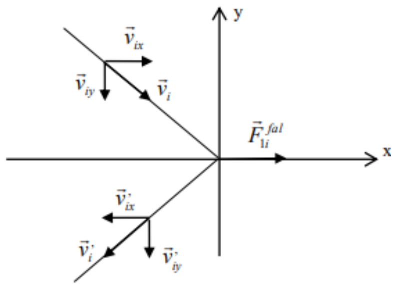
100 fokot úgy határozunk meg, hogy az olvadó jég és a forró víz közötti nyomás- és térfogatváltozás, 1 fok pedig ennek a százada. A Celsius-skála a folyékony víz két végletét 0 és 100 foknak hívja, a Kelvin-skála pedig az abszolút nulla hőmérséklettől indul, 273.15 fokkal a 0 Celsius alól.

## A kinetikus gázelmélet alapjai

A kinetikus gázelmélet a gázmolekulák mozgásával és ütközésével foglalkozik. Először írjuk le, mit értünk a molekulák alatt, ugyanis kell néhány egyszerűsítés: átmérőjük elhanyagolható (tehát pontszerűek), és nem fejtenek ki vonzó/taszító erőt az edény falával. Nincs kitüntetett irány, amerre a molekulák haladnak, éppen ezért véletlenszerű sebességgel képzeljük el őket. Ha egy sebesség véletlenszerű, akkor az átlaga $0$. Ha egy sebesség átlaga $0$, akkor minden térbeli tengelyen is $0$: $\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$. Azért bontjuk fel, mert minden mozgás egyszerűbben kezelhető független tengelyenként, egyszerre egy-egy dimenzióban. Nézzük meg, mi a helyzet, ha négyzetátlagot számolunk: itt már nem nulla lesz az átlag, mert a nulla átlag azt jelenti, hogy ugyanannyi a negatív számok összege, mint a pozitívaké. Mivel minden szám négyzete pozitív, ezért a négyzetátlag pozitív lesz. A sebesség egy háromdimenziós vektor, felírhatjuk a komponenseire (összetevőire) a Pitagorasz-tételt: $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$. Tudjuk, hogy az átlagok egyenlők, tehát a négyzetük is egyenlő. Egyszerűen összeadtunk 3 ugyanolyan számot, tehát beláthatjuk, hogy ezek igazából a sebesség négyzetátlagának harmadai: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$.

## Az ideális gáz nyomása

A kinetikus gázelmélet szerint a nyomást a molekulák fallal való ütközéséből származó erő adja. Nézzünk egy ilyen ütközést olyan síkon, ahol csak két tengellyel kell foglalkoznunk. A molekula $v_{ix}$ sebességgel halad a falra merőleges tengelyen (tehát a fal felé), és $v_{iy}$ sebességgel halad vele párhuzamosan. Mivel tengelyenként számolható a mozgás, belátható, hogy a fallal párhuzamos sebesség változatlan. A merőleges ütközés tökéletesen rugalmas (az ütközés előtti és utáni energia azonos), ezért egyszerűen ellentétes irányba, azonos sebességgel pattan vissza a részecske, tehát $v'_{ix} = -v_{ix}$. Mivel energia nem veszik el, ellentétes irányú, de azonos sebességgel távozik a faltól a molekula. Ehhez az kell, hogy kétszeres sebességgel ellentétes irányba gyorsuljon, ugye az elsőt kivonva lesz nulla, a másodikat kivonva pedig azonos irányú: $a = -2 \cdot v_{ix}$. Tudjuk, hogy $F = m \cdot a$, de a molekula tömegét μ-vel jelöljük, ezért minden behelyettesítve $F = -2 \cdot \mu \cdot v_x$. Ez a molekulára ható erő, a falra ellentétes előjelű, mert tudjuk, hogy az ellenerő azonos. Mivel az erő nem azonnal megy végbe, hanem adott idő alatt, ezért azt figyelembe véve a falra ható erő $\Delta F = \frac{2 \cdot \mu \cdot v_x}{\Delta t}$. A nyomásról mondtuk, hogy a felületre vetített erő, tehát $\Delta F / \Delta A$ formában lenne rá szükség. Ezt behelyettesítve az áll elő, hogy $p = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \mu \cdot v^2$. Az értelmezése: $\frac{1}{3} v^2$ a korábban levezetett egyenlőség miatt lett az egyetlen tengely helyett, $N$ darab molekula oszlik el $V$ térfogaton (ez a felületre vonatkozó rész), a többi pedig az erő.



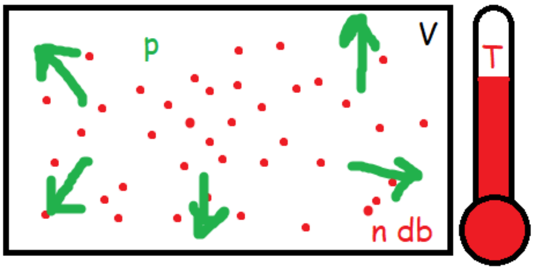

## A hőmérséklet kinetikai értelmezése

Egy ideális gáz melegítésekor az energiaváltozás csak a molekulák sebességében nyilvánul meg. Kicsit alakítsuk át a nyomás képletét: $p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \overline{\varepsilon_m}$. Itt annyi történt, hogy $\overline{\varepsilon_m}$ alá kivittük az $\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v^2$ tagot, ez lett egy molekula átlagos kinetikus energiája. Itt felhasználva, hogy $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, hőmérsékletre is átrendezhetjük a tagot. Első lépésben $p = \frac{1}{V} \cdot n \cdot R \cdot T$, és ha ezt a $p$-t behelyettesítjük az előző képletbe, majd átrendezzük, akkor lesz belőle, hogy $T = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{n \cdot R} \cdot \overline{\varepsilon_m}$. Az Avogadro-szám ($N_a \cdot n = N$) és Boltzmann-állandó ($k = \frac{R}{N_A}$) bevezetésével az lesz, hogy $T = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overline{\varepsilon_m}}{k}$. Ezzel matematikailag bizonyított, hogy a hőmérséklet az átlagos mozgási energiával, így az átlagos sebességgel arányos.

Át lehet úgy rendezni a képletet, hogy egy molekula átlagos sebességét megkapjuk: $c = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{\mu}}$.

# Az ideális gáz állapotegyenlete

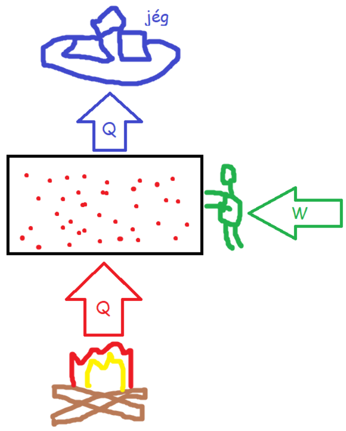
$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$




- $p$: pressure, nyomás
- $V$: volume, térfogat
- $n$: number, atomok száma
- $R$: egyetemes gázállandó
- $T$: temperature, hőmérséklet

Ez az ideális gáz állapotai közti összefüggést határozza meg, és ezek a termodinamika mennyiségei. Ideális gáz az, ami csak ettől függ, és rengeteg más tényezőt elhanyagolunk.

# 6. Hő, belső energia, a munka általánosítása, a termodinamika I. főtétele




## Hő és belső energia

Mechanikai folyamatoknál azt tapasztaljuk, hogy ha egy testen munkát végzünk, hő is keletkezik, illetve egy meleg test bizonyos körülmények közt munkát tud végezni, a munka és a hőközlés tehát kapcsolatban állnak egymással. Az energiamegmaradás tételéből tudjuk, hogy energia nem vész el, csak átalakul, ez lesz a magyarázat itt is.

Kísérleti tapasztalat, hogy egy adiabatikus rendszert (vagyis ami zárt és a környezetével nem tud hőt cserélni) A-ból B állapotba vinni mindig ugyanannyi munkával jár. Meghatározott állapotváltozáshoz meghatározott munka rendelhető, ezért a zárt rendszerben bevezethető egy belső energia, ami az adott állapothoz tartozik. A belső energia jele $U$, és azt mondtuk, hogy ugyanaz a változása mindig ugyanannyi munkával jár, tehát $U_B - U_A = W_{áv}$. A kísérletek szerint a belső energia a rendszer állapotának (pl. nyomás, térfogat, hőmérséklet) egyértelmű függvénye.

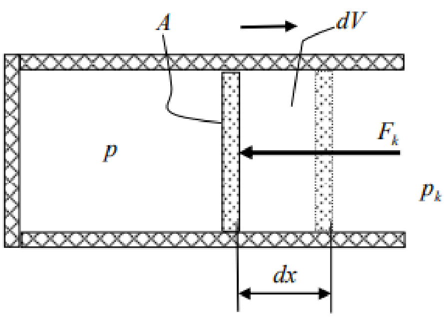
A hő jele $Q$, a hőközlés mennyiségét jelenti, mértékegysége Joule. Minél nagyobb egy rendszer hőmérséklete, minél több hőt tud közölni annál több energiával rendelkezik. Fogjuk fel ezt egyfajta potenciális energiaként: minél nagyobb, annál több munkát tud végezni, például egy meleg légtömeg felemel egy hőlégballont, egy hideg már nem.

Az is kísérletekkel lett megmutatva, hogy egy testbe úgy is vihető be energia, ha melegebb testtel érintkezik. Ez azt bizonyítja, hogy a belső energia munka nélkül is megváltoztatható, a hőközlés és a munkavégzés együtt éri el a változást, tehát kialakul az I. főtétel:

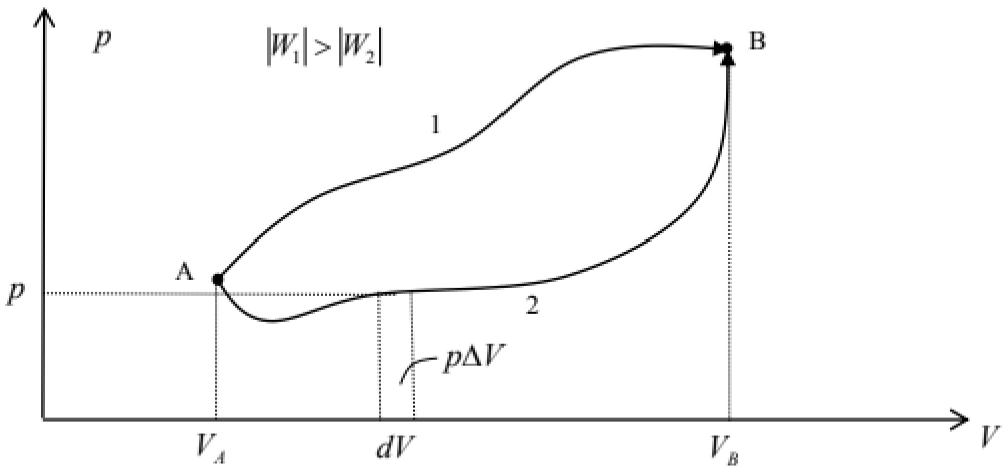
## A termodinamika I. főtétele

$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$, tehát az energiája egy zárt rendszernek csak akkor változhat meg, ha hőt vesz fel vagy ad le, vagy munkát végez vagy végzünk rajta. Tehát elsőfajú örökmozgó gép (amit ha beindítunk, örökké menni fog) nem létezhet. Olyan előfordulhat, hogy a hőből munka lesz, és az energia nem változik, de ha csak magában áll a rendszer, akkor az összeg 0.

## A munka általánosítása



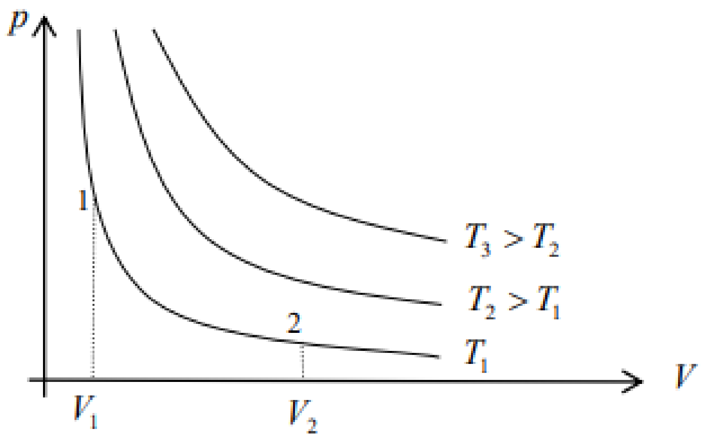

Rengeteg típusa van a munkának. Első a térfogati munka, amiről mechanikai kölcsönhatás esetén beszélünk. Az ábrán egy ilyen munka látható, a nyomás egyenlítődik ki a zárt és nyílt tér közt, a munka változása ekkor $\Delta W = -(p + \Delta p) \cdot \Delta V$, ahol $\Delta p = p_k - p$. Ebből az következik, hogy ha kellően kis részekre nézzük meg egymás után ezeket a változásokat, vagyis igazából integráljuk őket, akkor azt látjuk, hogy egy állapotátmenet két különböző módja közt különböző mennyiségű munkát is lehet végezni.




Elektrosztatikus kölcsönhatásnál ugyanez történik, csak más betűkkel: nyomás helyett potenciál van, térfogatváltozás helyett töltések átszállítása, ettől függ a munka. Anyagi kölcsönhatás is ilyen, kémiai potenciál van a nyomás helyén, és az anyagmennyiség változik, ettől függ a munka. Ha pedig olyan helyzetet írunk le, ahol ugyanabba az állapotba térünk vissza, ahonnan indultunk, vagyis egy kört jártunk be, akkor az I. főtétel szerint $W + Q = 0$, hiszen a belső energia ugyanannál az állapotnál nem lehet más, tehát a változása 0.

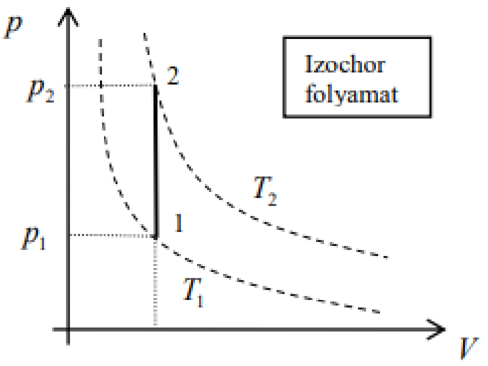
## Ideális gáz állapotváltozásai

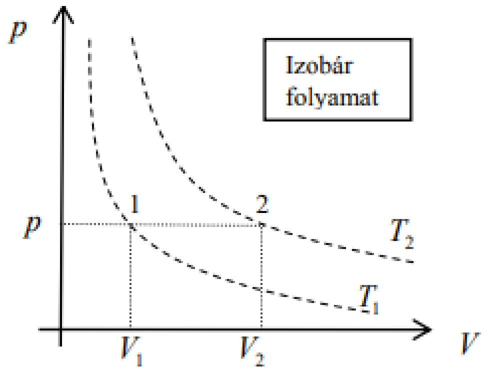
Izoterm: hőmérséklet változatlan, a nyomás és térfogat aránya változik. Belső energia nem változik, a rendszeren végzett munka hőleadással jár: $Q = \; - W$.



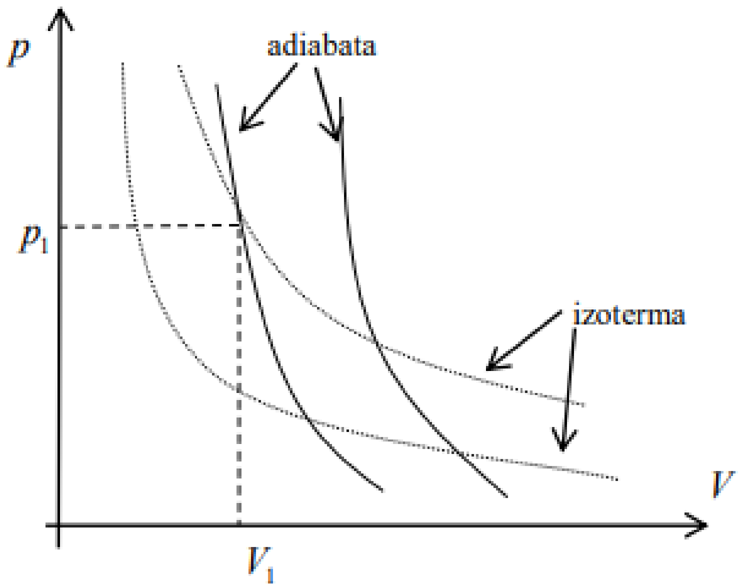

Izochor: térfogat változatlan, a nyomás, és így a hőmérséklet is változik. Mivel $dV = 0$, nincs munka, az energiát csak hőátadás ($Q$) változtatja.

Izobár: nyomás változatlan, a térfogat, és így a hőmérséklet is változik, mint izochornál: $W = \; - pdV$
.




Adiabatikus: nincs hőátadás a környezettel, tehát $Q = 0$, így $dU - pdV = 0$.



# 7. A termodinamika II. főtétele, entrópia, egyensúlyi feltételek és termodinamikai potenciálok

## A termodinamika II. főtétele

Az, hogy egy gép az energiájának mekkora részét alakítja munkává, hatásfoknak hívjuk. Ez egy 0 és 1 közti szám, de százalékban is megadhatjuk. A hatásfok semmiképp nem lehet 100% feletti, hiszen akkor energiát termelne a semmiből. A 100% azt jelentené, hogy minden energia munkává alakul. Kísérletek azt bizonyítják viszont, hogy még a 100% sem létezhet, és ez a hőtan II. főtétele: a hatásfok nem lehet 100%, a felvett hő egy részét mindig leadja a rendszer. Úgy is meg szokták ezt fogalmazni, hogy másodfajú örökmozgó gép nem létezik.

Más megfogalmazások: a természetben nincs olyan folyamat, mely csupán abban állna, hogy egy test hőt veszít és az teljes egészében munkává alakulna. Olyan folyamat sincs, ahol a hő csak úgy simán átmegy a meleg helyről a hidegre. Ezekből az látható be, hogy egy munka folyamata nem fordítható meg külső beavatkozás nélkül. Nem történhet például olyan, hogy egy lefékezett bicikli újra elindítja saját magát, mert a fék hővé alakította az energiáját, az pedig kiegyenlítődött a környezettel. Olyan sincs, hogy a füst visszaszáll valahová, és újragyújt egy tüzet, csak egyszerűen szétoszlik.

## A II. főtétel matematikailag: az entrópia

Az entrópia az állapotátmenet során felvett redukált hőmennyiség: $dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$. Itt $dQ_{rev}$ egy reverzibilis (visszafordítható) folyamatban átadott hőenergia, lényegében a megváltozott hő. Az entrópia is egy változást ír le. Extenzív változó, ezért a teljes rendszer entrópiájának változása az összes kis entrópiaváltozás összeadva, a jele már $\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T}$.

Azt mondtuk, hogy az entrópia a reverzibilis folyamatoktól függ, vannak azonban irreverzibilis folyamatok is, ezek kisebbek az entrópiánál: $dS > \frac{dQ_{irrev}}{T}$. Ebből következik, hogy hozzáadva az összes entrópiához, már nem egyenlőségről beszélünk: $\Delta S \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}$. Zárt rendszernél nincs hőátadás a környezetnek, vagyis a jobb oldal nulla, viszont az entrópia mégis lehet nagyobb nála: $\Delta S \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy zárt rendszer entrópiája csak növekedhet, nem csökkenhet.

## Egyensúlyi feltételek és termodinamikai potenciálok

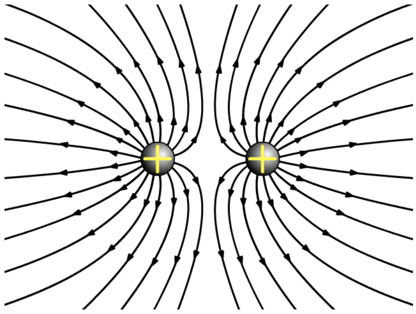
Össze tudjuk vonni a két főtételt: $dU \leq T \cdot dS - p \cdot dV + \mu \cdot dn$. Ha csak térfogati munka van, az utolsó tag eldobható: $dU \leq T \cdot dS - p \cdot dV$. Ha állandó a hőmérséklet (izoterm) és a térfogat (izochor), akkor $dT = dV = 0$, és kicsit át tudjuk rendezni a fő egyenletet, a 0-kat ki tudjuk ütni: $d(U - T \cdot S) \leq 0$. Ezt az $F = U - T \cdot S$ tagot hívjuk Helmholtz-féle szabad energiának, és nem növekedhet egy állandó térfogatú és hőmérsékletű zárt rendszerben. Egy rövidebb felírásban: $dF \leq 0$, vagyis a szabad energia kizárólag csökkenhet ilyen környezetben.

Vezessük be az entalpiát, ami $H = U + p \cdot V$. Ez csak egy állapotfüggvény, különösebb jelentése nincs, rövidíteni lehet vele.

Ha állandó a hőmérséklet (izoterm) és a nyomás (izobár), akkor az összevont alakot átrendezve egy $G$ betűvel jelölt Gibbs-féle szabad energiát állapíthatunk meg: $dG = dU + p \cdot dV - T \cdot dS$. A jobb oldali tagokra kijön, ha rendezzük az összevont főtételt, hogy $dG \leq 0$, ha $dT = dp = 0$. Látjuk, hogy $G$ képletében van egy $U + p \cdot V$ rész, vagyis az entalpiával arányos. Innentől az entalpia is csak csökkenhet ebben az izoterm-izobár rendszerben.

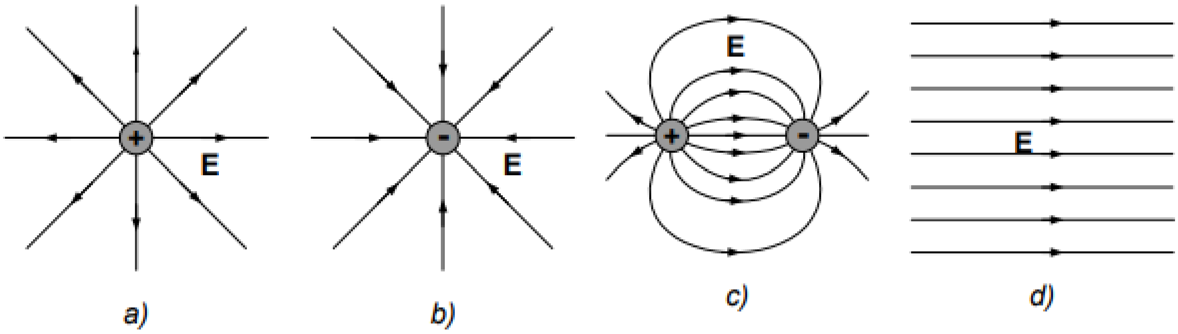
# 8. Elektromos térerősség, potenciál, az elektrosztatika alapegyenletei integrális formában

## Az elektromos tér



Elektromos töltés(ek csoportja) körül mindig fel tudjuk rajzolni, hogy az adott pontban merre és mekkora erővel mutat az elektromos erővektor. Ezeknek az összességét hívjuk elektromos térnek. Rövid definíció: olyan közeg, ami elektromos töltések hatását egymásra kényszeríti.

Az ábrán az erőtér látható, ahová alkalmanként beszúrunk egy pozitív $q$ ponttöltést, amit a szintén pozitív $Q$ töltés kilök. Mivel megmozdul az erőtérbe helyezett $q$ töltés, amire más erőnek nem kellene hatnia, ezért igazoltuk, hogy van erőtér. Példák elektromos terekre:



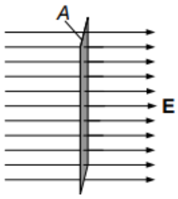

a) pozitív töltés tere
b) negatív töltés tere
c) elektromos dipólus
d) párhuzamos elektromos tér

Minél sűrűbben vannak a térerősségvonalak, annál nagyobb ott a térerősség.

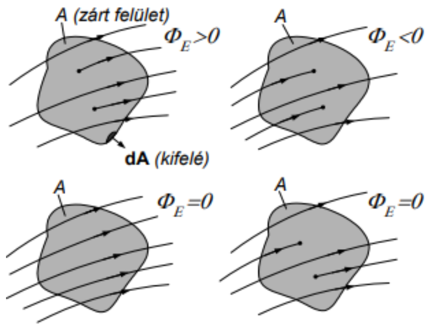
## Az elektromos térerősség

Az elektromos tér egy adott pontján kifejtett erő: $\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}$. Ez úgy működik, hogy vesszük a Coulomb-törvényt, ahol az egyik töltés $q$ lesz, vagyis $\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12}$, ezt a $q$-t kiemeltük, a maradékot elneveztük $\mathbf{E}$-nek. Az $\mathbf{E}$-t nevezzük térerősségnek, szokás erre rendezni. A szuperpozíció miatt több töltés térerőssége a tér egy pontján összeadható, elvégre az is egyfajta erő. A térerősséget mérni tudjuk egy ponton, de az összetevőit megállapítani már nem. Ha egyszer összeadtunk sok számot, egyetlen számból nem tudjuk megmondani, mik az összetevők.

# Az elektromos tér munkája, az elektromos potenciál

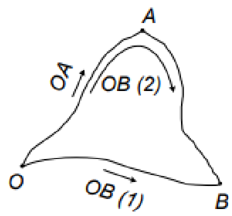



Elektromos fluxus: $\Phi_E^A = E \cdot A$, tehát az, hogy egy $A$ területű, bármilyen formájú lap felületén összesen mennyi erőssége halad át az elektromos térnek. Szabad felületen a fluxust úgy határozzuk meg, hogy $\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}$. Erővonalak akkor kezdődnek vagy végződnek egy zárt felületen (testben), ha van benne töltés, különben amelyik erővonal bemegy, az ki is jön, tehát nullázódik. Ezt a következő ábra szemlélteti:




A potenciál $U_{op} = -\int_O^P \mathbf{E} d\mathbf{r}$, és azt írja le, hogy egy töltés potenciálisan mennyi munkát végezhet egy erőtérben két pont között.

# Az elektrosztatika I. alaptörvénye




Azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér konzervatív, tehát ha megteszel egy bármilyen kört, a potenciál nem változik: $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$. Az ábra a jobb oldalon azt mutatja, hogy ha egyik pontból a másikba haladunk, végső soron ugyanannyit változik a potenciál. Ebből is látszik, hogy ha teszünk egy kört, akkor 0 lesz a változás, hiszen az olyan, mintha meg sem mozdultunk volna.

# A fluxus

$\Phi_E^A = \int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}$, egy felületen áthaladó elektromos erővonalak energiáinak összessége. Lényegében a felület minden pontján összeadjuk, hogy ott mennyi az elektromos tér energiája. Síknál ez az integrál megoldva egyszerűen $E \cdot A$, vagy ha valamilyen szögben áll az erővonalakhoz képest, akkor $E \cdot A \cdot cos(\alpha)$, mert minél merőlegesebb az erővonal, annál kevésbé számít.

# Az elektrosztatikus tér II. alaptörvénye

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy zárt test fluxusa mi. Egy zárt test az, amiből nincs kifelé vezető út. Mivel minden töltés erővonalak forrása, a zárt testen belül található töltéseket csak össze kell adni, ennyivel járulnak hozzá az erőtérhez. A külsőket egyszerűen hagyjuk figyelmen kívül, mivel ami vonal bemegy egy zárt testbe, az ki is jön belőle. Ezek alapján $\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$, ami kizárólag a belül található töltésektől függ.

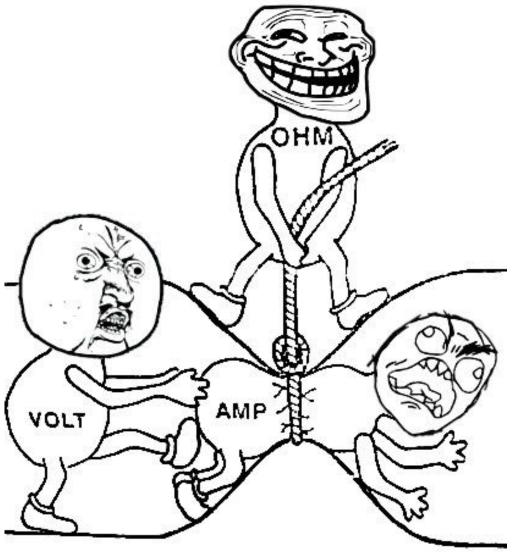
# 9. Elektromos áram, ellenállás, vezetőképesség, Joule-hő, Kirchhoff-törvények

## A stacionárius elektromos áram, áramerősség

Az áramerősség az időmennyiség alatt áthaladó töltés. Ha időben állandó, vagyis nem változik más időpontra, akkor az áram stacionárius.

## Áramsűrűség

Az áramsűrűség egy adott keresztmetszetre, a teljes vezető anyag egy részére mondja meg, hogy mennyi áram folyik át rajt. Az áramerősség ezt azért nem adja meg, mert a teljes keresztmetszetre vonatkozik, az áramsűrűség pedig az áramerősség és a felület hányadosa: $j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$.




## Ohm-törvény, elektromos ellenállás

Áramot okozó feszültség és áramerősség közt mérések szerint egyenes arányosság van. Ohm írta le, hogy adott vezető és adott körülmények közt az arányossági tényező állandó, tehát a vezető állandó módon ellenáll az áram folyásának. Ezt nevezzük ellenállásnak, a jele $R$, mértékegysége pedig $\Omega$ (ohm). $U = I \cdot R$, ebből $U$ a feszültség, $I$ az áramerősség, és $R$ az ellenállás. Minden anyag valamilyen mértékben ellenáll a töltések folyásának, ezt számszerűsíti Ohm törvénye.

## Vezetőképesség

Minél nagyobb az ellenállás, annál nehezebben halad az áram, ezért a vezetőképesség ezzel fordítottan arányos, a kisebb ellenállású anyag jobb vezető lesz. A vezetőképesség jele $G$, mértékegysége a siemens: $G = \frac{1}{R}$.

## Joule törvény

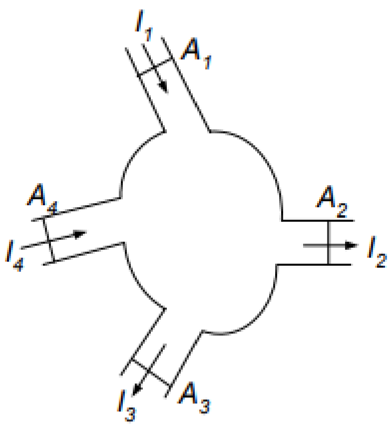
Az elektromos áram miatti töltésmozgás hőtermeléssel jár, és a hőtani tételekkel levezethető, hogy $P = I \cdot U$ teljesítmény alakul hővé egy időegység alatt. A teljesítmény mértékegysége a watt (W). Adott időre jutó munkát írna le $P$, ami $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ alakban írható fel.

# Az elektromos áramkörök leírása

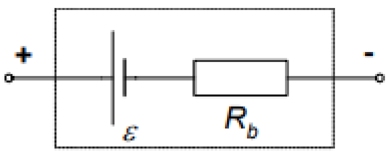
Áramkör az, ahol zárt hurokban haladnak az elektromos töltések. A zárt hurok azt jelenti, hogy valamilyen kört tesznek meg. Ez a hurok elágazhat, több kör is lehet egyben, a körök részei további körökre bomolhatnak, ilyenkor elektromos hálózatnak hívjuk. Példaként gondolj arra, hogy egy hosszabbítóba dugott minden eszköz 1-1 áramkör, de ettől még a hosszabbítóból indulnak, tehát vele együtt egy hálózatot alkotnak, mivel a hosszabbító is egy áramkör a fali aljzatból. Ahol az áramkör elágazik, azt csomópontnak hívják. Két csomópont közötti vezető szakaszok (ágak) tartalmazhatnak áramköri elemeket, például telepet (ez az aksi vagy elem fizikai neve), ellenállást, stb. Egy hálózat vizsgálatánál azt nézzük, hogy az áramerősség az ágak közt milyen törvények szerint oszlik meg, és hogy érvényes-e, illetve milyen módon érvényes az elektrosztatika I. alaptörvénye. Mi olyan áramkörökkel foglalkozunk, ahol az áramerősség időben nem változik meg, ezt hívjuk stacionárius áramnak.

# A Kirchhoff-egyenletek

Kirchhoff I. egyenletét úgy hívjuk, hogy a töltésmegmaradás törvénye. Először azt vizsgáljuk, hogy ha egy vezetőben halad az áram, de például a vezető szűkül, változik-e az áramerősség. Felmerülhet, hogy ilyenkor a töltések felhalmozódnak a szűkülés miatt, nem férnek át, de ez nem fordul elő. A válasz az, hogy egy vezető minden pontján pontosan ugyanaz az áramerősség folyik, mert ami töltés megindul, az át is megy rajta végig. Töltésfelhalmozódás tehát nincs.




Elemezzük a jobb oldali ábrát: az 1-es és 4-es keresztmetszetű vezetőn érkezik áram, a 2-es és 3-as keresztmetszetűn távozik. Beláttuk, hogy töltés nem halmozódhat fel, ezért ami bejön, annak távoznia kell, tehát a bemenő és kimenő áramok összege egyenlő kell legyen, ennél a példánál épp $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$. Ha a csomópont szemszögéből írjuk fel, akkor igazából a kimenő áram negatív, tehát $I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0$ lenne a pontos képlet. Így már általánosan is megfogalmazhatjuk: $\Sigma I = 0$, vagyis egy csomópontnak nem lehet áramerőssége, nem halmozódhat fel benne töltés, és ami befut, az távozik is.



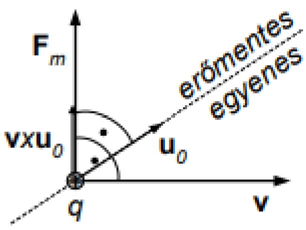

A II. egyenlet előtt először vegyük át, hogy működik a telep: azt tudjuk, hogy a köré épített áramkör valamilyen munkát végez. Viszont tudjuk az I. egyenlet miatt, hogy 0-ra kell kijönnünk, tehát a telep valami ellentétes munkát végez. A pozitív munka kint a - pólustól a + felé halad, belül ez fordítva van. Az áramkörön ellenállásokkal szemléltetjük a fogyasztókat, és mivel magán az áramkörön is van ellenállás, ezért a telepet is jellemezni kell egy olyan $R_b$ belső ellenállással, amivel egyensúlyban van magával az áramkörrel. Azt, hogy az áramkör a telepen kívül és belül is ugyanakkora munkát végez, tehát ugyanaz a feszültsége, úgy írjuk le, hogy $\Sigma I_k R_k + \Sigma I_m R_{bm} - \Sigma U_m = 0$, ahol a $k$-val jelölt tagok a külső (áramköri) ellenállások, az $m$-mel jelölt tagok a telepeken belüli ellenállások, $U_m$ pedig a telepek úgynevezett generátorfeszültsége, vagyis amit adnak a rendszernek. Összesítve egyszerűen $\Sigma U = 0$ a képlet, ez Kirchhoff II. egyenlete.

# 10. Mágneses tér: mágneses indukcióvektor, a sztatikus mágneses tér alapegyenletei integrális formában

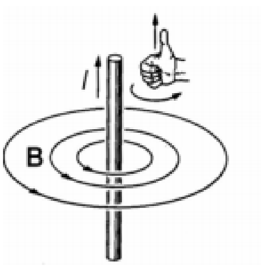
## Mágneses erőtér

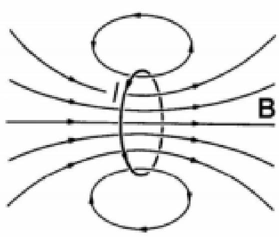
Beszéljünk a mágnesekről először: olyan anyagok, amiknek van egy pozitív és negatív pólusa, amik vonzzák és taszítják egymást. Mint a gravitáció, de mégis független tőle. Mint az elektromosság, de nincsenek töltések. A mágnes a végtelenségig mágnes: ha eltöröd, az új daraboknak ugyanúgy lesz pozitív és negatív pólusa. Az iránytűk működéséből látjuk, hogy valójában a Föld is egy hatalmas mágnes. Kísérleteken látszik, hogy a mágnes hatással van *mozgó* elektromos töltésekre (bár maga a mágnesesség nem töltésekkel működik, hatással van rájuk és viszont), ezért, hogy egyszerűbb legyen velük foglalkozni, töltésekkel határozzuk meg a mágneses mező mértékét.

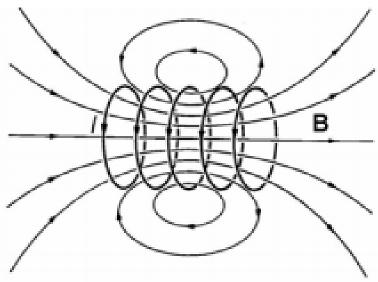
## Mágneses indukcióvektor

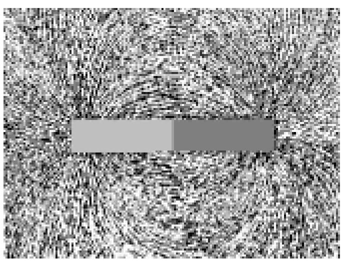



Nézzük az ábrát. Az valójában 3 dimenziós, és szemlélteti, hogy az egyik tengely egy úgynevezett erőmentes egyenes. Ez azt jelenti, hogy azon mozgó töltéseken semmi mágneses erő nem keletkezhet, csak aminek a mozgása eltér tőle. Így minden esetben erre merőleges a mozgó töltésre ható mágneses erő ($\mathbf{F}_m$). A $q$ töltés természetesen minden irányba mozoghat $\mathbf{v}$ sebességgel, és a mágneses erő majd erre merőlegesen fog hatni. Egy $\alpha$ szöget zár be az erőmentes egyenessel, amitől függ a mágneses kölcsönhatás mértéke. A teljes képlet $\mathbf{F}_m = B \cdot \mathbf{v} \cdot q \cdot sin(\alpha)$, ahol $B$ egy arányossági tényező a mágnes tér erősségét szemléltetve, és úgy hívjuk, hogy *mágneses indukcióvektor*, mértékegysége Tesla. $\mathbf{B}$ vektorként is felvehető ($\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{u}_0$, az erőmentes egyenes irányába fog mutatni, és $\mathbf{u}_0$ adja neki az irányt (ábra). Ebből adódik ez a szorzat: $\mathbf{F}_m = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. A térben az elektromos erőterekhez hasonlóan a mágneses erőtér is szemléltethető, ahol $\mathbf{B}$ irányát az adott pontban megmutató indukcióvonalakról beszélünk:



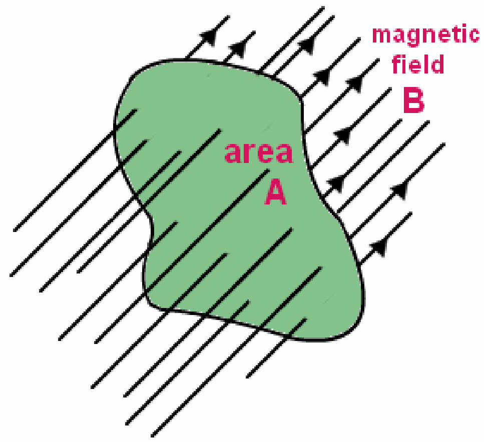



Itt azt látjuk, hogy az elektromossággal ellentétben a mágneses erővonalak önálló zárt hurkok, nem a forrásban kezdődnek és végződnek. A bal oldali ábrán látható a jobbkézszabály, vagyis hogy ha úgy tesszük a jobb kezünk, hogy a hüvelykujj az áram folyását mutatja, a többi megmutatja az indukcióvektorok irányát.

# A sztatikus mágneses tér I. alaptörvénye

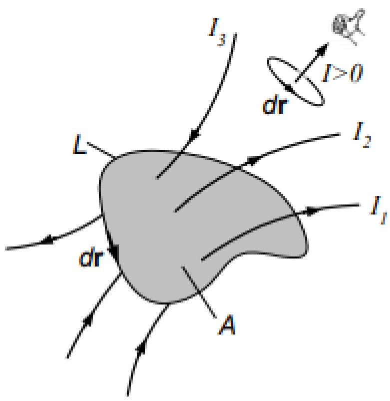
Az elektrosztatika I. alaptörvényéhez hasonló mértékre vagyunk kíváncsiak, vagyis egy hurkon az összesített mágneses erőre: a $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r}$ integrált számítjuk. Láttuk, hogy a mágneses erők hurkokban jelentkeznek, ezért biztosak lehetünk benne, hogy ez az integrál nem 0. Ha az indukcióvektor irányába halad az $L$ kör, akkor pozitív lesz, ha ellentétesen, akkor negatív. Az ábra bemutat egy ilyen körre példát, ami több elektromos vezető körül jelentkezik. Azt látjuk, hogy valamilyen módon az áramerősséggel arányos az integrál értéke, szóval egy arányossági tényezőt választunk neki: $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = \mu_0 \cdot \sum_k I_k$. Itt $k$ a vezetők egy darabját jelzi, $\mu_0$ neve pedig a vákuum permeabilitása, ami egyszerűen egy ilyen egyenlőség arányossági tényezőjét jelenti. Ezt az alaptörvényt még úgy is hívják, hogy gerjesztési törvény.

## Az indukciófluxus




Az elektrosztatikánál a II. alaptörvény azt fogalmazta meg matematikai formában, hogy az erővonalak töltésben kezdődtek és végződtek. Itt is akarunk hasonlót leírni, csak ugye más a helyzet, a mágneses erővonalak köröket tesznek meg. Azért írjuk fel a felületet metsző indukcióvektorok előjeles összegét **A** felületre, vagyis az indukciófluxust: $\Phi_B = \int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}$.

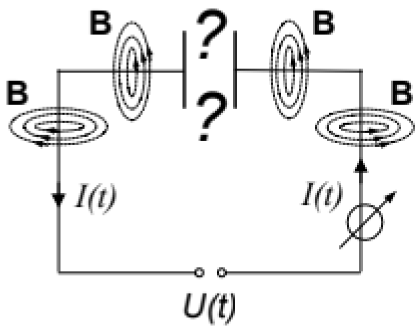
# A sztatikus mágneses tér II. alaptörvénye




Az, hogy a fluxus mértéke egy zárt felületen milyen, leírja, hogy forrásosak vagy forrásmentesek a vonalak, vagyis hogy van-e egy pont, amiből erednek, vagy nincs. Mivel mágnesességnél nincs ilyen pont, mert mind kör, ezért amelyik vonal bármelyik zárt testbe belép, az ki is lép abból, tehát a fluxoshoz hozzáadódik és ki is vonódik belőle, ezért egy zárt felület indukciófluxusa csakis 0 lehet: $\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0$. Ezt hívjuk a mágneses tér II. alaptörvényének, avagy Gauss-törvénynek. Azt fejezi ki, hogy a mágnesesség nem egy pontból ered vagy pontba fut, hanem minden esetben forrásmentes. Ez bizonyítja, hogy nem létezik mágneses töltés, amire további bizonyíték, hogy egy mágnesrúd két pólusra törésével nem szétválasztjuk a pólusokat, hanem két külön mágnest csinálunk, és azoknak is lesz mindkét pólusa.

# 11. Változó elektromágneses tér: elektromágneses indukció, eltolási áram, az elektromágnességtan alapegyenletei integrális formában

## Eltolási áram




Ha egy áramkörben váltakozó áram (AC) megy, és egy kondenzátor van rákötve, akkor mégis folyik benne az áram, annak ellenére, hogy a kondenzátor technikailag megszakítja az áramkört (lásd ábra). A kondenzátorban nem folyik hagyományos értelemben vett áram, mégis van mágneses tér ott, tehát valami olyan mechanizmust kelt, mint az áram. A lemezek közt az erőtér változik, tehát a jelenség kapcsolatban lesz ezzel. Ezt a változást az okozza, hogy a lemezeken változik a töltés. Úgy írjuk fel, hogy $I = \varepsilon \cdot \frac{dE}{dt} \cdot A$, és ezt hívjuk eltolási áramnak.

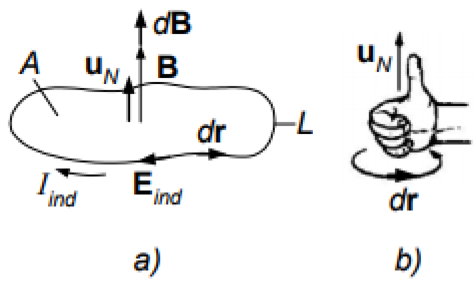
Ez a jelenség a tapasztalatok szerint általánosan is igaz, ahol elektromos áram van, ott létrejön egy mágneses tér, és ez fordítva is igaz, a mágneses tér elektromos áramot tud létrehozni.

## Az elektromágneses indukció

Mágneses tér hatására egy vezető hurokban létrejöhet indukált elektromotoros erő. Az erőterét indukált elektromos erőtérnek, az elektromos áramát pedig indukált áramnak hívjuk. Tudjuk, hogy ha nincs a töltéseknek sebessége az indukcióvonalhoz képest, akkor nem lesz belőle mágneses erő, ezért vagy a mágneses térnek kell mozognia (ekkor beszélünk nyugalmi indukcióról), vagy a vezetőnek (ami a mozgási indukció).

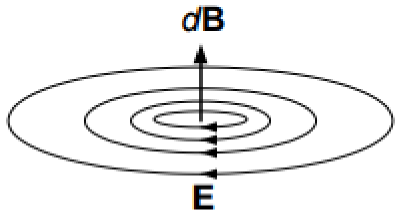
Számos tapasztalat mutatja, hogy egy rögzített vezető hurokban áram jön létre, ha változik körülötte a mágneses tér. Például köthetünk tekercsre árammérőt, amibe toljuk be egy mágnes egyik pólusát, ekkor látszik, hogy áram jelenik meg. Ha megállítjuk a mágnest a közepében, már nincs áram. Az is egy kísérlet a témában, hogy egy másik tekercset az első tekercs közepébe téve, arra áramot kapcsolva, egy kis időre lesz áram a külsőben. Ez működik fordítva is. Láttuk tehát, hogy a mágnes és az elektromágnes is indukál áramot. A kísérletek bizonyítják, hogy csak a mágneses tér változása indukál áramot, maga a tér nem. Azt is láttuk, hogy a gyorsabb mozgás több áramot termel.

## A Faraday-Lenz törvény




Ahhoz, hogy egy áramkörben tartósan áram folyjon, elektromotoros erőnek kell jelen lenni. Ez arányos az *A* felülettel és **B** idő szerinti deriváltjával, tehát a hurok felületére vonatkozó fluxussal. Kísérletekkel bizonyították, hogy az *a)* ábrán látható irányban változó erővonalak körül óramutató járásával egyirányú áram, így elektromos erőtér jelenik meg. Mivel jobbkézszabály szerint járjuk be, ezért ha képletet írunk fel az indukcióról, az előjel ellentétes lesz:

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}\right)$$




Alapból ez lenne a Faraday-féle indukciótörvény. Lenz neve azért került a képbe, mert felismerte a képletből, hogy az indukált áram körül mágneses tér jelenik meg, ami viszont ellentétes *d***B**-vel, így azt csökkenti. Ha nincs elektromos vezető, mágneses tér változása körül akkor is indukálódik elektromos mező. Az ábrán látszik, hogy az erővonalak köröket írnak le, balkézszabály szerint, ez viszont azt jelenti, hogy megdől az elektrosztatika I. alaptörvénye, ugyanis már nem konzervatív az erőtér. Miután a statikus erőtér konzervatív, a fenti képlet pedig az egyetlen olyan példa, ahol az erőtér nem az, ezért azt ismerjük el annak a törvénynek, ami nem csak sztatikus, de változó erőterek esetén is érvényes. Erre jó a Faraday-Lenz törvény.

## Maxwell-egyenletek

Az elektromágnességtan alapegyenleteit úgy hívják, hogy Maxwell-egyenletek. Ezek:

I. A Faraday-Lenz törvény: $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}\right)$

II. Az elektrosztatikus tér II. alaptörvénye (8. tétel) - elektromos erővonalak töltéstől indulnak vagy töltésbe érkeznek: $\oint_A \mathbf{E}d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$

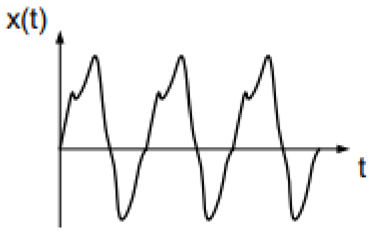
III. Az elektromos áram és az eltolási áram elektromos teret hoz létre:

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I + \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{E}d\mathbf{A}\right)$$

IV. A sztatikus mágneses tér II. alaptörvénye - a mágneses tér forrásmentes: $\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0$

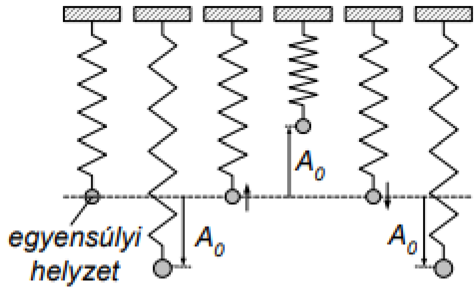
# 12. Mechanikai- és elektromágneses rezgések: harmonikus-, csillapodó- és kényszerrezgések

## A rezgés fogalma és leírása, a harmonikus rezgés

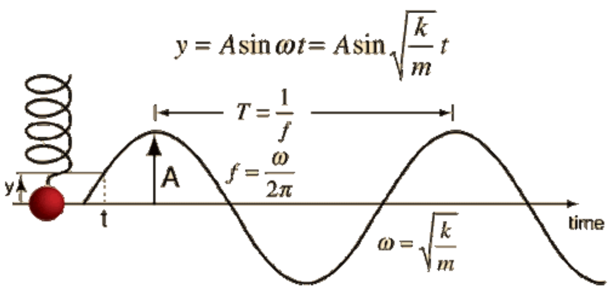



A rezgés általános értelemben valamilyen mennyiség bizonyos határok közti (periodikus vagy nem periodikus) változása. Nem feltétlenül a hétköznapi értelemben vett rezgéssel foglalkozunk, ugyanis más, például a feszültség is váltakozhat bizonyos határok között (például váltóáram). Egy rezgés nem feltétlenül tiszta szinusz (azt hívják harmonikus rezgésnek), lehet olyan fura, mint az ábra, vagy akár nem periodikus is. A lényeg, hogy minden rezgés felírható szinuszos tagok, így harmonikus rezgések összegeként, vagy az ábrán látható függvény egyszerűen még közelíthető is vele, mert nagyon hasonlít rá. Mivel ez bonyolult feladat, inkább csak a harmonikus rezgésekkel foglalkozunk. Bár a rezgések más-más fizikai jelenséghez tartoznak, az alapjuk mindig ez.

## Harmonikus rezgés mechanikai- és elektromos rezgő rendszerben



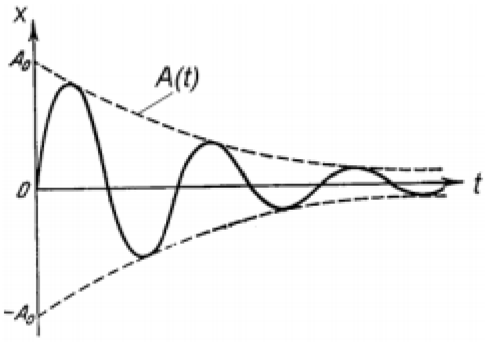

Harmonikus rezgés, aminek az időfüggése harmonikus (szinusz vagy koszinusz) függvénnyel írható le. A valóságban ritka az ilyen, mert szinte mindig csillapodnak, viszont közel harmonikus példát tudunk: jó közelítéssel harmonikus mozgást végez egy rugón lógatott tömeg, ha az egyensúlyi helyzetéből kitérítjük (ábra). A tömeg az egyensúlyi helyzetből lefelé $A_0$ távolságra térül ki, majd a rugó visszarántja, aminek hatására felfelé is ugyanaddig térül ki, ahonnét szintén megfordul. Látszik az ábrán is, hogy az idő folyása szerint egy szinuszfüggvényt rajzol ki.




A harmonikus rezgés általános alakja $x(t) = A \cdot sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$, ahol cos is használható. $A$ a legnagyobb kitérés, amit amplitúdónak nevezünk, $\omega_0$ a rezgés $T_0$ rezgésidejét meghatározó körfrekvencia ($\omega_0 = 2 \cdot \pi/T_0$), $\varphi$ pedig az időmérés kezdetétől függő fázisállandó. Gyakran használt az $f_0 = 1/T_0$ módon meghatározható frekvencia is, ami az egységnyi idő alatt lezajló periódusok számát jelenti.

Elektromos váltóáram esetén az áramerősség és a feszültség ilyen kapcsolatban van egymással: $I(t) = I_m \cdot sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_1)$, $U(t) = U_m \cdot cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_2)$. Látható, hogy egy sin-cos pár, és $I_m$ és $U_m$ a maximális értékeket megadó áramerősség- és feszültség-amplitúdó.

## A csillapodó rezgés alapegyenlete, jellegzetességei mechanikai és elektromos rezgő rendszerben

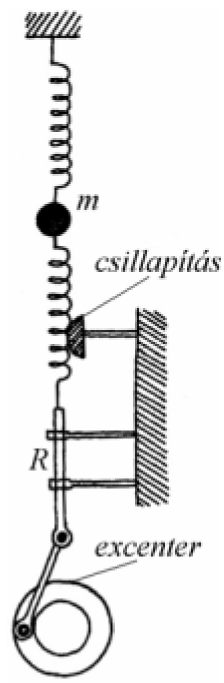



A valóságban egy rezgő rendszerből az energia folyamatosan eltávozik, így a rezgés amplitúdója folyamatosan csökken. Az ilyen rezgéseket csillapodó vagy csillapított rezgéseknek hívjuk. Vegyük például a 27. tétel rugós példáját A valóságban az ábrán látható módon az amplitúdója idővel csökkenni fog, ha felrajzoljuk a kitérés-idő függvényét. Valamilyen erő tehát fékezi, csillapítja a mozgást, nevezzük $F_{cs}$-nek jelölt csillapító erőnek. Deriváltuk már egyszer a kitérést, hogy gyorsulást kapjunk, tegyük meg újra, viszont ellentétes előjellel adjuk hozzá ezt a csillapítást, hogy egyre jobban fékezze a mozgást:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) + F_{cs}$$

A csillapító erő az idő függvénye, lehet például a közegellenállás (közegben mozgó test mozgásának csillapítása a közeg által), ami a sebességgel ellentétes irányban hat, itt például $F_{cs} = -k \cdot v_x(t)$, ahol $k$ a rugómerevség.

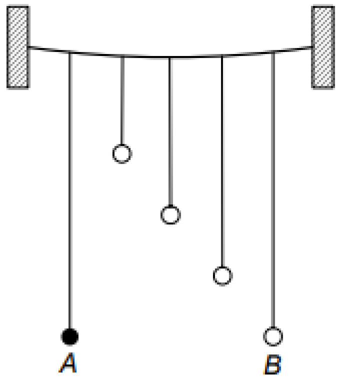
Általában az amplitúdó csökkenése exponenciális. Így felírható egy exponenciálisan csökkenő szorzó taggal: $x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$ formában, ahol $A_0$ az ábrán látható kezdeti amplitúdó, és $\beta = \frac{k}{2 \cdot m}$. Természetesen a rendszer energiája a rezgés csillapodása miatt folyamatosan csökken (ugye annak amplitúdójától függ), ennek pontos mértéke $dE/dt = -2 \cdot \beta \cdot E$.




## Kényszerrezgés és rezonancia mechanikai és elektromos rezgő rendszerben

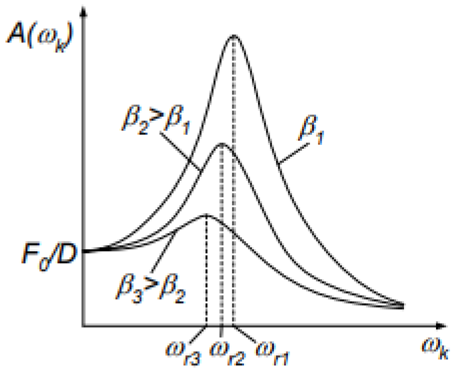
Kényszerrezgésnek nevezzük, amikor valamilyen külső hatás (kényszer) periodikus rezgései egy rezgésre képes rendszert rezgésre kényszerítenek. A külső hatás sokféle lehet, itt a szinuszt vizsgáljuk.

Az ábrán látható kísérlet egy pontszerű test rezgését modellezi, alaphelyzetben egyszerű rezgőmozgást tud végezni, ha kitérítjük. Került rá egy csillapítás, hogy a keletkezett rezgést tompítsa valamilyen mértékben, és ne rúgjon túl a kísérlet közben az amplitúdó a határokon. A lényegi rész az alsó excenter, amit forgatva az $R$ rúd fel-le mozog, periodikus kényszerrezgést idézve elő. Ahogy növeljük a sebességet, vagyis a kényszerrezgés frekvenciáját, a tömeg egyre jobban kitér, de egy ponton túl már csökken, majd teljesen elhal. Ezzel látható, hogy van egy frekvencia, ahol a jelenség maximális. Az alsó kísérlet, hogy fellógatunk egy nagy tömegű ingát (*A*), és változó hosszúságú sok kicsit, ezek közül *B* hossza (így frekvenciája) egyezik *A*-val. Ha *A*-t kimozdítjuk, csak *B*-n látszik látványosan a kényszerrezgés. A kísérletekből tapasztaltuk, hogy a rendszer leginkább egy adott frekvencián rezonál külső kényszerre, ezért rezonanciának is hívjuk a jelenséget.



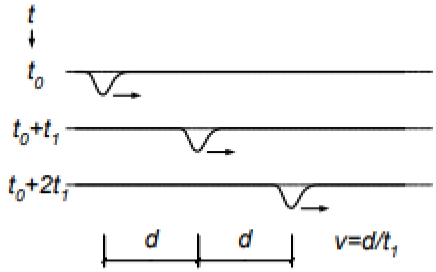

Képzeljük el ezt a rezgést egy gerjesztő $F_k = F_0 \cdot sin(\omega_k \cdot t)$ erőként. A tapasztalat szerint egy bonyolult rezgés után a rezonált tömeg a gerjesztő erő frekvenciáján rezeg, tehát a gerjesztő erő rákényszeríti ezt a rezgést. Ennek oka az, hogy ha egy rendszert egyensúlyi helyzetéből kitérítünk, beindul a sajátrezgése, amihez a kényszerrezgés hozzáadódik, viszont a csillapítás miatt a sajátrezgés eltűnik, és csak a kényszerrezgés marad.

Az amplitúdó frekvenciafüggését az az ábra szemlélteti, amit rezonanciagörbének hívnak. Az adott frekvencián mért amplitúdót mutatja, és látni rajta, hogy $A(0)$, vagyis a $0$-hoz tartó frekvencia hozzáadott kitérése pont az $F_0/D$ értékhez tart, ami megfelel annak, hogy $D$ állandójú rugót egyszerűen $F_0$ erővel térítünk ki. A maximális körfrekvenciához tartozó frekvenciát, vagyis $f_0 = \omega_r/(2\pi)$ értéket rezonanciafrekvenciának nevezik. $\beta$ az előző tételből ismert, értéke $k/(2m)$, a rugómerevség és a tömeg függvénye.

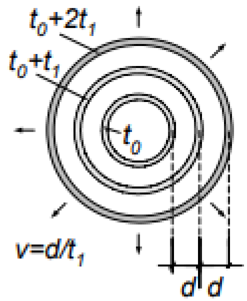


# 13. A hullám fogalma, hullámfüggvény, harmonikus hullám, a hullámegyenlet

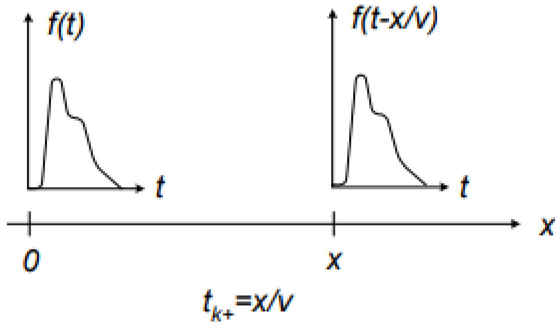
## A hullám fogalma

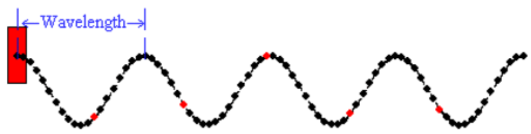



Egy rezgőmozgás jelenségeit gyakran távolabb is észleljük a létrehozás helyétől. Ezeket a távolban kiváltott hatásokat változásnak, zavarnak hívjuk. A zavar térbeli terjedését hívjuk hullámnak, azt a helyet pedig, ahol a zavar létrejött, hullámforrásnak hívjuk. A hullám szoros kapcsolatban áll a rezgésekkel, hiszen valamilyen rezgés terjed a térben. Erre a felső ábrán látható példa egy jó szemléltetés, ha egy kötélen rántunk egyet, az így kialakult völgy egyenletes sebességgel végighalad rajta. Bármilyen mozgást végzünk az elején, az el fogja érni a másik oldalát. Mivel a hullám egy vonalon terjed, ezért egydimenziósnak hívjuk. Két dimenzóban is nagyon könnyen tudunk rá példát mutatni, egyszerűen dobjunk bele egy tömeget egy álló vízbe. Az alsó ábra ennek a terjedését mutatja be, ami szintén egyenletes.




## A hullámfüggvény



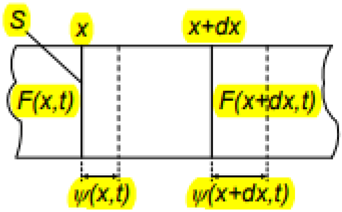

Az ábrán látható, hogy mi történik, ha adott pontból indítunk útjára egy hullámot, és nem 0 a pont. Természetesen ugyanaz lesz, ha helyileg máshol indítjuk, csak eltolással. Mivel $v$ sebességgel terjed, és $x$ távolságra toltuk el, pozitív irányban $t_{k+} = x/v$ időegység lenne elérni addig a pontig. Ha $f(t)$ függvény írja le, hogy adott időpillanatban a zavar mértéke egy pontban hogyan alakul, akkor egyszerűen ennyivel kell eltolni a függvényt, hogy úgy kezdődjön adott $x$ pontban, mintha $0$-ban lennénk: $f(t - x/v)$ a függvény. A hullám úgy működik, hogy a ponton, ahol leírtuk ezt a függvényt, változik, és széltében terjednek a korábbi értékei adott sebességgel. Ezt a GIF szemlélteti, lényegében a rezgő hullámforrás történelme terjed a térben, egy korábbi állapotát észleljük. Emiatt a hullámfüggvény nem csak időben, de térben is kell, hogy pozicionálja a hullámforrást, tehát egy pozíciót is megadunk hozzá, ami alapján már tudjuk, hogy adott pontban és időben mi lesz a hullám értéke: $\Psi(x, t) = f(t \mp x/v)$. Azért van ott a $\mp$, mert ha a vonalon balra vizsgálódunk, akkor $+\ x/v$, ha jobbra, akkor $-\ x/v$ az eltolás a függvényben.

## A hullámok típusai

- *Térbeli viszonyok szerint*: egy- (pl. kötél), két- (vízfelszín), vagy háromdimenziós (hang, fény)
- *A terjedés és a zavar viszonya szerint*: transzverzális (a zavar a haladási iránnyal merőlegesen hat, pl. kötélen) vagy longitudinális (a zavar a haladási irány szerint hat a környezetre, pl. hang)

- *Azonos értékkel rendelkező (azonos fázisú) pontok helye szerint*: síkban a vonal alakja szerint lehet egyenes hullám és körhullám, térben az alakja alapján beszélhetünk síkhullámról, gömbhullámról, hengerhullámról, stb.
- *A terjedő zavar időfüggése szerint*: ha a zavar időfüggését harmonikus (pl. szinuszos) tag adja meg, akkor harmonikus hullámnak nevezik, különben nem harmonikus hullámnak.

## A hullámterjedés matematikai leírása, a hullámegyenlet




Vettük a $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hullámfüggvényt. Az lenne a cél, hogy olyan fizikai egyenletet találjunk, ami ezt leírja. Vegyünk egy $S$ széles, $x$ tengelyen haladó rudat. Abból indulunk ki, hogy a hullám erőt fejt ki egy térfogatelemre, ami az ismert képlet alapján itt egy időpillanatban $dF_x = dm \cdot a_x$ lesz. Ebből úgy lesz hullámegyenlet, hogy a gyorsulást kapcsolatba hozzuk vele. Tudjuk, hogy a hullámfüggvény elmozdulást ír le adott ponton, aminek első deriváltja a sebesség, második a gyorsulás. Ebből lesz $a_x = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$. A $\partial$ jelöli a parciális deriválást, mivel a hely fix, mi csak idő szerint deriválunk. A tömeget is alakítsuk át, az $dm = S * dx * \rho$ lesz, ahol $S$ a keresztmetszet, $x$ a hossz, ρ (ró) pedig a sűrűség, ami azt adja meg, hogy egységnyi térfogatú anyag tömege mennyi. Mivel a másik két szorzott tag egy térfogatszámítás, ezért a sűrűséggel szorozva megkapjuk a tömeget. Használjunk még egy másik erőképletet, ahol $F = S * E * \varepsilon$, itt $\varepsilon$ a deformáció, vagyis egyszerűen $\Psi$ deriváltja $x$ szerint. Ha behelyettesítjük bal oldalon $m * a$-t, majd azokat egyenként, akkor a hullámfüggvény egy majdnem általános alakot fog ölteni:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

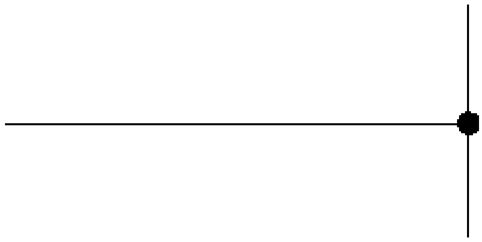
Itt az első tagot kiemeljük, elnevezzük $B$-nek,és az általános alak ezek után:

$$B \cdot \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

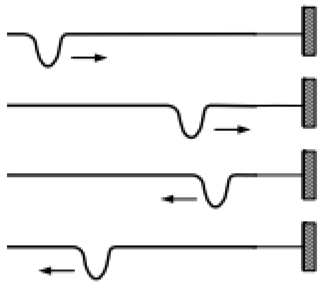
Itt $B$ attól függ, hogy éppen milyen hullám terjed, más közegben terjedő más típusú hullám esetén nem $E/\rho$ lesz. Ez most a rúdban terjedő longitudinális hullám volt. Ha nem egy dimenzióban számolunk, hanem mondjuk háromban, akkor is egyszerűen ugyanez a képlet, csak $x$ mellett létezik $y$ és $z$ tag is.

# 14. A hullámterjedés legfontosabb jelenségei: visszaverődés, törés, interferencia, diffrakció

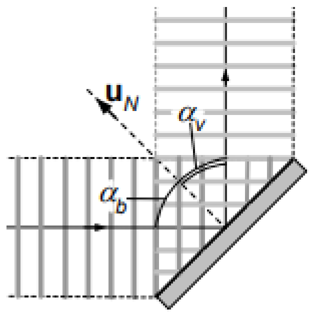
## A hullámok visszaverődése és törése

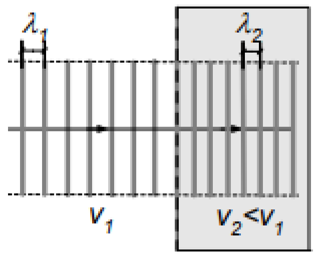


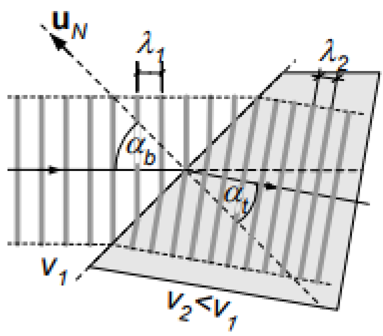
Ha a hullám egy közeg határához ér (például a hang a falhoz), akkor valamilyen módon visszaverődik, miközben a polaritása (előjele) megváltozhat, illetve behatolhat a közegbe, ott egy másik sebességgel és/vagy polaritással továbbterjedve. Próbáljuk ki, hogy egy falhoz feszített kötélen elindítunk egy hullámot. Az elér a falig, és ellentétes irányba kitérve elindul visszafelé, mint az a GIF-en is látszik. Ez azt jelenti, hogy a hullám fázisa 180 fokkal, vagyis $\pi$-vel (radiánban) változott meg. Módosítsuk a kötél végét úgy, hogy ne fixen legyen kikötve, hanem szabadon elmozdulhasson (például tegyünk a kötél és a fal közé vékony, rugalmatlan zsinórt), ekkor azt vesszük észre, hogy a polaritás nem változik, ugyanaz a hullám jön vissza, amit elindítottunk (alatta lévő ábra). A rögzített esetben a megfordulás oka az, hogy a falhoz érkező zavarnak a falnál el kell tűnnie, és ezt egy ellentétes irányú kitéréssel kompenzálja. Ez a jelenség elektromágneses hullámoknál is létezik.



Az oldalról érkező és megtörő hullámokat vízzel tudjuk bemutatni. Egyenes pálcával lassan ütögetve a vizet csináljunk hullámokat, majd tegyünk egy ferde akadályt az útjába. Erről a hullámok olyan szögben verődnek vissza, amik a falra merőleges normálvektortól (így hívjuk egy felület “előre” irányát) ugyanannyira különböznek, mint a beesési szög. Az alatta lévő ábrán azt látjuk, hogy egy medencét két részre bontottunk egyenes határral. A szürke részen a vízmélységet csökkentettük, és ez víznél a terjedési sebességet csökkenti, tehát egy másik közeget hoztunk létre. Meg is figyelhetjük, hogy a hullámok lassulnak. $\lambda$ jelöli a hullámhosszt, és a képlete $\lambda = v \cdot T$, ahol $T$ a periódusidő. Ebből látni, hogy a hullámhossz és a terjedési sebesség egymással arányos. Ha ezt a sekély vizet úgy alakítjuk ki a medencében, hogy nem egyenesen vált a közeg, akkor az egyenes helyzeteket megadó fázisok egyenese is módosul, tehát törés is történt. Ilyenkor a hullámok irányát a közegváltási felülethez képest nézzük, hogy mekkora szögben térnek el a normálvektortól. A hullámforrás oldala felőli szög neve beesési szög ($\alpha_b$), az új közeg szöge pedig törési szög ($\alpha_t$).

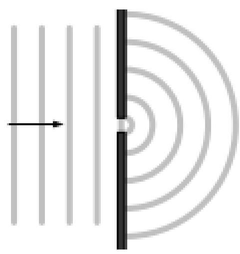


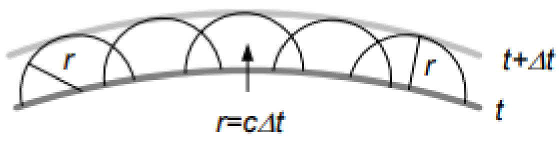




## A Huygens-elv

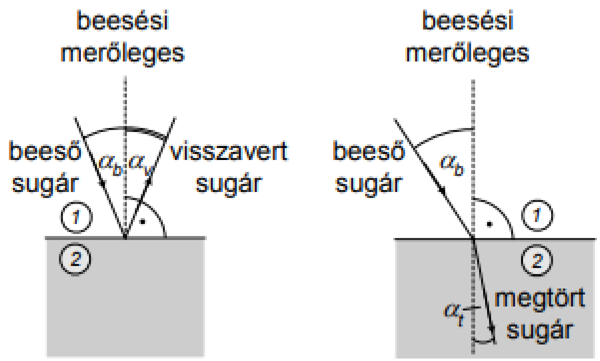
Huygens bizonyította, hogy minden hullám felírható pontszerű hullámok összegeként. Ezt az a kísérlet is bizonyítja, hogy ha vízhullámokat egy résen engedünk át (ábra), akkor a rés túloldalán mintha a résből egy ponthullám indult volna el. A Huygens-elv az, hogy



minden hullámfront (vagyis az egyenlő fázisú pontok halmaza - az ábrákon vastag szürke vonalak) elemi gömbhullámok összességei. Az új hullámfrontot ezeknek a gömböknek a burkolófelülete fogja adni, amit a következő ábra szemléltet:



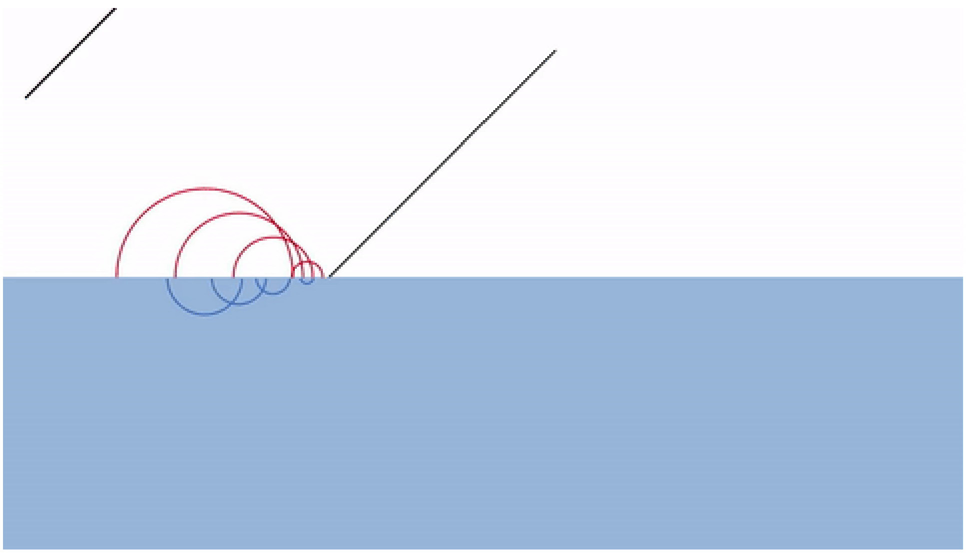

A következő ábra egy pontosabb kép, hogy mi is melyik szögnek/sugárnak számít:




A Huygens-elvből vezették le, hogy a beesési és törési szög kapcsolata:

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

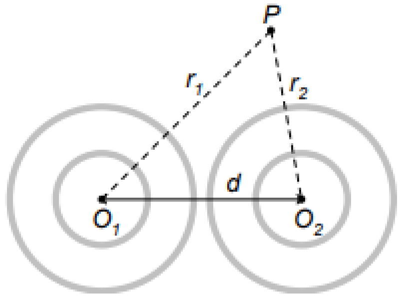
Itt $n_{21}$-et úgy hívjuk, hogy a 2-es közegnek az 1-es közeghez képesti törésmutatója. Hogy ez a képlet hogy állt elő és az elvből miért következik, azt egy GIF szemlélteti nagyon jól:



(ha nem tölt be, válts javaslat módra)

A beérkező hullámfronton új ponthullámok jönnek létre, azok pedig a megváltozott sebesség miatt más hullámfrontot alkotnak.

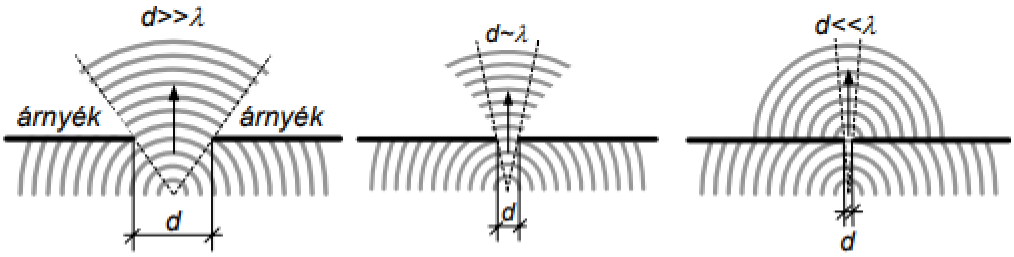
# A hullámok találkozása, interferencia




Ha a tér egy pontján két hullám van jelen, a hatásuk ott valamilyen módon összeadódik. Ezt nevezzük interferenciának. Mivel a szuperpozíció elve érvényes, ezért egyszerűen matematikailag adjuk össze a hullámok függvényeit: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \Psi_2(\mathbf{r}, t)$. Térben az amplitúdók eloszlását interferenciatérképpel mutatjuk meg, ezt mutatja az ábra. Itt például két pontforrást látni, amik síkban körhullámokat okoznak, de ha térről lenne szó, gömbhullámokat hoznának létre. Hogy az ábrán jelölt $P$ pontban megkapjuk az interferenciát, egyszerűen csak helyettesítsük be a jelölt pontforrásokat az összegbe: $\Psi(P, t) = \Psi_1(O_1, t) + \Psi_2(O_2, t)$.

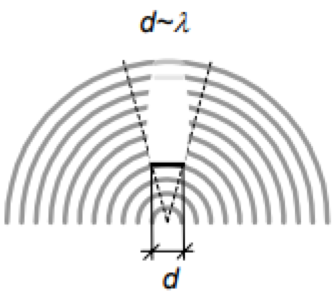
# Hullámelhajlás

Ha egy pontból eredő hullámterjedés útjába rést teszünk, a hullámhossztól függően egy olyan jelenség kerül elő, hogy nagyobb szögben haladnak át a résen, mint a pontforrástól az indokolt lenne, ezt hívjuk hullámelhajlásnak, mert a szélei mintha elhajlanának:




Látható, hogy a legkisebb résnél már olyan, mintha pontforrás lenne a rés. Ezt korábban is beláttuk, mivel valójában minden hullámfront pontforrásokból áll. Nehezebb a magyarázat a középső példára, amikor a rés a hullámhosszal összemérhető. Ekkor egy köztes állapot áll elő a pontforrás és a változatlan továbbterjedés között. Pontosabb mérésekkel bármilyen rés határánál elhajlást figyelhetünk meg, mint az ábrán látható hullámkádas kísérleten. Olyan is előfordul, hogy a hullám útjába tett rés két oldalán "visszakanyarodik", ez látható az alsó ábrán. Ezt elhajlásnak, avagy diffrakciónak hívjuk, az ezekről rajzolt ábrák neve pedig elhajlási- vagy diffrakciós kép.

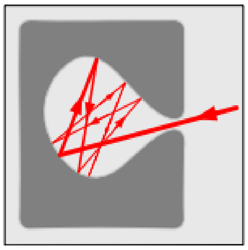
# A Huygens-Fresnel–elv



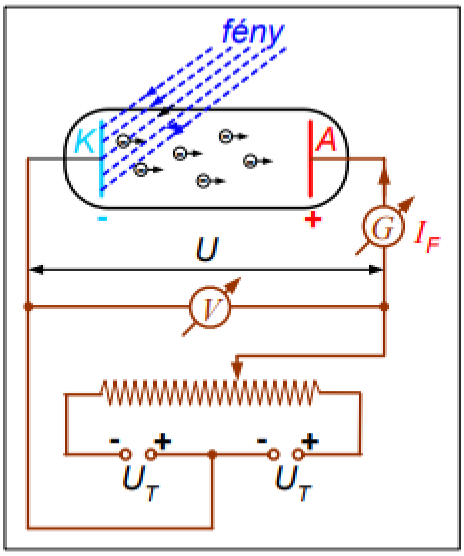

Az elhajlás Huygens-elvvel már nem értelmezhető, mivel az nem veszi figyelembe a hullám intenzitásviszonyait, vagyis az interferenciáit, így azt sem, hogy a hullám az árnyéktérbe behatolhat. A Huygens-Fresnel elv már nem csak azt veszi figyelembe, hogy a hullámfrontok pontokból tevődnek össze, hanem azt is, hogy ezek a hullámok adott pontokon erősíthetik és kiolthatják egymást. Mivel ponthullámok, ezért minden irányban van intenzitásuk, az árnyéktér felé is. Egyszerűen ott is tudjuk számítani a mellette elhaladó végtelen sok pont interferenciáját, amik összeadódva már itt is okozhatnak hullámokat.

# 15. Atomi rendszerek viselkedésének jellegzetességei: foton, diszkrét energiaszintek, részecskék hullámszerű viselkedése. A Schrödinger-egyenlet

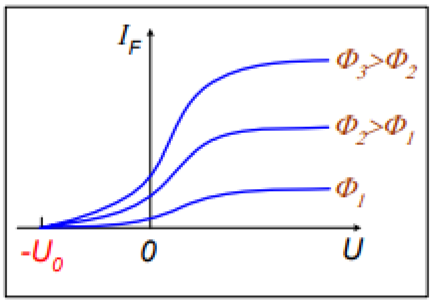
## A foton (fekete test sugárzása, fotoeffektus, Compton-effektus)

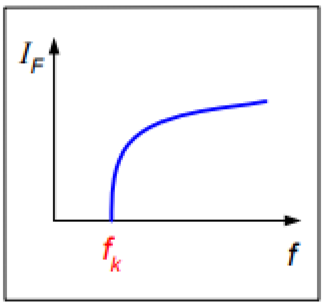


Azt tudták, hogy magasabb hőmérsékletű testek több hőhullámot sugároznak, de ezeknek a mértékét és frekvenciaeloszlását akarták pontosan meghatározni. Ehhez kellett egy jól szabályozható, termikus egyensúlyú test. Ez egy üreg belsejében valósulhat meg, és ott a fal tud sugározni. Itt azért van egyensúly, mert a sugárzott intenzitás a hőmérséklettel nő, az elnyelt sugárzás pedig az intenzitástól függ. Ettől a meleg pontok sugároznak, a hideg pontok pedig a sugárzást elnyelve melegednek, tehát egyensúly lesz. Hogy mérni is lehessen, lyukat vágtak a szélére. Ez nem zavar be nagyon a belső folyamatokba, mert ami sugárzás bejut, az a belső falon úgy verődik össze-vissza, hogy előbb nyelődik el, mint kijutna (ábra). Azért hívjuk fekete testnek, mert a lyuk minden sugárzást elnyel, és amit a lyukon mérünk, az szinte kizárólag a belső, vizsgált folyamatok sugárzása, amit úgy hívunk, hogy a fekete test sugárzása.



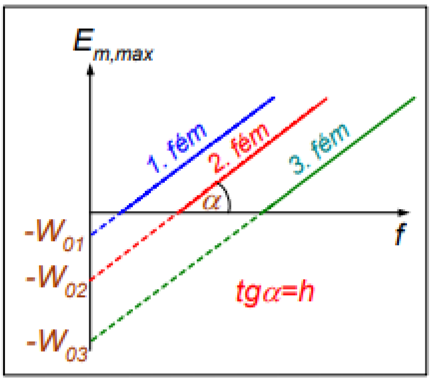

A fotoeffektussal tanulmányozhatjuk, hogy atomos szerkezetű anyaggal hogy viselkedik a sugárzás. Fotoeffektusnak hívjuk azt a jelenséget, amikor fénysugárzás hatására bizonyos anyagok (pl. alkáli fémek) felületéről elektronok lépnek ki. Ehhez egy kísérlet az ábrán látható rendszer, ahol egy fotoeffektust mutató fémlemezt vákuumcsőbe teszünk, a cső másik oldalán pedig egy kivezetéssel ellátott, nem érintkező elektród is van. A negatív töltésű elektródot más rendszerben is katódnak (*K*), a pozitívat anódnak (*A*) hívjuk. A rendszer része még egy érzékeny árammérő (*G*, galvanométer), és egy feszültségmérő (*V*), ami mér egy változtatható *U* feszültséget. Azt vesszük észre, hogy ha közelítőleg monokromatikus (szűk frekvenciasávú) fénnyel világítjuk meg a katódot, akkor *G* a feszültséggel arányos áramot mutat. Ezt úgy értelmezzük, hogy az elektronokat egy $W_0$ kilépési munkával tudjuk kiszakítani a helyükről, ilyenkor haladnak a pozitív töltés felé. Ha az elektron a beeső fénytől $E$ energiát kap, és az nagyobb, annak valahová mennie kell, tehát egyrészt kilöki, másrészt a fennmaradó energiából (ha van) mozgási energia lesz: $E = W_0 + E_m$. A fény hatására létrejött elektront fotoelektronnak, a miattuk létrejövő áramot pedig fotoáramnak nevezik. Az ábrán látszik az áramerősség, ami attól függ, hogy az áramkörön eleve mekkora feszültség volt. Ha növeljük a feszültséget, az rásegít az elektronok mozgására, viszont ha csökkentjük, az fékezi őket, egy



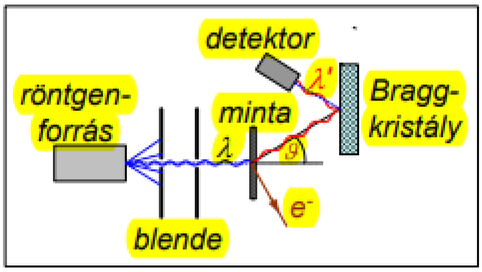



bizonyos negatív $U_0$ feszültség pedig már képes őket teljesen megakadályozni a mozgásban. Ennek a látványossága a besugárzott fény nagyobb intenzitásától ($\Phi$) válik látványosabbá.

A fotoeffektus nem minden jelenségét magyarázza meg a klasszikus fizika: egyrészt az elektronok szinte azonnal kiszakadnak, pedig kiszámolva ez egy napnál is tovább tartana. A fotoeffektus a besugárzott fény frekvenciájának mértéke (ábra), pedig a $W_0$ kilépési munka minden frekvencián lesugározható energia lenne. Az utolsó probléma az alsó ábrán látható. Az $E_{m,max}$ maximális mozgási energia egyenlő az elektromos ellentér munkájával, vagyis $e \cdot U_0$-al, ahol $e$ az elektron töltése. Ha ez a maximális mozgási energia negatív, az elektronok nem tudnak kilépni a katódról, mert nem érik el a kilépési munkát. Ha viszont kilépnek, elvileg nem lineáris függvényt kell kapnunk a frekvencia szerint, viszont többféle fémnél is látjuk, hogy azt kapunk. Ez is egy ellentmondás a klasszikus fizikával.

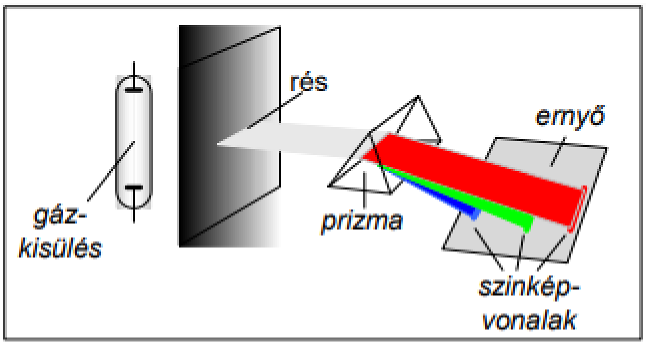



Erre a problémára a magyarázatot Einstein adta, aki leírta, hogy a energia magában a sugárzási térben is jelen van, energiaadagok formájában. Einstein szerint ezek is részecskék, amiknek tömege nincs, de impulzusuk van, ezeket nevezzük ma fotonoknak. Ezeket az energiaadagokat $h \cdot f$ adja meg, ahol $h$ a Planck-állandó, $f$ pedig a frekvencia. Itt már látható, hogy a frekvencia függvényében lineáris az energia, a teljes kilépési képlet pedig: $h \cdot f = W_0 + E_m$. Ez az összes eddig megmagyarázatlan jelenséget leírja.



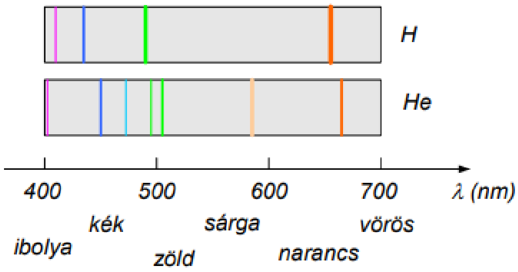

Compton-effektus: ha röntgenhullámok egy mintával úgy ütköznek, hogy kiütnek egy elektront, akkor valamilyen szögben elhajlanak egy új hullámhosszal. Ez a hullámhossz a Bragg-kristályon történt elhajlással határozható meg. Az új hullámhossz a $\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - cos\vartheta)$ képletből számítható ki. Ezt, és a szögfüggést szintén nem magyarázza a klasszikus fizika, de ha a $E = h \cdot f$ energiájú részecskék rugalmas ütközését vesszük alapul, akkor mivel $h$ konstans, az ütközéstől megváltozó energiában csak $f$ módosulhat.

## Színképvonalak és diszkrét atomi energianívók

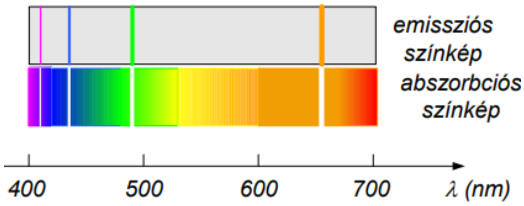



A hőmozgás által keltett hőmérsékleti sugárzás folytonos spektrumú, ami azt jelenti, hogy frekvenciák közt nagy spektrumon folytonosan oszlik el, minden frekvencia kisebb-nagyobb arányban képviselve van. Ez szorosan összefügg a sugárzást kibocsátó anyag szerkezetével: ezek az anyagok sok molekulából vagy erősen kölcsönható atomokból állnak, pl. szilárd anyagok, folyadékok. Gázoknál ez nincs így, gyenge kölcsönhatású atomokból állnak, és ezért másfajta sugárzás is létrejöhet. Ha ezekkel energiát közlünk (például elektromos erőtérrel gázkisülést okozunk), akkor csak a kibocsátó atomtól függő diszkrét $f_1, f_2, f_3$,...

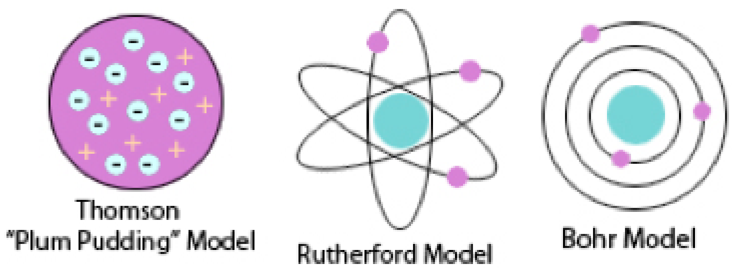
frekvenciákon sugároz. Ezt egy résen keresztül vezessük egy prizmára, ami a különböző hullámhosszú fényt különböző helyekre téríti. Ami így az ernyőn megjelenik, azt hívjuk vonalas színképnek, és az elkülönülő frekvenciák a látható tartományban színek szerint elkülönülnek. Az ábrán a hidrogén és hélium atomok vonalas spektruma látható.



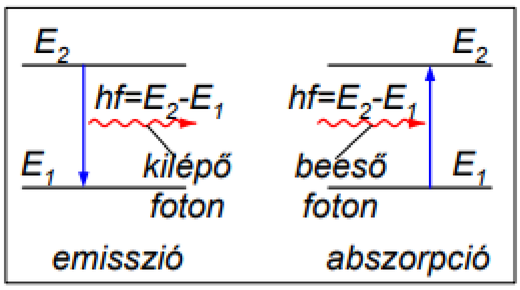

Egy atom azokon a frekvenciákon képes sugárzást elnyelni, amin sugároz. Ezért ha teljes spektrumú fényt vetítünk át rajta, meg fog szűnni azokon a hullámhosszokon, ahol sugároz, ezt hívjuk elnyelési (abszorpciós) színképnek.




## Bohr–modell




Egy atom modelljét folyamatosan finomították. A korai Thomson modellben egy nagy pozitív térben helyezkedtek el a negatív elektronok. Rutherford észrevette, hogy az atomokon a legtöbb sugárzás egyenesen halad át, tehát a belsejének nagy része üres, így az elektronokat a pozitív töltésű mag körül keringve képzelte el. Bohr arra akart magyarázatot adni, hogy a színképvonalakra mi a magyarázat. Arra jutott, hogy egy atom csak adott $E_1, E_2, E_3 ... E_m ... E_n$ energiával rendelkezhet (ami minden atomnál más), és ha az energiaszint lefelé változik, akkor a maradék energiát fotonokként adja le. Ez magyarázatot ad a vonalas színképre a következő képlettel: $E_m - E_n = h \cdot f_{mn}$, ahol $f_{mn}$ a kisugárzott foton frekvenciája, ha $m$ állapotból mentünk $n$ állapotba. Ez érvényes visszafelé is: ha érkezik egy ilyen frekvenciájú foton, amit elnyel, akkor magasabb energiaszintre lép. Ezt a mechanizmust szemlélteti a mellékelt ábra. Ez nem csak arra ad magyarázatot, hogy a színképvonalak diszkrét frekvenciákat mutatnak, hanem arra is, hogy csak adott frekvenciájú fotonokat tud egy atom elnyelni. A képletet frekvenciára rendezve bármely két állapot közti frekvencia megmondható: $f = \frac{E_2 - E_1}{h}$, és az ilyen frekvenciás sugárzásokat tudja az atom elnyelni.




Már csak képlet kell arra, hogy a diszkrét (egymástól elkülönülő) energiaszintek pontos mértékeit meg tudjuk határozni. Bohr a Rutherford-féle modellbe építette be a diszkrét energiákat, de át kellett azt alakítani, mert a jelenlegi formájában nem tudná megmagyarázni ezt a jelenséget. Feltételezte, hogy valamilyen okokból léteznek olyan stacionárius elektronpályák (fix sugarú körök), amiken a keringő elektron nem sugároz. Ezeknek a sugarát úgy határozta meg, hogy az elektron perdülete (impulzusmomentuma, ami a forgási állapotot jellemző mennyiség) csak a $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ érték egész számú többszöröse lehet. A $\hbar$ karaktert úgy hívjuk, hogy “h-vonás”. A perdület képlete $L_n = r \cdot m \cdot v$, ahol $r$ a sugár, $m$ az elektron tömege, $v$ pedig az a sebessége, amivel keringő pályán képes maradni. Bohr szerint ez csak az $L_n = n \cdot \hbar$ értékeket veheti fel, ahol $n$ bármely pozitív egész szám. Azt, hogy csak diszkrét értékeken létezhet, idegen szóval úgy hívjuk, hogy kvantált, ezért ezt az egyenletet Bohr-féle kvantumfeltételnek hívjuk.

## A Schrödinger-egyenlet

Klasszikus állóhullám amplitúdó-eloszlása:

$$\frac{d^2\Psi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\Psi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\Psi(x,y,z)}{dz^2} + k^2(x, y, z) = 0$$

A második deriváltak igazából gyorsulások, $k$ a hullámszám, a nyomás és a perdület hányadosa.

# Mértékegységek

## Mechanika

$t$ - idő [s, szekundum, másodperc]
$s$ - út [m, méter]
**r** - elmozdulás [m]
**v** - sebesség [m/s, méter/szekundum]
**a** - gyorsulás [m/s$^2$, méter/szekundum$^2$]
**F** - erő [N, Newton]
$m$ - tömeg [kg, kilogramm]
$W$ - munka [J, Joule. “zsúl”]
$E$ - energia [J]
$g$ - gravitációs gyorsulás a Föld felszínén
[m/s$^2$, méter/szekundum$^2$]
$h$ - magasság [m]
$M$ - nyomaték, forgatónyomaték
[Nm, Newtonméter]

## Hőtan

$p$ - nyomás [Pa, Pascal]
$V$ - térfogat [m$^3$, köbméter]
$n$ - gáz anyagmennyisége [mol]
$T$ - abszolút hőmérséklet [K, Kelvin]
$Q$ - hőenergia [J]
$U$ - gáz belső energiája [J]
μ - atomtömeg [kg]
$\varepsilon_m$ - molekula kinetikus belső energiája [J]
$c$ - közegbeli sebesség [m/s]
$K$ - hőkapacitás [J/K, Joule/Kelvin]
$c$ - fajhő
[J/(kg*K), Joule/(kilogramm * Kelvin)]

## Elektrosztatika

$q, Q$ - töltés [Coulomb]
ε - permittivitás [F/m, Farad/méter]
**E** - térerősség [V/m, Volt/méter]
$U$ - potenciál, feszültség [V, Volt]
$I$ - áramerősség [A, Amper]
j - áramsűrűség [A/m$^2$, Amper/négyzetméter]
$R$ - ellenállás [Ω, Ohm]
Φ - fluxus [Vs, Voltszekundum]
$A$ - felület [m$^2$, négyzetméter]
$C$ - kapacitás [F, Farád]
$d$ - távolság [m]
$P$ - teljesítmény [W, Watt]

## Magnetosztatika

**B** - mágneses erőtér
[Vs/m$^2$, Voltszekundum/négyzetméter]
μ - permeabilitás
[Vs/Am, Voltszekundum/Amperméter]

## Rezonancia

ω - körfrekvencia [rad/s, radián/másodperc]
φ - fázis [rad, radián]
$x, y, z$ - kitérés [méter]
$D$ - rugóállandó [N/m, Newton/méter]
$n$ - törésmutató [-, ez egy arányszám]
$I$ - intenzitás [W/m$^2$, Watt/négyzetméter]