1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra pótpótZH. 2024-12-09 **Neptun:** __________ **Név:** ______________________________

A dolgozat feladatainak ***csak az eredményeit*** *kell erre az oldalra a keretbe írni, a* ***részletszámításokat*** *a további oldalakra, egyéb papírra ne dolgozzunk.* ***Eredmény mellékszámítás nélkül*** *nem kap pontot. A feladatok megoldásához* ***semmilyen segédeszköz*** *nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma minden kérdésre 1-től 4-ig bármennyi lehet. Ha egy kérdésre minden válasz hibátlan, az 1 pont, 1 hiba esetén 0.5 pont, több hiba esetén 0 pont.

a) Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{s\times r}$, melyre $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = d$. Ekkor

- $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = d$, ☒
- $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$, ☐
- $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = s - d$, ☐
- $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)) = s - d$. ☒

b)

- Azon $\mathbf{x}$ vektorok, melyek az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásai, alteret alkotnak. ☐
- Azon $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer konzisztens, alteret alkotnak. ☒
- A sík eltolása lineáris leképezés, ahol a vektortér vektorait a sík helyvektorainak végpontjai reprezentálják. ☐
- A lineáris $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezések vektorteret alkotnak, ahol $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ azonos $\mathbb{F}$ test fölötti vektorterek. ☒

c) Legyen $\mathbf{A}$ valós, $\mathbf{C}$ komplex négyzetes mátrix.

- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor unitéren hasonló egy valós diagonális mátrixhoz. ☒
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor unitéren hasonló egy tiszta imaginárius számokból álló diagonális mátrixhoz. ☒
- Ha $\mathbf{C}$ önadjungált, akkor ortogonálisan hasonló egy valós diagonális mátrixhoz. ☐
- Ha $\mathbf{C}$ unitér, akkor hasonló egy olyan diagonális mátrixhoz, melyben a diagonális elemek abszolút értéke 1. ☒

d) A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei -1, 0, 1, 2, a szimmetrikus $\mathbf{B}$ mátrix sajátértékei -1, 0, 1, 1.

- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak és kongruensek. ☐
- Mindkét mátrix tehetetlensége $(2, 1, 1)$. ☒
- Van olyan q kvadratikus alak, és két olyan bázis, hogy q mátrixa az egyikben $\mathbf{A}$, a másikban $\mathbf{B}$. ☒
- Ha két valós szimmetrikus mátrix hasonló, akkor biztosan kongruensek is. ☒

2. *(4 pont)* Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes optimális megoldását, majd adjuk meg ezeket a legkisebb abszolút értékű optimális megoldással is!

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} t$	$\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} t$

3. *(3+1 pont)* *(a)* Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a $\mathbf{P}$ mátrixát, mely egy tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli vektorhoz az $x - y + z = 0$ egyenletű sík mentén az x-tengelyre eső vetületének 2-szeresét rendeli. *(b)* Mi e mátrix alakja az $\{(1, 2, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ bázisban? (ez fejben számolva is megkapható egyetlen lépésben!)

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\mathrm{diag}((0, 0, 2))$

4. *(4 pont)* Határozzuk meg a $\frac{4}{3}x$ polinom merőleges vetületét a $\mathrm{span}(1, x^2) \le \mathbb{R}[x]$ altérére, ha az $\mathbb{R}[x]$ térben

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 pq$$

a skaláris szorzás!

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{4} + \frac{5}{4}x^2$$

5. *(4 pont)* Adjuk meg a következő egyenletrendszer megoldását az együtthatómátrix PLU-felbontásának segítségével! Az első keretbe a PLU-felbontást, a másodikba a két egyenletrendszer megoldásvektorát írjuk (a második megoldásvektor egyúttal az eredeti egyenletrendszer megoldása)!

$$\begin{cases} \quad y + z = 3 \\ x + z = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$$

1.mo:	$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$
2.mo:	$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$