

1. Zárthelyi A2 2008 tavasz

1. Legyen $\mathcal{L} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$. Mutassa meg, hogy \mathcal{L} altér és határozza meg egy bázisát!

2. Mely a és b valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla, b) egy, c) végtelen sok megoldása? ✓

$$-2x + y - z = 2$$

$$2x + 2y + 2z = -2$$

$$-x - y + az = b$$

3. Legyen $\underline{\underline{A}}(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Az alábbiakban a transzponáltat jelöljük *-gal.)

(a) Határozza meg, hogy mely a -kra lesz $\det \underline{\underline{A}}(a) = 0$ ✓

(b) Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát: $\underline{\underline{A}}(0) \cdot \underline{\underline{A}}(4)$, $(\underline{\underline{A}}(4))^{-1}$, $(\underline{\underline{A}}(4))^*$ ✓

4. Jelölje tetszőleges L lineáris tér esetén $\mathcal{L}(L \rightarrow L)$ az L -ből L -be képező lineáris operátorok lineáris terét. Mutassa meg, hogy van olyan L és

(a) $A, B \in \mathcal{L}(L \rightarrow L)$, hogy $AB \neq BA$, ✓

(b) $A, B \in \mathcal{L}(L \rightarrow L)$, hogy $(AB)^2 \neq A^2B^2$. ✓

(c) $A, B \in \mathcal{L}(L \rightarrow L)$, hogy A, B invertálhatóak, de $A + B \neq 0$ nem invertálható. ✓

5. Legyen az A operátor az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ síkra való vetítés a háromdimenziós térben. Legyen $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$. Határozza meg az A^{100} operátor mátrixát az (i, j, k) bázisban valamint a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! ✓

6. Melyik igaz minden véges dimenziós lineáris téren, melyik nem?

(a) Minden lineárisan független rendszerből kiválasztható generátorrendszer

(b) Bármely lineárisan független rendszer elemszáma nem nagyobb mint bármely generátorrendszer elemszáma

(c) Tetszőleges háromdimenziós sík esetén a háromdimenziós vektorok lineáris terének alterét alkotják azon vektorok, melyek végpontja ebbe a síkba esik

(d) Invertálható lineáris operátorok szorzata is invertálható

(e) Egy lineáris operátor pontosan akkor invertálható ha a magtere az üres halmaz.

(f) Legyen A az L véges dimenziós lineáris teret önmagába képező lineáris operátor. Az $Ax = b$ egyenletnek pontosan akkor van minden $b \in L$ esetén megoldása, ha ez minden esetben egyértelmű.