A1 gyakorlat, 2005-2006/1., 4. hét

Az $(1+1/n)^n$ sorozattal kapcsolatos feladatok

1. Ha 100 Ft évi 6%-kal kamatozik, az év végére nyilván 106 Ft lesz. Jobban járunk, ha minden negyedév végén az időarányosan elért kamatot hozzáadjuk a betett összeghez, tehát a nyereség is tovább kamatozik. Így mennyi pénzünk lesz az év végére? ($100\ \mathrm{Ft}\cdot\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4 \approx 106.136\ \mathrm{Ft}$) Mennyi pénzünk lesz, ha havonta, ill. naponta lehet visszaforgatni a nyereséget? Feltéve, hogy akár másodpercenként vagy még gyakrabban lehet visszaforgatni a nyereséget, meddig lehet fokozni az év végi össznyereséget? ($100\ \mathrm{Ft}\cdot e^{0.06} = 106.1836\ldots\mathrm{Ft}$) Mutassuk meg, hogy a nyereség nő, ha sűrűbben forgatunk vissza!

2. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$a)\ \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{2n-1},\qquad b)\ \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{6n-2},\qquad c)\ \left(\frac{3n-2}{3n+2}\right)^{2n},$$
$$d)\ \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{n+1},\qquad e)\ \left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)^{n+8},\qquad f)\ \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n},$$
$$g)\ \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n},\qquad h)\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Rekurzív sorozatok

1. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$ Mutassuk meg, hogy $a_n > 2$, és a_n csökkenő! (Pl. $(a_{n+2} - a_{n+1})$ kifejezhető $(a_{n+1} - a_n)$-el.) Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 2$.

2. $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $n \geq 1$. Adjunk képletet x_n-re!

3. $x_1 = \cos 1$, $x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\}$. Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens! Nehezebb, a jó hallgatók próbálják belátni, hogy $x_n \to 1$.

Függvényhatárérték; ε-hoz δ keresés

1. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$ -nál $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta(\varepsilon) = ?$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-3}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$ -nél $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta(\varepsilon) = ?$, általános ε-ra $\delta(\varepsilon) = ?$

stb...