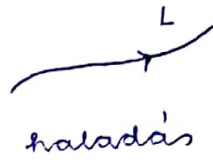
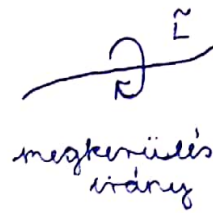


1.)

GÖRBE

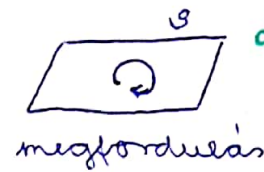


haladási

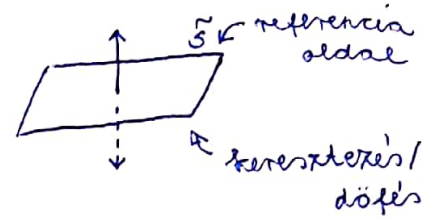


megkerülés
irány

FELÜLET

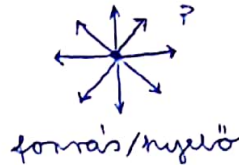


megfordulás

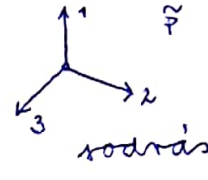


referencia
oldal
keresztelés/
dőlés

PONT

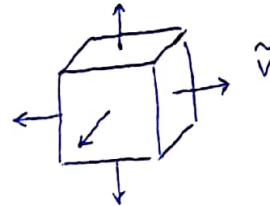
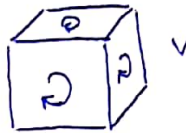


forrás/helyő

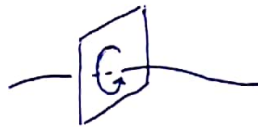


rodrás

TÉRFOGA



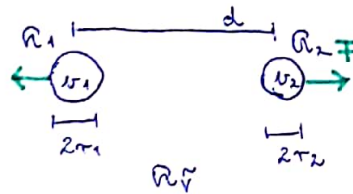
dualitáspélda:



külső irányítású görbe
belső irányítású felület

FORRÁSOK:

TÖLTÉS



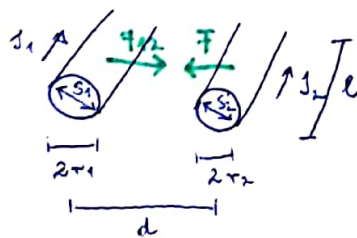
Coulomb - törvény: $r_1, r_2 \ll d$

$$F = k_e \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$$

$\Downarrow$
a töltések
pontszerűek

$$Q = \int \rho dV$$

ÁRAM



Ampère - törvény: $r_1, r_2 \ll d \ll l$

$$F_2 = \mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2}{d} \cdot l$$

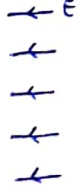
$$I_1 = \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}_1$$

$$I_2 = \int \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}_2$$

} külső irányítású
felület

TÉRJELEMLŐK: intenzitások, fluxusok

ELEKTROMOTOROS ERŐ (EMF ~ feszültség)



$$U_L = \frac{W_L}{Q} [V]$$

an előjele a munkatétel függ

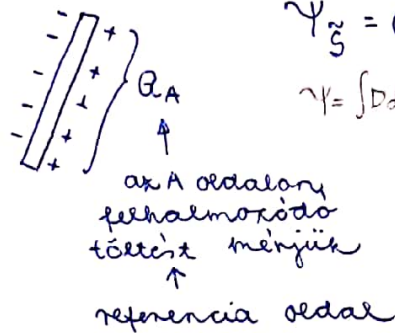
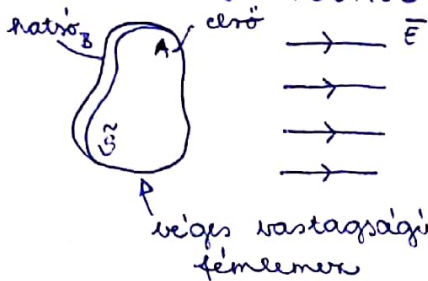
áramlási iránytól függ $\rightarrow$ belső irányítású

l görbe mentén
 Q töltést mozgatunk

felt mutatja elektródák
közötti potenciálkülönbség

ha a mágneses tér változik, akkor ez a fiz.
az elektromos tér ellenében
végzett munka

ELEKTROMOS FLUXUS



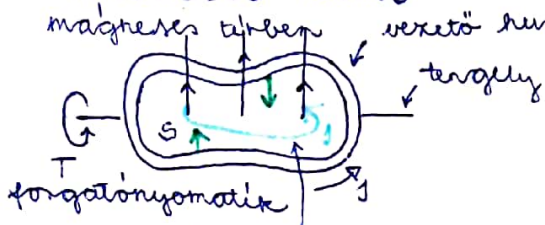
$$\Psi_{\tilde{S}} = Q_A [As]$$

$$\Psi = \int D dS$$

az előjele attól függ,
hogy melyik a referencia
oldal

↓
külső irányítású
felület kell

MÁGNESES FLUXUS



vezető hurok, amelyben áram folyik

T_{max} : max forgatónyomaték kell

$$\Phi = \int B dS$$

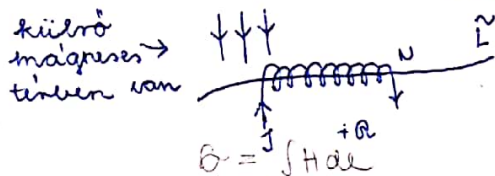
$$\Phi = \frac{T_{max}}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_{max}}\right)^2} [Vs]$$

↑
az előjele a nyomaték és áram
irányától függ

az áram iránya megkeletkező
a felület irányának

csak akkor jó az eredmény,
ha a mágneses tér homogén

MAGNETOMOTOROS ERŐ (MMF) ← görbe köré köré tekerésel
mágneses térben



addig növeljük az áramot, amíg a
görbenek nem lesz a tényleg párhuzamos
komponense.

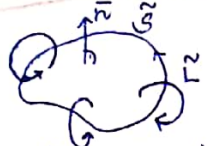
$$\Theta_{\tilde{L}} = \sum_k N_k I_k [A] \leftarrow \text{még} \leftarrow \text{külső irányítású a görbe, ezért a tekercsben} \leftarrow \text{folyik az áram}$$

(a mágneses térnek nincs a görbével párhuzamos
komponense)

MENNYISÉG	OBJEKTUM	HERTÉKEGYSÉG
Q	$\tilde{V}$	As
I	$\tilde{S}$	A
u	L	V
γ	$\tilde{S}$	As
Φ	S	Vs
Θ	$\tilde{L}$	A

MAXWELL - EGYENLETEK:

AMPERE GERJESZTESI TORVENY



$$\oint_L \vec{L}(\vec{s}) = \int_S + \frac{d}{dt} \Psi_S$$

külső irányítású nyitott felületre
azt azaz azaz külső irányítású görbére

FARADAY INDUKCIÓS TORVENY

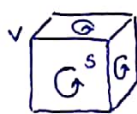
$$\Phi_S = \int_S \vec{E} d\vec{A}$$



$$U_{L(S)} = - \frac{d}{dt} \Phi_S$$

külső irányítású nyitott felületre
azt azaz azaz külső irányítású görbére

MAXWELL - THOMSON

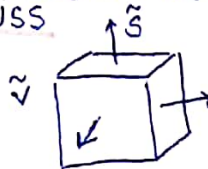


$$\Phi_{S(V)} = 0$$

zárth felületre
a mágneses fluxus
zérus

monopólus ← mivel mágneses töltések
nem léteznek

GAUSS



$$\Psi_S(\vec{v}) = Q \vec{v}$$

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{A} = \sum \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

külső irányítású térfogat
peremfelület külső irányítású

zárth görben mint magnetomo-
toros erő megfigyelt az általa
kifejtett felületen áthaladó
és eltolási áram összehív

↓
az elektronos fluxus
váltakozási gyorsasága

vagy zárth görben mint elektro-
toros erő megfigyelt az általa
kifejtett felületen áthaladó
mágneses fluxus idő szerinti
deriválójának minusz egyenesével

↓
m. fluxus konst. indukció

↓
Lorentz: zárth körben indukált
ter. iránya olyan, hogy az
általát képezett áram mágneses
ter a fluxusváltozás, vagyis
az indukció ellen hat

bármely zárth felület fluxusa
a térfogatban foglalt töltésével
egyesül meg

2.) Vektoranalitikus alak

- 3D irányított euklideszi tér
- koordinárendszer, origó, helyvektor
- mennyiségek:
 - skalar: $u(x, y, z) = u(\vec{r})$
 - vektor: $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(\vec{r})$

skalármennyiség:

$$\vec{r} \mapsto u(\vec{r})$$

Euklideszi tér bármely pontjához skalárt rendel.

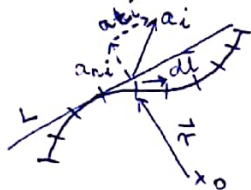
↓
minden ponthoz

vektormennyiség:

$$\vec{r} \mapsto \vec{v}(\vec{r})$$

Euklideszi tér bármely pontjához vektort rendel.

VONALMENTI INTEGRÁL:



a vektort felbontjuk tangenciális és normális komponensekre

$$\Delta \vec{l}_i = \frac{\vec{a}_i}{|\vec{a}_i|} \Delta l_i$$

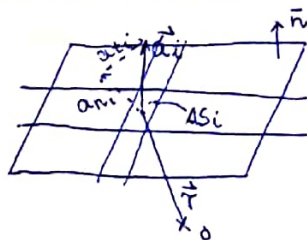
$$\sum_{i=1}^n \vec{a}(\vec{r}_i) \Delta \vec{l}_i = \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \Delta l_i$$

$$\left[\lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{|\vec{a}_i|}_{\vec{a}_i} \Delta l_i \approx \int_L \vec{a} d\vec{l} \right]$$

a vonal mentén összeadjuk a vektorokat

ha L ívelt: $\oint$: örvényerősség

FELÜLETI INTEGRÁL:



$$\sum_{i=1}^n \vec{a}(\vec{r}_i) \Delta \vec{S}_i$$

$$\Delta \vec{S}_i = \frac{\vec{a}_{ni}}{|\vec{a}_{ni}|} \Delta S_i$$

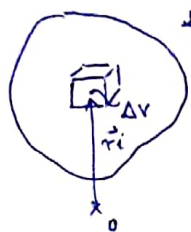
$$= \sum_{i=1}^n \vec{a}_{ni} \Delta S_i$$

$$\left[\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{a}_{ni}}_{\vec{a}_i} \Delta S_i = \int_S \vec{a} d\vec{S} \right]$$

a felületen összeadjuk a vektorokat

ha S ívelt: $\oint_S$: forgásérősség

TÉRTOGATINTEGRÁL *



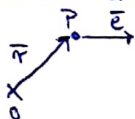
$$\phi(\vec{r}_i) \int_V \phi dV = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \phi(\vec{r}_i) \Delta V_i$$

ha $\vec{r}_i(t, \rho, \varphi) \longrightarrow \int_V \phi dV = \iiint_V \phi(t, \rho, \varphi) dV$

skalármező

DIFFERENCIÁLOPERÁTOROK:

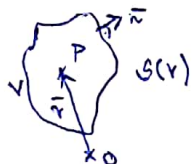
SKALÁRMEZŐ GRADIENSE



$$\text{grad } u(\vec{r}) \vec{e} = \frac{\partial u}{\partial l} \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\vec{r} + h\vec{e}) - u(\vec{r})}{h}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{grad } u(\vec{r}) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{navia operátor: } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{array} \right] \text{grad } u(\vec{r}) = \nabla u$$

VEKTORMEZŐ DIVERGENCIÁJA:



$$\lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \oint_S \vec{a}(\vec{r}) d\vec{s} = \text{div } \vec{a}(\vec{r})$$

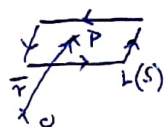
$P \in V$

formálisúsgát ad meg:

$$\left[\text{div } (\vec{a}(\vec{r})) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}(\vec{r}) \right]$$

a Jacobi - mátrix főátlós elemeinek összege

VEKTORMEZŐ ROTÁCIÓJA:



$$\left[\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{r} = \lim_{|L| \rightarrow 0} \frac{1}{|L|} \oint_L \vec{a} d\vec{l} \right]$$

$P \in S$

egyre kisebb görbék mentén integrálunk
↓
így megszorítjuk 1 pontra

$$\left[\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \vec{e}_y \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \right]$$

MÁSODRENDŰ DIFF. OPERÁTOROK

SKALÁRIS LAPLACE

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad}(u)) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

másodrendű parciális deriváltak összege

VEKTORIÁLIS LAPLACE

$$\Delta \vec{a}(\vec{r}) = \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{a}))$$

$$\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{e}_x + \Delta a_y \vec{e}_y + \Delta a_z \vec{e}_z$$

TÉTELEK ← INTEGRÁLTÉTELEK

HELMHOLTZ:

vármely vektormező felbontható örvény és forrásmentes vektormezők összegére

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_d$$

$\uparrow$
 $\text{div } \vec{a}_r = 0$

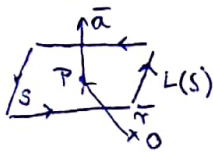
$\leftarrow \text{rot } \vec{a}_d = 0$

NEWTON-LEIBNITZ:



$$\int_L \text{grad}(u) = u(B) - u(A)$$

STOKES:



$$\int_S \text{rot}(\vec{a}) d\vec{s} = \int_L \vec{a} d\vec{l}$$

GAUSS:



$$\int_V \text{div}(\vec{a}) dV = \int_S \vec{a} d\vec{s}$$

KÖVETKEZMÉNYEK, AZONOSSÁGOK: *

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(u) &= 0 \rightarrow \text{Stokes} \oplus \text{N.L.} \rightarrow \text{skalár mező örvénymentes} \\ \text{div rot}(\vec{a}) &= 0 \rightarrow \text{Stokes} \oplus \text{G.} \rightarrow \text{vektormező forrásmentes} \\ \text{div}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{a}_2 \cdot \text{rot } \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \cdot \text{rot } \vec{a}_2 \\ \text{div}(a \text{ grad } b) &= \text{grad}(a) \text{ grad}(b) + a \text{ div}(\text{grad}(b)) \end{aligned}$$

MAXWELL

INTEGRÁLIS

$$\oint_{L(s)} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\oint_{L(s)} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}$$

$$\oint_{S(V)} \vec{B} d\vec{s} = 0$$

$$\oint_{S(V)} \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV$$

levezetés: $\oint \vec{D} d\vec{s} \stackrel{G}{=} \int \text{div } \vec{D} dV = \int \rho dV \Rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho \rightarrow \text{teljes egész } V\text{-re } \int \text{elhagyható}$

DIFFERENCIÁLIS

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho$$

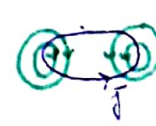
az áram örvényes
elektromos terekké



örvényes elek-
tromos mező
keltetve



mágneses
terek
nincsenek
forrásai



elektromos
ter forrásai
a pozitív
töltések



FÖKKRÁSOK

töltés: $Q_V = \pm \int_V \rho \, dV$ $\rho = \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \frac{Q_{\Delta V}}{|\Delta V|}$

áram: $I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$

TÉRVEKTOROK

potenciál: $U_L = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$

elektromos fluxus: $\Psi_E = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$ $\vec{D} \left[\frac{As}{m^2} \right]$
 $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

mágneses fluxus: $\Phi_B = \int_{S \rightarrow \vec{s}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ $\vec{B} \left[\frac{Vs}{m^2} \right]$

magnetomotoros erő: $\Theta_L = \int_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$ $\vec{H} \left[\frac{A}{m} \right]$
 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \mu_0 \vec{M})$

intenzitás
vektor
 $\vec{E}, \vec{B}$

gerjesztés
vektorok
 $\vec{D}, \vec{H}$

↓
a mérő az anyagban az intenzitásvektorokra,
mint gerjesztésre adott választást adja

az elektromos térerősség az a
vektor, amelynek a
potenciál integrálisa az
adott görbe elektromotoros
erője adja $E \left[\frac{V}{m} \right]$

mágneses
vektor

3.) MIKROSZKÓPIKUS EM. MODELL

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_a + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_a}{\epsilon_0}$$

$a(au)$: áramerősség

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ fény vákuumbeli sebessége

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ permeabilitás
 $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{As}{Vm}$ permittivitás } vákuum

Lorentz - erő differenciális alakja: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ← így zárta lehet a modell

erősűrűség: $\vec{F} = \rho_a \vec{E} + \vec{j}_a \times \vec{B}$

energiasűrűség: $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$

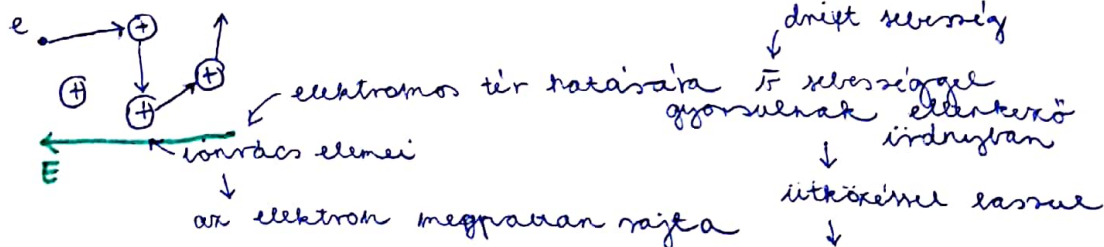
MAKROSZKÓPIKUS MODELL

konvenció áram: $\vec{j}_v = q \vec{v}$ ← mozgási sebesség
 ↓
 szabad töltések dinamika

↑
 töltéshordozó kényszer

vezetési áramok:

FÉMEK: Drude - modell



$\frac{1}{\sigma}$: áramsűrűség

differenciális Ohm-törvény: $\vec{j}_v = \sigma [\vec{E} + \vec{E}_c] + \vec{j}_c$
 vezetési áram

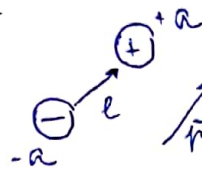
↑
 fajlagos vezetőképesség
 $\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_e}$

két ütközés közötti átlagos idő ← relaxációs idő

FÉLVEZETŐK: $\sigma = n \cdot e \mu_n + p \cdot e \mu_p$
 ↑ ↑
 negatív pozitív

DIELEKTRIKUM

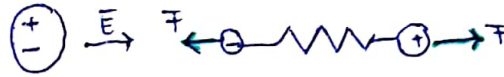
dipólus:



egyforma szeparált töltés egymástól
kicsi l távolságra

[dipólusmomentum vektor: $p = ql$

polarizáció: • apoláris anyagokban semleges atomok, amik
 E hatására elmozdulnak



• poláris anyag dipólus:



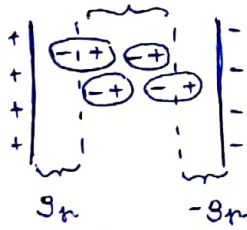
[polarizációs vektor: $\bar{P} = \frac{d\bar{p}}{dV}$ ← dipólusmomentum
teljesítmény sűrűsége

[eltolásvektor: $\bar{D} \triangleq \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$

polarizációs töltés:



← tegyük fel, hogy
kondenzátor



$$\sigma_a = \sigma_f + \sigma_p$$

all free polarizációs

$$\text{beátható: } \sigma_p = -\text{div } \bar{P}$$

az anyag két felén
töltésmennyiség

$$\text{Gauss tétel: } \text{div } \bar{E} = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_f + \sigma_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_f - \text{div } \bar{P})$$

$$\epsilon_0 \text{div } \bar{E} + \text{div } \bar{P} = \sigma_f$$

$$\text{div } (\underbrace{\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}}_{\bar{D}}) = \sigma_f \rightarrow \text{csak a szabad töltéseket kell figyelembe venni}$$

permittivitás:

$$\text{def: lineáris közeg: } \bar{P} \sim \bar{E} \rightarrow \bar{P} = \epsilon_0 \chi \bar{E}$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{E} \epsilon_0 \chi = \epsilon_0 (1 + \chi) \bar{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} = \epsilon \bar{E}$$

ϵ_r : relatív permittivitás / dielektrikus állandó

MÁGNESES TULAJDONSÁGOK

mágneses dipólus momentum: m



$$m = I \cdot A$$

mágneses:

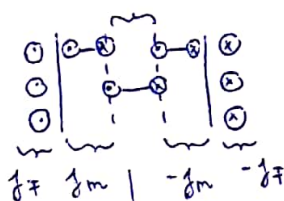
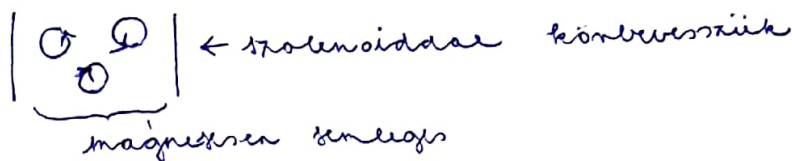


B : mágneses indukció

mágnesességi vektor: $\vec{M} \triangleq \frac{d\vec{m}}{dV}$

mágneses térerősségi vektor: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

mágneses áramok:



erősítő áram
mágneses áramerősség

$$\vec{J}_a = \underbrace{\vec{J}_f + \vec{J}_c}_{\vec{J}_f} + \vec{J}_p + \vec{J}_m$$

polarizációs áram: $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

előjele: $\vec{J}_m = -\text{rot } \vec{M}$

gerjesztési törvény: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_a + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \text{rot } \vec{M} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} =$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

permeabilitás:

lineáris közeg $\rightarrow \vec{M} \sim \vec{H} \rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}$

↑ mágneses susceptibilitás

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

↑ relatív permeabilitás

ÖSSZETÖRLALÁS

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

konstitúciós egyenletek

$\vec{E}, \vec{B}$: intenzitásvektorok

$\vec{H}, \vec{D}$: gerjesztett vektorok

ϵ, μ, σ : anyagjellemzők

KÖZEGOSZTÁLYOZÁS

$$(\vec{E}, \vec{B}) \sim (\vec{D}, \vec{H}, \vec{J})$$

1. homogenitás alapján: $\vec{D}(x, y, z) = \epsilon(x, y, z) \vec{E}(x, y, z)$

↑
ha ϵ konstans, akkor homogén
ha függ a helytől: inhomogén

2. anizotropia: irányfüggőség

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$$

↑ tenzor: 3×3

$$D_i = \sum_k \epsilon_{ik} E_k \quad i, k = x, y, z$$

3. hisztérezis: ~ memória

pl. vas $\vec{B}(t) = \Phi(\vec{H}(t); \tau \in [-\infty, t])$

$$\vec{B}(t) = \int_{-\infty}^t \vec{H}(\tau) M(t-\tau) d\tau \quad \text{lineáris}$$

4. nemlineáris közeg:

$$\vec{D} \neq \epsilon \vec{E} \quad \text{v.} \quad \vec{B} \neq \mu \vec{H} \quad \text{v.} \quad \vec{J} \neq \sigma \vec{E}$$

vas fűvezető

5. aktív közeg:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_{bc} \Rightarrow \vec{E} = 0 \quad \text{és} \quad \vec{J} \neq 0$$

$$\vec{E} \neq 0 \quad \text{és} \quad \vec{D} = 0 \quad \text{elektronit}$$

$$\vec{B} \neq 0 \quad \text{és} \quad \vec{H} = 0 \quad \text{állandó mágnes}$$

6. frekvenciafüggés:

$$(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z) \sim (\vec{D}_x, \vec{D}_y, \vec{D}_z) \quad \leftarrow \text{komplex értékek}$$

$$\text{komplex permittivitás: } \vec{\epsilon} \vec{E} = \vec{D}$$

$$\vec{\epsilon} = \epsilon' + \epsilon'' j$$

↑
valós képzetes

7. mozgó közeg: indukciós jelesek

8. dielektrón közeg:

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} + \vec{\xi} \vec{H}$$

$$\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H} + \vec{\zeta} \vec{E}$$

9. nemlokális konstitúciós egyenletek

szupravezetés

10. metamanyag

4.) töltésmegmaradás:



$$Q = \int_V \rho dV : \text{térbeli töltésmennyiség}$$

$$\text{kiszármag áram: } I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

pozitív áram kifelé mutat, és ha kifelé folyik, akkor a burt lévő töltés csökken

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

integrálba kifelé áram integrálás alatt

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$0 = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

Gauss

$$\int_V \text{div } \vec{j} dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV$$

$= 0$
folytonossági egyenlet

$$\text{más út: } \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \leftarrow \text{Maxwell 1.}$$

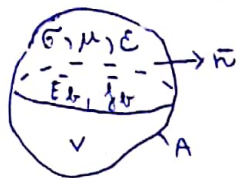
$$\underbrace{\text{div rot } \vec{H}}_0 = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{div } \vec{D}}_\rho$$

$$0 = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

• az ellátási és vezetéki áramok összegezés

• a nettó átvitt áram ellentart a felhalmozódó töltésmennyiség

5, energiamegmaradás:



$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma (\vec{E} + \vec{E}_0) + \vec{J}_v \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \rightarrow \text{lineáris} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \rightarrow \text{izotróp} \end{aligned}$$

lineáris izotróp közeg

energiatranszmisszió EM térben

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$W = \int_V w dV$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dV$$

energiatranszmisszió?

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) &= \frac{1}{2} \left[\epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = \\ &= \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}$$

kölcsönhatás

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{H} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} &= -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{J})}_{\substack{\text{teljesítménysűrűség} \\ \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{J}_0 \cdot \vec{E}_0}} \\ &= \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{J^2}{\sigma} - \vec{E}_0 \cdot \vec{J} - \frac{J_0}{\sigma} \cdot \vec{J} \quad \int_V dV$$

joule hő: $\frac{1}{\sigma} J^2$
külső erők munkája
 $\vec{E}_0 \cdot \vec{J}$

ENERGIAMÉRLEG:

$$-\frac{dW}{dt} = \underbrace{\oint_A \vec{E} \times \vec{H} dA}_{\substack{\text{EM térben tárolt} \\ \text{energia változása}}} + \underbrace{\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV}_{\substack{\text{fűtési-hő} \\ \sim R J^2}} - \underbrace{\int_V \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{J} + \frac{J_0}{\sigma} \cdot \vec{J} \right) dV}_{\text{külső hatások}}$$

EM térben tárolt energia változása

fűtési-hő
elektromágneses teljesítmény

fűtési-hő
 $\sim R J^2$

egységnyi idő
egységnyi térfogat } mennyi energia alakul át hővé

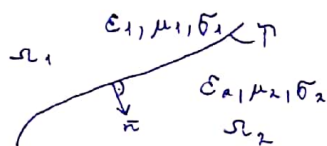
teljesítmény
energia

Poynting - vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$

energia áramlasi áramlási iránya

$$P_{\text{eng}} = \oint_A \vec{S} d\vec{A}$$

6.) KÖZEGHATÁROK



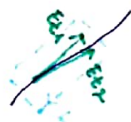
Folytonossági egyenletek alya, hogy anyaghatáron is kvantálható legyen a Maxwell-differenciális alak.

ϵ_1, ϵ_2 : PDE (parciális diff. egyenlet)

1. $\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$ ← tangenciális komponensek ⇒ folytonos a közeghatáron

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_A -\frac{\partial \Phi}{\partial t} d\vec{A}$$

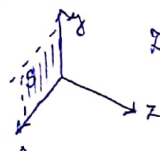
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0$$



TÖLTÉS
TÉRERŐSÉG
VONALAI

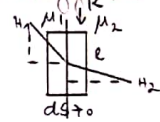
$$E_{1t}l + E_{1n}dS - E_{2t}l - E_{2n}dS = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS \cdot l$$

2. $(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_s$ ← ha felületi áram van jelen a határon, akkor nem folytonos a mágneses térerősség



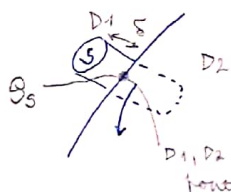
$$H_{y2} - H_{y1} = j_{sx}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I_{\text{áram}}$$



ha a körök elég kicsik, akkor az azonosítást megtehetjük az $H_{1t}l + H_{1n}dS - H_{2t}l - H_{2n}dS = K l$

3. $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho_s$ → D normális komponense ugorkál a közeghatáron, ha azon ρ_s van jelen

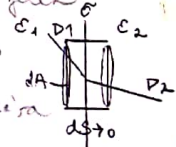


V: Gauss

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum Q$$

ΔS legyen kicsi, hogy a tér változatra elhanyagolható legyen

$$D_{1n}dA + D_{1t}dS - D_{2n}dA - D_{2t}dS = \rho_s dA$$



csak a vezető felületén van

VEZETŐ FELÜLETÉN ρ_s VAN
vélhetően $\rho_s = 0, E = 0$

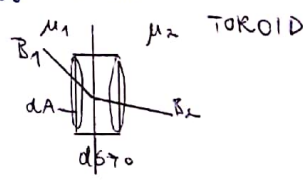
4. $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$

mindig folytonos a mágneses térerősség az anyaghatáron

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$B_{1t}dS + B_{1n}dA - B_{2t}dS - B_{2n}dA = 0$$

$$B_2 = B_1$$



7.) BEKÜLTATOTT MEZŐK

Valamilyen nem EM mezők termel

DIFERENCIÁLIS

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i)$$

pl. áramok

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i)$$

pl. Van

7.) BEIKTATOTT MEZŐK SZEREPE

Valamilyen nem EM hatást EM környezetben az EM mezők terminológiájával szeretnék hívni.

DIFFERENCIÁLIS OHM-TV: töltésmozgató hatások

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{ee}) \leftarrow \text{ha arányos a } \sigma\text{-val}$$

DSRÉF
CAI

pl. akkumulátorban töltéshévíváráskor
~~az~~ egy kémiai munkavégzés, de töltést mozgat

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{ee}) + \vec{j}_{ee} \leftarrow \text{ha nem arányos } \sigma\text{-val}$$

pl. Van den Graaf generátorban a szigetelőszalag
felvonása szállítja a töltéseket, ami egy
mechanikai hatás

áram

↑
csak a vezető
felületén van

2

VEZETŐ FELÜLETÉN VAN
vezetőn kívül $\rho=0, E=0$

D

8.) ELEKTRODINAMIKA FELBONTÁSA

MAXWELL:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \text{áram és átváltozási áram is mágneses teret hoz létre}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{időben változó mágneses indukció villamos teret hoz létre}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{indukcióvektor forrásmentes}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \rightarrow \text{villamos tér forrásai a töltések}$$

ELEKTROSZTIKA : nyugvó töltés tere

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{j} \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right\} \text{Maxwell}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \leftarrow \text{konstitúciós egyenlet}$$

pl. nagyfeszültségű szigetelési technika; nyugvó töltések tere

MAGNEFOSZTIKA

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{j} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \text{Maxwell}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \leftarrow \text{konst.}$$

pl. permanens mágneses villamos gép, permanens mágnesek tere

STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TER

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{j} \neq 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{mágneses tér függ az elektromostól} \\ \text{állandó áramok} \end{array}$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \leftarrow \text{Maxwell}$$

$$\text{div } \vec{j} = 0 \leftarrow \text{folytonosság} \rightarrow \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ve}}) + \vec{j}_{\text{ve}} \leftarrow \text{konst.}$$

pl. földelés, orvosi mérőszközök, ellenáramszámítás

$$\epsilon, \mu, \sigma = \text{konst}$$

$$\text{homogén: } \vec{E}_{\text{ve}}, \vec{j}_{\text{ve}} = 0$$

STACIONÁRIUS ÁRAMOK MÁGNESES TÉRÉ

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{j} \neq 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

pl. villamos gépek, villamosenergia
induktivitás, egyenáramú villamosgépek

KUÁZISTACIONÁRIUS TÉR

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0 \quad \vec{j} \neq 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \right\} \text{konstitúciós}$$

pl. trafó primer tekercsében időben változó áram folyik,
akkor a trafó vasmagjában időben változó mágneses
tér jön létre

pl. áramkiszorításnál egy ellenkező irányú mágneses
tér jön létre, ami a vezetők közepén a leggyorsabb és ez
kiszorítja az áramot a hengeres test szélére

pl. villamos gépek, anyagvizsgálat
önvezetőkisérlet, változó áramú ellenáram számítás

EM HULLÁMOK

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0 \quad \vec{j} \neq 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_e) + \vec{j}_e$$

pl. antennák, hullámbeszédés

10.) ✓ ELEKTROSZTATIKA MAXWELL - EGYENLETEK : differenciális alakban

$$\times \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{J} \neq 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \leftarrow \text{örvénymentes}$$

$$\times \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \leftarrow \text{a tér forrása a töltés}$$

KONSTITÚCIÓS EGYENLETEK

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \leftarrow \text{ha lin. anyag}$$

$$\times \vec{B} = \mu (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\times \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{se}}) + \vec{J}_{\text{se}}$$

FOLYTONOSSÁGI EGYENLETEK KÖZEGHATÁRON:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = \vec{0}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{J}_s$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho_s$$

ERŐ ÉS ENERGIA KÖLCÖNHATÁS:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \Phi_k$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \leftarrow \text{elektromos tér energiája}$$

$$\vec{F} = \rho_{\text{össz}} \vec{E} + \vec{j}_{\text{össz}} \times \vec{B} ?$$

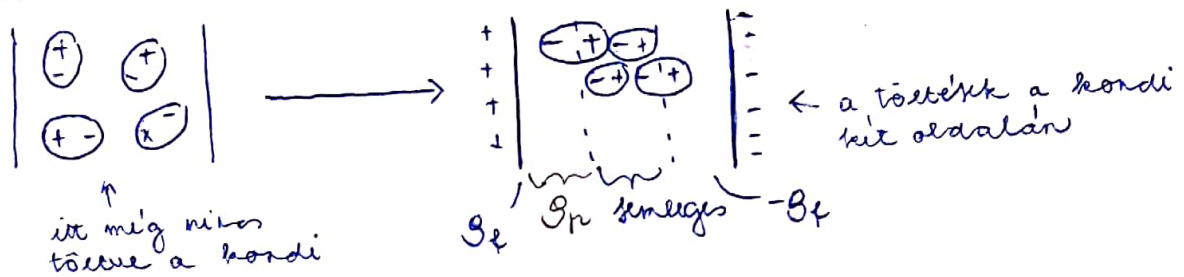
- ⊕ kezdeti feltételek, kauzalitás
egzisztencia
unicitás

11.) POLARIZÁCIÓ

elektromos eltolás: $\vec{D} \left[\frac{A_1}{m^2} \right] \sim$ felületi töltéssűrűség

$$\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_f + \mathcal{G}_p$$

ANYAGSZERKEZETI MODELL
DIELEKTRIKUMMAL KITÖLTÖTT SÍKKONDENZÁTOR:



bevezethető: $\mathcal{G}_p = -\text{div } \vec{P}$ ← polarizáció

$$\vec{P} = \frac{\sum_i p_i}{\Delta V}$$

dipólusmomentumsűrűség

$$P = 1 \cdot \vec{A}$$

$$\text{Gauss: } \text{div } \vec{E} = \frac{\mathcal{G}_a}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{G}_f + \mathcal{G}_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{G}_f - \text{div } \vec{P})$$

$$\epsilon_0 \cdot \text{div } \vec{E} = \mathcal{G}_f - \text{div } \vec{P}$$

$$\text{div } (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \mathcal{G}_f$$

$$\text{div } \vec{D} = \mathcal{G}_f$$

$$\vec{D} \triangleq \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \leftarrow \vec{D} \text{ és } \vec{E} \text{ kapcsolata}$$

lineáris közegben:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

miért a dielektromos állandó?

12.) SKALÁR POTENCIÁL: ← ELEKTROSZTATIKA

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{f} \neq 0$$

TOGALMA
megváltozó

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \leftarrow \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \underbrace{\text{rot}(\text{grad } \phi)}_0$$

fontossága: energiával kapcsolatos
könnyű mérni
vektor helyett skalar az ismeretlen

nem egyértelmű: $\phi' = \phi + K$

$$-\text{grad } \phi' = -\text{grad } \phi - \underbrace{\text{grad } K}_{K=0}$$

ELEKTROMOTOROS ERŐ/TEGZ:

általában:

$$\mathcal{E}_L = \int_L \vec{E} d\vec{l} \quad (\text{EMF})$$


energetikai tartalom:

Q ponttöltés mozog L mentén

$$a \text{ mozgás munkája: } dW = \vec{F} d\vec{l} = (Q \cdot \vec{E}) d\vec{l}$$

KAPCSOLATA U-VAL, E-VEL:

$$W_{AB} = \int dW = Q \int \vec{E} d\vec{l} = Q \mathcal{E}_L$$

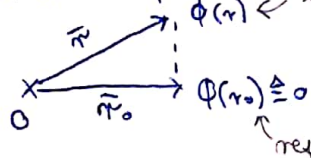
speciális eset: elektrosztatika ha $\text{rot } \vec{E} \stackrel{L}{=} 0 \Rightarrow$ potenciális

$$\mathcal{E}_L = \int_L \vec{E} d\vec{l} = \int_L -\text{grad } \phi d\vec{l} = \phi(A) - \phi(B) \stackrel{U_{AB}}{\leftarrow} \text{alakjától függően}$$

$$\text{feszültség: } U_{AB} = \phi(A) - \phi(B) \quad [V]$$

$$W_{AB} = Q U_{AB}$$

referenciapont: $\phi(r) \leftarrow$ integrációs pont



$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}} \vec{E} d\vec{l}$$

gyakran: $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$

TERBEN TÁROLT ENERGIA POTENCIÁLVAL:

teh. a közeg végtelen, lineáris, homogén (vákuum)
kiindulás:

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V -\text{grad } \phi^2 dV$$

vektorral:

$$\text{div}(a \text{ grad } b) = \text{grad } a \cdot \text{grad } b + a \underbrace{\text{div grad } b}_{\Delta}$$

$$a = b = \phi$$

$$\operatorname{div}(\phi \cdot \operatorname{grad} \phi) = \operatorname{grad}(\phi)^2 + \underbrace{\phi \Delta \phi}_{+\frac{1}{\epsilon_0} \phi \rho}$$

végén térfogat:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \operatorname{grad}(\phi)^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \phi \rho dV + \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int_V \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi) dV}_{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}$$

$$\oint_{S(V)} \phi \operatorname{grad} \phi d\bar{S} = \frac{1}{2} \int_V \phi \rho dV + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{S(V)} \phi \operatorname{grad} \phi d\bar{S} \quad \leftarrow \text{Gauss}$$

gömb térfogat: $\phi = \frac{a}{4\pi\epsilon_0 r}$ $E = -\operatorname{grad} \phi$
 $E = \frac{a}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S(V)} \phi \operatorname{grad} \phi d\bar{S} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K_1}{R} \cdot \frac{K_2}{R^2} 4\pi R' = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a}{4\pi\epsilon_0 R} \left(-\frac{a}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) = 0$$

teh. $\oint$ véges kiterjedésű



ha a sugár elég nagy, akkor ponttöltéssel számolhatunk

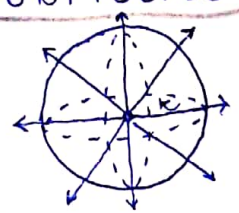
ha végtelen a kiterjedés, akkor a felületi integrálétűnik is térfogati lesz



elegendő a töltések helyén integrálni

$$\text{Teljes tén: } \frac{1}{2} \int \phi \rho dV = W_{el}$$

13.) PONTTÖLTÉS:



vákuum : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

Gauss : $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV$

$$\epsilon_0 \vec{E}_r(r) \int_S d\vec{s} = \int_V \rho dV = Q$$

$$\epsilon_0 E_r(r) 4\pi R^2 = Q$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

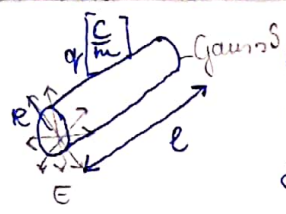
$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{r_0} \frac{1}{k^2} dk =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] \Big|_{r_0 \rightarrow \infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

VÉGTELEN HOSSZÚ EGYENES VONALTÖLTÉS

szimmetria miatt : $E_r = 0, E_z = 0$



Gauss : $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV = q \cdot l = \sum Q$

$$\epsilon_0 E_r(r) \int_S d\vec{s} = q \cdot l$$

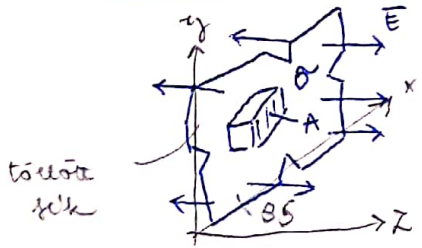
$$\epsilon_0 E_r(r) 2\pi R l = q l$$

$$E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\varphi_r(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_r^{r_0} \frac{1}{R} dR =$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

VÉGTELEN KITERJEDÉSŰ SÍK



$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV = \sigma A = \sum Q$$

$$\epsilon_0 E_z \int_S d\vec{s} = \sigma A = \rho_s A$$

$$\epsilon_0 E_z 2A = \sigma A = \rho_s A$$

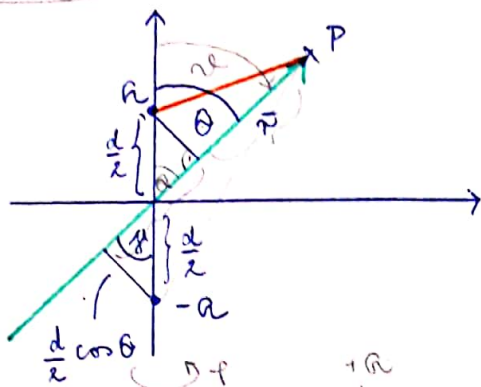
$$E_z = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

↑
attól függ, hogy
melyik irányba $\vec{E}$ -t
nézzük

$$\varphi_z(z) = \int_z^{z_0} E_z(z) dA = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_0 - z) = \mp \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_0) \Big|_{z_0=0} = \mp \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

DIPÓLUS

$d \ll r$



$d \rightarrow 0$

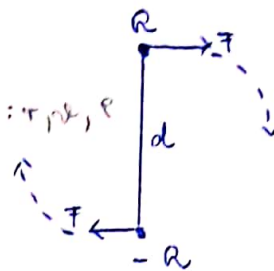
$$Qd = \text{const} = |\vec{p}|$$

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{E}$$

gömbi koordináták: r, ϑ, φ

szimmetria:

$$\begin{cases} E_\varphi = 0 \\ E_r = E_r(r, \vartheta) \\ E_\vartheta = E_\vartheta(r, \vartheta) \end{cases}$$



$$\frac{d}{2} = r \cos \vartheta$$

$$\Phi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \vartheta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \vartheta} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r + \frac{d}{2} \cos \vartheta - r + \frac{d}{2} \cos \vartheta}{r^2 - \left(\frac{d}{2} \cos \vartheta\right)^2} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \vartheta}{r^2 - \left(\frac{d}{2} \cos \vartheta\right)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \vartheta}{r^2} = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

elhanyagolható,
mert $d \ll r$

P pont

$$\vartheta = \vartheta$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{grad } \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} -2 \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^3} \\ \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(-\frac{\sin \vartheta}{r^3} \right) \\ \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^3} \\ \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\sin \vartheta}{r^3} \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}_r(r, \vartheta) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^3}$$

$$\vec{E}_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \vartheta}{r^3}$$

$$\vec{E}_\varphi = 0$$

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^3} \text{ szimmetria valószínű}$$

14.) LAPLACE-POISSON EGYENLET: ← ELEKTROSTATIKA

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow -\operatorname{div} (\epsilon \operatorname{grad} \Phi) = \rho$$

$$\uparrow$$

$$\epsilon (-\operatorname{grad} \Phi)$$

speciális eset: homogén közeg → $\epsilon = \text{konst}$

$$\underbrace{\operatorname{div} (\operatorname{grad} \Phi)} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta: \text{Laplace operátor} = \nabla^2$$

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

értelmezés?

↑
másodrendű parciális
deriváltak összege

FOLYTATÓSSÁGI FELTÉTEL:



$$1. \vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1} \Rightarrow \Phi_2(r) = \Phi_1(r) + K \quad \vec{r} \in \Gamma$$

$$K \triangleq 0$$

$[\Phi]_{\Gamma} = 0$ mennyiség
ugraása a
DÍKICHLET körvonalakon

$$2. \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} + \rho_s$$

$$\vec{n} (-\epsilon_2 \operatorname{grad} \Phi_2) = \vec{n} (-\epsilon_1 \operatorname{grad} \Phi_1) + \rho_s$$

$$-\epsilon_2 \frac{d\Phi_2}{dn} = -\epsilon_1 \frac{d\Phi_1}{dn} + \rho_s$$

$$\left[\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = -\rho_s \quad \text{NEUMANN}$$

exst. körülmények

ÁLTALÁNOS MEGOLDÁS:

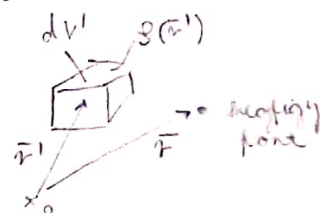
- lineáris, végtelen, homogén, izotróp közeg
- véges kiterjedésű és ismert töltéssűrűség

$$\Phi(\infty) \triangleq 0$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V(\infty)} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

↑
gradiens

↑
impulzusválasz
"Green-fü"



+ szuperpozíciós elv!

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= -\frac{\rho_1}{\epsilon} \\ \Delta \Phi_2 &= -\frac{\rho_2}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon}$$

X Laplace egyenlet levezetése:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \rho$$

$$\epsilon \text{div}(\mathbf{E}) = \rho$$

$$-\epsilon \text{div grad}(\phi) = \rho \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \epsilon \text{div}(\mathbf{E}) = \rho \\ -\epsilon \text{div grad}(\phi) = \rho \end{matrix}} \right\} \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta \phi}{r_m} dV_s + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} dA - \frac{1}{4\pi} \int_A \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dA$$

felületen kívüli töltések hatása

$$1+2 \rightarrow \phi(r) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(s)}{r_m} dV_s}_{\text{töltés hatása}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{A'} \frac{\sigma(s)}{r_m} dA'}_{\text{ahol felületi töltés van}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{A''} \mu_s \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_m} dA_s}_{\text{kettős réteg}}$$

ha $\sigma = \mu = 0$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(r)}{r_m} dV_s$$

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\bar{r}') dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV$$

Laplace-Poisson egyenlet általános megoldása, ha csak tértöltéssel foglalkozunk

$$r_{ms} = |\bar{r} - \bar{r}'|$$

$$r = \bar{r}$$

A tértöltéssel így hozza létre a potenciált, mint töltések szuperpozíciója.

15.) $\checkmark$ négyes tértöltes :

PERIHEKTER FELADAT

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \phi = 0 \quad \begin{matrix} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{rot grad } \phi = 0 \\ \text{potenciális tér} \end{matrix}$$

mi kell, hogy megoldható legyen

$$\vec{v} = \gamma \text{ grad } \phi$$

$$\text{grad } \phi d\vec{A} = \vec{n} \text{ grad } \phi dA$$

$$\int_V \text{div } \vec{v} = \int_A \sigma dA$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \text{div}(\gamma \text{ grad } \phi) = \text{grad } \gamma \text{ grad } \phi + \gamma \Delta \phi$$

$$\int_V (\text{grad } \gamma \text{ grad } \phi + \gamma \Delta \phi) dV = \int_A \frac{\partial \phi}{\partial n} dA \quad \leftarrow \text{aszimmetrikus} \\ \text{open tér}$$

$$\int_V (\text{grad}^2 \phi + \phi \Delta \phi) dV = \int_A \gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} dA$$

teh. ϕ_1 és ϕ_2 megoldások

$$\left. \begin{matrix} \Delta \phi_1 = 0 \\ \Delta \phi_2 = 0 \end{matrix} \right\} \text{előírando}$$

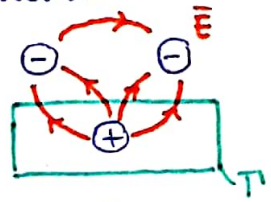
$$\text{grad}^2 (\phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} \phi_1 = \phi_2 + c \\ \phi_1 - \phi_2 \end{matrix} \right\} \text{egyenletű}$$

It Laplace egyenlet egyenletű-
en megoldható, ha a perem
egyképpen elő van írva a
potenciál és a perem
másik felén elő van írva
a potenciál normális irányú
deriváltja

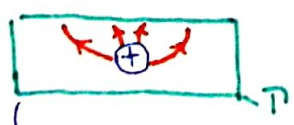
$$\begin{matrix} S_D \cap S_N = 0 \\ S_D \cup S_N = S \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{--- } V \text{ --- } \Gamma \text{ ---} \\ C_2 \\ C_1 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} S_D - \text{DIRICHLET} \\ \phi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \\ S_N - \text{NEUMANN} \\ \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n} = g(\vec{r}) \end{matrix}$$

karad tér:



$\Downarrow$

karat tér



peremfeltétel

a körvonal hatását
figyelti meg

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \frac{-\rho(\vec{r})}{\epsilon} \quad \vec{r} \in V$$

karat tartományon megoldani: PDE

$$-\text{div } \epsilon \text{ grad } \phi = \rho$$

kötőghatár feltételek:

$$[\phi]_{\Gamma} = 0$$

$$[\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}] = -\rho_s$$

Γ : elválaszt egy és másik egy megoldásra
 $\downarrow$
egyenletesség unicitás

3. névvel rendelkező a tér:

1. V térfogat
2. V sűrűsége
3. V határa

It megoldásunk a nyitott vagy zárt térben

It első lépés a zárt térben lévő görbék határait úgy vizsgáljuk figyelembe, hogy a két tér közötti határfelületre premittiteltetünk ésunk fel

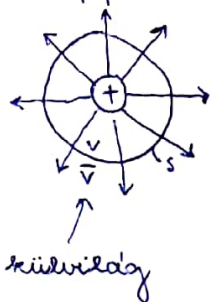
pl. helyettesítő töltések módszerével

It premittiteltetünk a külvilág határait jelenítik meg a zárt tartományon belül.

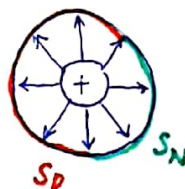
$\rho(\vec{r})$ -t mindenhol ismerni kellene, de miután csak a belső tartományt érdekel, így a premittiteltetünk ésunk fel.

16.) HELYETTESÍTŐ TÖLTÉSEK:

alápróblema



peremfeltétel



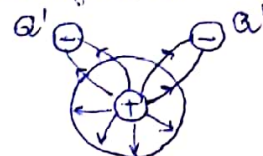
felület határán
peremfeltétel feltételek

$$\text{PDE: } \Delta \Phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{DIRICHLET: } S_D: \Phi = \varphi$$

$$\text{NEUMANN: } S_N: \frac{\partial \Phi}{\partial n} = g$$

helyettesítő töltések



• Q' és Q'' fixált töltések, amelyeknek célja, hogy $\bar{V}$ -ben elhelyezkedő olyan terület alakosságnak, amely a tartományon belül az eredetihez hasonló

- szuperpozíció $\Rightarrow$ PDE $\rightarrow$ kielégíti a Poisson egyenletet
- peremfeltétel S-en $\rightarrow$ célja a környező tér megegyezése
- határán unicitás áll

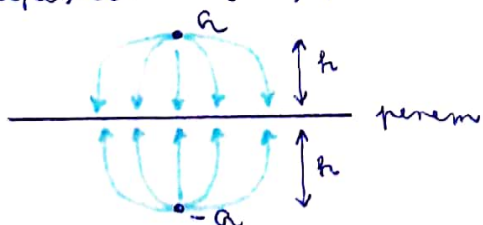
Itt elektrodák területét úgy számítjuk, mintha helyettesítő töltések voltak volna. Azt várjuk el a helyettesítő töltések elrendelésétől, hogy a helyettesítő töltések együttes potenciálja valamennyi elektrodán ekvipotenciálissá legyen (a potenciál konstans legyen minden elektrodán).

Itt helyettesítő töltés elég csak a Laplace egyenletnek, kivéve a töltés helyét, de ez nem zavar minket, mert a helyettesítő töltés az elektrodán belül van és az úgysem érvényes a perem, csak az elektrodán kívül.

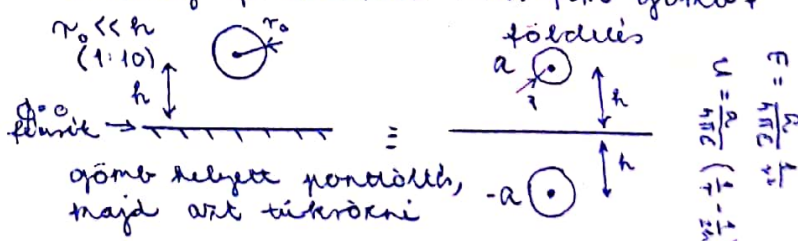
Egész test a peremfeltételnek is, mert konstans potenciálhoz létezik. Itt helyettesítő töltések potenciálja konstans az elektrodán.

TÖLTÉSTÜKRÖZÉS $\rightarrow$ nem egyértelmű

alapeset: $E_t = 0, \Phi = \text{konst}$



analóg probléma: kis fém gömb + töltés

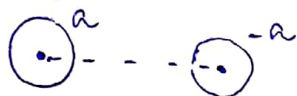


TEHGERTÜKRÖZÉS:

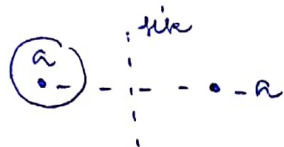
alap eset: vonaltöltés + földelt fémhenger



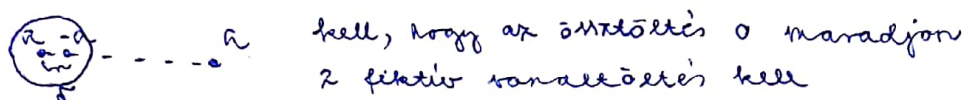
analóg probléma: henger (+a) és henger (-a)



henger + sík



vonaltöltés + szigetelt henger



kis sugarú közelítés:

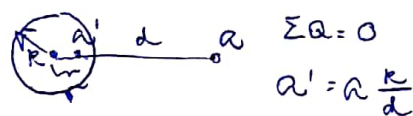
$k \ll d \leftarrow$ hengerek középpontjának a töltés (szigetelt esetben dipólus)

gömbi tükrözés



kis sugarú közelítés: ponttöltés

földelt eset



dipólus

VONALTÖLTÉS:



$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

- a vízszintes térben a töltéslendekelés megfelel az eredetinek
- a függőleges térben a töltéslendekelés nem a vízszintes térben van

→ a töltés és a tükrötöltés együtt alkotják a kívánt potenciálfunkciót

Itt helyettesítő töltések módszere abból a tényből indul ki, hogy az elektrosztatikai feladatok megoldása adott geometriai töltéslendekelés és potenciálfunkciók esetén egyértelmű. Ha tehát találunk olyan helyettesítő töltéslendekelést, amelyik ugyanazokat a potenciálfunkciókat hozza létre, mint az eredeti elrendezés, akkor a megoldásunk tért is ugyanaz lesz, mint az eredeti esetben

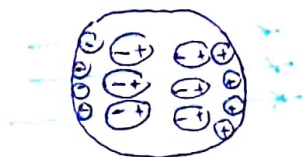
17.) VEZETŐ ANYAGOK VISELKEDESE ELEKTROSTATIKUS TÉRBEN

vezető $\longleftrightarrow$ töltetlen $\longleftrightarrow$ a tér hatására a semleges töltések szétválnak és elvörös teret hoznak létre, ami a külsőt kompenzálja

TÖLTÉSMEGOSZTÁS

Vezetőrekes objektum, ami kezdetben semleges, E hatására elmozdul a töltésmegoszlás és addig tart, amíg a töltésmegoszlás létre nem jön, ami 0-ra teszi a belső teret az anyagon belül.

Minél jobb vezető, annál gyorsabban megy végbe. (relaxációs idő)



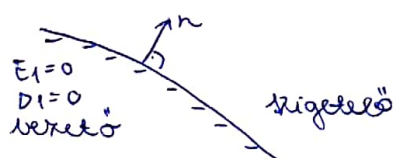
Elektróda fogalmán vezető anyagot értünk.

Vizsgálati kérdés, hogy mikor vezető és mikor töltetlen az anyag.

↓
függhet az alkalmazási területől,
a frekvenciától;

a töltések szétválásának gyorsaságától (relaxációs idő)
az elektrosztatikában van rá idő, hogy ez megtörténjen;
ezért a nagyon rossz vezető is elektróda lehet számításra

HATÁR FELTÉTELEK:



az elektromos térerőnek nincs tangenciális komponense a vezető/töltetlen határon

↓
tiszta merőlegesen lép ki

$$\left. \begin{array}{l} E_{2t} = E_{1t} \\ E_{1t} = 0 \end{array} \right\} E_{2t} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} + q_s \\ \vec{D}_{1n} = 0 \end{array} \right\} \vec{D}_{2n} = q_s$$

az elektróda felületén $\vec{D}$ megegyezik a felületi töltéssűrűséggel.

határfelelettel potenciálra:

ha a potenciál mindenütt értelmezett, akkor a térerősség végpontjából a potenciál függvénye következik

↓
 E_n ugrása a felületre merőleges derivált ugrását jelenti

$$\Phi_2 = \Phi_1$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1}$$

részben folytonos közegekkel:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \text{ és a határ felületekben } \Phi \text{ és } \epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial n} \text{ folytonos}$$

miel L-P egyenlet megoldását keressük, ugyan azok a módszerek alkalmazhatók, mint a fémeknél

$$\text{ha } \epsilon \rightarrow \infty$$

$$D_{2n} = D_{1n}$$

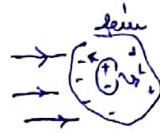
$$E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ a határon}$$

$$\Phi|_{\text{belül}} = \text{konst} \rightarrow E|_{\text{belül}} = 0 \rightarrow \Phi|_{\text{határon}} = \text{konst}$$

$\Downarrow$
következtetés:

- az elektróda potenciáljai
- az elektróda felületére az erővonalak: $\vec{E}, \vec{P}$

18.) ✓ ELEKTRODA: vezetőképes anyag



állandó felület
ismert geometriájú
adott potenciálú
vezető / szigetelő?

ELEKTRODARENDSZER ENERGIAJA

$\Phi(\infty) = 0$ $\Phi = 0$ Φ_k szigetelő anyagban
 S_k $\Phi = 0 \rightarrow$ töltések csak az elektrodán vannak

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho dV = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \int_{S_k} \rho_s dS = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k Q_k$$

külön-külön
állandó

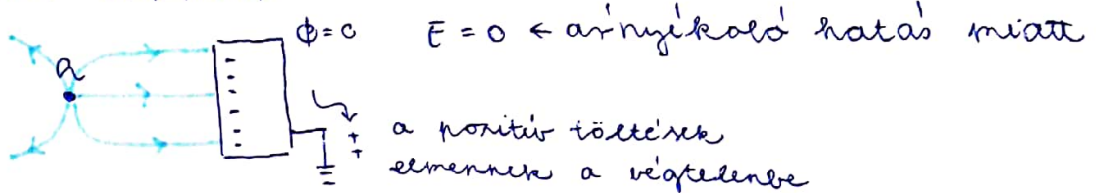
Q_k

$\leftarrow$
a fémfelületekre
ül ki a töltés

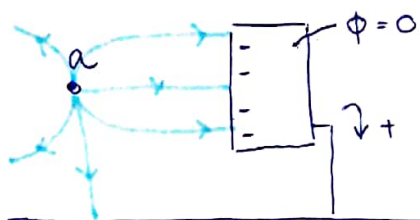
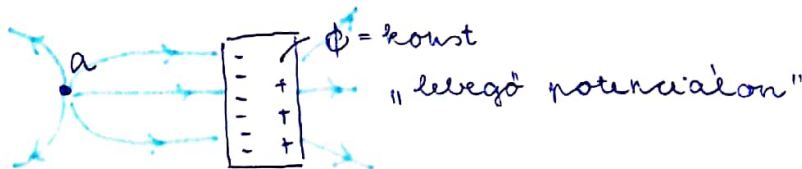
FÖLDELÉS:

végül bármely töltésrahaár $\rightarrow$ nem szorí bele a térbe
adott 0 potenciál $\rightarrow \Phi(\infty) = 0$

FÖLDELT ELEKTRODA

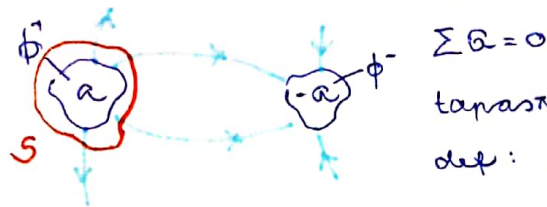


FÖLDELETLEN ELEKTRODA



referencia elektrodán
is megosztás
követi föld

19.) ✓ KAPACITÁS: elektrodapár



$$\Sigma Q = 0$$

$$\text{tápasztalat: } \Phi^+ - \Phi^- = U \sim Q$$

$$\text{def: } C = \frac{Q}{U} [F]$$

ENERGETIKAI HATÉK:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \Phi dV \rho = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \underbrace{\int_{S_k} \rho_k ds}_{Q_k} = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k Q_k = \frac{1}{2} [\Phi Q + \Phi^- (-Q)] = \frac{1}{2} Q (\Phi^+ - \Phi^-)$$

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \rightarrow C = 2 \frac{W}{U^2}$$

TÉRJELLENZŐ MENNYISÉGEKKEL:

$$C \triangleq \frac{Q}{U} = \frac{\int_V \vec{D} d\vec{A}}{\int_L \vec{E} d\vec{l}} = \frac{\epsilon \int_V \vec{E} d\vec{A}}{\varphi_1 - \varphi_2} [F]$$

ÖNMAGÁBAN ÁLLÓ ELEKTRODA:

egy a töltései gömbe alakú elektróda esetén
úgy számolható, ha $\tau > R$ és R a gömbe sugara,
hoggy:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

$r_0 = \infty$ nullreferenciapont elválasztással:

$$U = \varphi_0 - \varphi_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

⇓

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}} = 4\pi\epsilon r$$

hosszanti huzalváltó töltése:

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r} \leftarrow \text{ha } r_0 = \infty$$

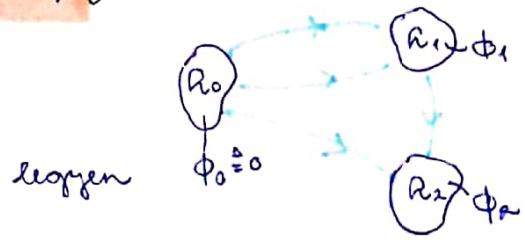
↓

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

↓

$$C = \frac{q \cdot l}{U} = \frac{q \cdot l}{\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

20.) ELEKTRODARENDSZER:



$n = 0, 1, 2 \dots n$
 $n = 0 \rightarrow$ referenciaelektroda
 $\Phi_1 \sim Q_1, Q_2$
 $\Phi_2 \sim Q_1, Q_2$

$$\sum_k Q_k = 0 \Rightarrow Q_0 = -Q_1 + Q_2$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= r_{11} Q_1 + r_{12} Q_2 \\ \Phi_2 &= r_{21} Q_1 + r_{22} Q_2 \end{aligned}$$

megadható: $r_{12} = r_{21} \rightarrow$ reciprok
 $\downarrow$
 r_{ik} : potenciáegyütthatók

$$\underline{\Phi} = \underline{r} \cdot \underline{Q} \rightarrow \underline{Q} = \underline{r}^{-1} \underline{\Phi} = \underline{\gamma} \underline{\Phi}$$

$\uparrow$
kapacitás együtthatók

$$Q_1 = \gamma_{11} \Phi_1 + \gamma_{12} \Phi_2 = \gamma_{11} \Phi_1 + \gamma_{12} \Phi_1 - \gamma_{12} \Phi_1 + \gamma_{12} \Phi_2$$

$$Q_2 = \gamma_{21} \Phi_1 + \gamma_{22} \Phi_2 = \gamma_{21} \Phi_1 + \gamma_{21} \Phi_2 - \gamma_{21} \Phi_2 + \gamma_{22} \Phi_2$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \Phi_1 - \gamma_{12} (\Phi_1 - \Phi_2) \\ Q_2 &= (\gamma_{22} + \gamma_{12}) \Phi_2 - \gamma_{12} (\Phi_2 - \Phi_1) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{C_{10}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{C_{20}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{C_{12}}$

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{10} \Phi_1 + C_{12} (\Phi_1 - \Phi_2) \\ Q_2 &= C_{20} \Phi_2 + C_{12} (\Phi_2 - \Phi_1) \end{aligned}$$

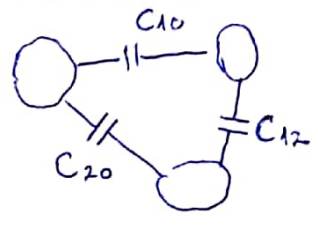
$\begin{cases} C_{10}, C_{20}: \text{ földkapacitás} \\ C_{12}: \text{ főkapacitás} \\ \downarrow \\ \text{testkapacitások} \end{cases}$

ÁLTALÁNOS ALAK:

$$Q_i = C_{i0} \Phi_i + \sum_{k=1}^n C_{ik} (\Phi_i - \Phi_k) \quad i = 1 \dots n$$

$C_{i0} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}$ földkapacitás
 $C_{ik} = -\gamma_{ik}$ főkapacitás

SZEMLELTETÉS:



$$\frac{1}{2} C U^2$$

ENERGIA:

$$W_C = \frac{1}{2} (Q_0 \Phi_0 + Q_1 \Phi_1 + Q_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} \left[C_{10} \Phi_1^2 + C_{20} \Phi_2^2 + C_{12} (\Phi_2 - \Phi_1)^2 \right]$$

$= \frac{1}{2} \left[r_{11} \Phi_1^2 + \frac{1}{\gamma} r_{22} \Phi_2^2 + r_{12} \Phi_1 \Phi_2 \right] \checkmark$

21.)

TÖLTÉSRELAXÁCIÓ:

az a jelenség, ami során az eredetileg létező töltéeloszlás eltűnik a közegből időben állandó, de nem rögzített a töltések

levezetés:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div}(\sigma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div}\left(\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \underbrace{\text{div } \vec{D}}_{\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

relaxációs idő



$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rightarrow \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

MODELLVÁLASZTÁS:

T : viszkózus idő

$\tau \gg T \rightarrow$ szigetelő σ_1, τ_1

$\tau \ll T \rightarrow$ vezető σ_1, τ_1

pl. villámhárító

levegő: szigetelő

töved: vezeték

elektroda: ideális

akkor alkalmazható

*ELEKTROSTATIKAI MODELL

$\tau_1, \tau_2 \gg T$ szigetelő

$\tau_1 \ll T$ elektroda

$\tau_2 \gg T$ szigetelő

STACIONÁRIUS MODELL

$\tau_1, \tau_2 \ll T$ elektroda (vezető)



σ_1

vezeték vezető



σ_2

ideális vezető (elektroda)

$\tau_1, \tau_2 \gg T$ szigetelő

u^2

2.2) STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \bar{j} \neq 0$$

MAXWELL-EGYENLETEK:

$$\text{rot } \bar{E} = 0 \rightarrow \oint \bar{E} d\bar{l} = 0$$

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j}$$

$$\downarrow$$

$$\text{div } \bar{j} = 0 \rightarrow \text{az áramlási tér forrásmentes}$$

$$\downarrow$$

$$\oint \bar{j} d\bar{S} = 0$$

$$\bar{j} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_{\text{ee}}) + \bar{j}_{\text{ee}}$$

↑
fajlagos
vezetőség

↑
áram

↑
Van der Graaf
generátor

↑
beiktatott : nem EM erőhöz mozgató
hatásolt mágis

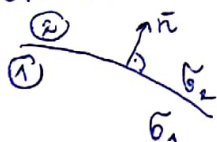
DIFFERENCIÁLIS OHM-TV.

$$R = \sigma \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma A} \\ \bar{E} \cdot \bar{A} = \frac{l}{\sigma A} \cdot I \\ \bar{j} = \sigma \bar{E} = \frac{I}{A} \end{array} \right.$$

$$U = R \cdot I = \bar{E} l$$

Ohm tv. másik alakja, ha
figyelembe vesszük, hogy
egyetlen "A" keresztmetszetű,
"l" hosszúságú vezető esetén
a vezető végei között
 $U \sim \bar{E}$
 $I \sim \bar{j}$

KÖZEGHATÁR FELTÉTELEK:



$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0 \Rightarrow E_{2t} = E_{1t} \leftarrow \Phi_2 = \Phi_1$$

$$\oint \bar{j} d\bar{S} = 0 \Rightarrow j_{n2} = j_{n1} \leftarrow -\sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\sigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$$

Ha nem így lenne, akkor felületi töltés halmozódna fel.

HŐTELJESÍTMÉNY:

$$\left. \begin{array}{l} r = \bar{j} \cdot \bar{E} = \int \frac{j^2}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] \\ P = \int r dV = \int j^2 \cdot R \end{array} \right\} R = \frac{P}{j^2} = \frac{\int \frac{j^2}{\sigma} dV}{j^2}$$

23.) SKALA'R POTENCIA'L A'RAMLA'SI TE'KEDEN

Laplace - Poisson:

$$\text{mivel } \text{rot } \vec{E} = 0 \Leftarrow \vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\text{div } \vec{f} = 0$$

$$\vec{f} = \sigma \vec{E} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{be}}) + \vec{f}_{\text{be}}$$

$$\text{div} [\sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{be}}) + \vec{f}_{\text{be}}] = 0$$

$$\text{div} [\sigma ((-\text{grad } \Phi) + \vec{E}_{\text{be}}) + \vec{f}_{\text{be}}] = 0 \leftarrow \text{PDE}$$

$$\text{div} (\sigma \text{grad } \Phi) = \text{div} (\sigma (\vec{E}_{\text{be}}) + \vec{f}_{\text{be}})$$

specialis eset: homogén köteg: $\Delta \Phi = \text{div} (\vec{E}_{\text{be}} + \frac{\vec{f}_{\text{be}}}{\sigma})$

$$\vec{E}_{\text{be}} = 0$$

$$\vec{f}_{\text{be}} = 0$$

$$\sigma = \text{konst}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{be}} = 0 \\ \vec{f}_{\text{be}} = 0 \\ \sigma = \text{konst} \end{array} \right\} \underbrace{\sigma \text{div} (\text{grad } \Phi)}_{\text{Laplace}} = 0$$

$$\Delta \Phi = 0 = \nabla^2 \Phi \leftarrow \text{ha a potenciál eltelítettségű megismerésére}$$

adott formán: $1 \rightarrow Q$ analógiával

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum Q$$

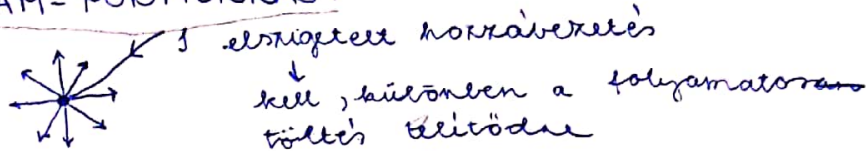
$$\oint \vec{E}(r) 4\pi r^2 = Q$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\Phi(r) = \int_r^{r_0} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \end{array} \right\} E = -\text{grad } \Phi$$

24.) ÁRAM - PONTFORRÁS:



$$\vec{j} = \vec{j}(r) \vec{e}_r \quad \phi(\infty) = 0$$

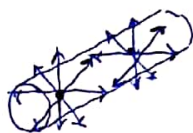
$$\vec{j}_r(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$E_r(r) = \frac{\vec{j}_r(r)}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2}$$

$$\phi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$

Mint ponttöltés tere, ahol a töltés szerepét a hozzávetett I áram tölti be. A permittivitás szerepét pedig a fajlagos vezetőképesség.

ÁRAM - VONALTORRÁS



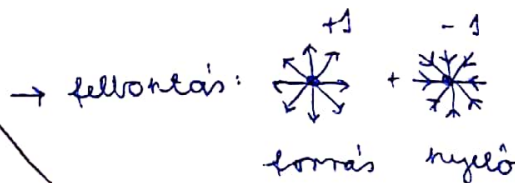
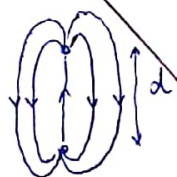
$$\vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$E_r(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$$

$$\phi(r) = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{1}{r}$$

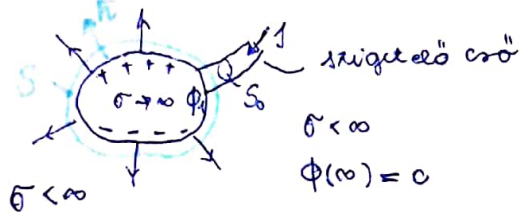
szivárgási ellenáram vizsgálatakor fontos, mint ez egy olyan áram, ami a szigetben folyik

ÁRAM - DIPÓLUS:



dipólus momentuma:
 $\vec{p} = I \cdot d$

25.) ELEKTRODARENDSZEREK:

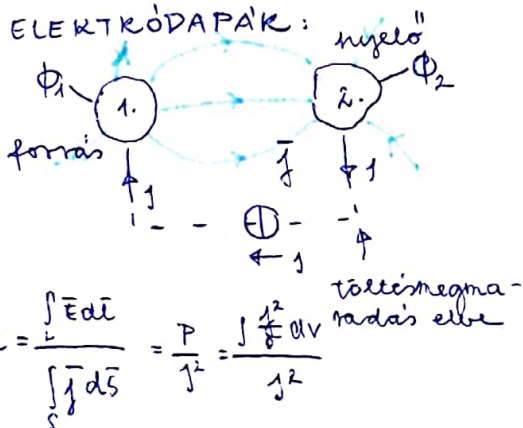


földelési ellenállás:

$$R_f = \frac{\Phi_1}{I}$$

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}$$

ELEKTRODAPÁR:



$$\Phi_1 - \Phi_2 \approx 1$$

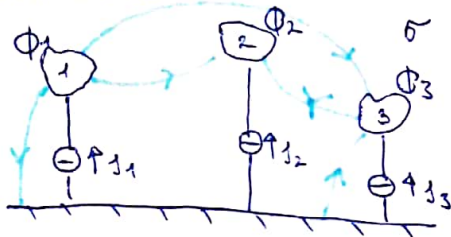
$$R_{12} \triangleq \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = \frac{U_{12}}{I} [\Omega]$$

$$G \triangleq \frac{1}{R} [S]$$

$$R = R_{12} = R_{21} \text{ reciprok}$$

$$R = \frac{\int \vec{E} d\vec{l}}{\int \vec{j} d\vec{S}} = \frac{P}{I^2} = \frac{\int \frac{1}{\sigma} dV}{I^2}$$

ÁLTALÁNOS ELEKTRODARENDSZER : $n=3$ ebben a példában



G_{ik} : részkonduktancia

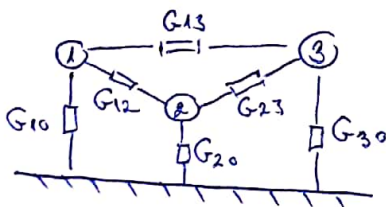
$$I_1 = G_{10} \Phi_1 + G_{12} (\Phi_1 - \Phi_2) + G_{13} (\Phi_1 - \Phi_3)$$

$$I_2 = G_{20} \Phi_2 + G_{12} (\Phi_2 - \Phi_1) + G_{23} (\Phi_2 - \Phi_3)$$

$$I_3 = G_{30} \Phi_3 + G_{13} (\Phi_3 - \Phi_1) + G_{32} (\Phi_3 - \Phi_2)$$

analógia : $G_{ik} \sim C_{ik}$

HÁLÓZATI ANALÓGIA:



$$P = G_{10} \Phi_1^2 + G_{20} \Phi_2^2 + G_{30} \Phi_3^2 + G_{12} (\Phi_1 - \Phi_2)^2 + G_{13} (\Phi_1 - \Phi_3)^2 + G_{23} (\Phi_2 - \Phi_3)^2$$

26.) analóg két jelenség, ha azonos alakú diff. egyenletek és azonos peremfeltételek írják le őket

STACIONÁRIUS ÁRAMLÁS

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$E_{\text{t}} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\Delta \Phi = 0$$

ELEKTROSZTATIKA

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\rho = 0$$

$$\Delta \Phi = 0$$

ANALÓGIA:

STAC.	Φ	$\vec{E}$	$\vec{D}$	$\text{div}(\sigma \vec{E}_{\text{t}} + \vec{j}_{\text{t}})$	$\vec{j}$	ρ	ρ
ELEKTROSZTAT	Φ	$\vec{E}$	$\vec{D}$	$-\rho$	$\vec{D}$	ϵ	ρ

$\sigma = 0$ jellemzője anyag van (ideális szigetelő), de $\epsilon = 0$ anyag nincs, ott ahol a térbeli áramlásos területek, amelyekben $\sigma = 0$ nincs elektrosztatikus megfelelőjük

KÖVETKEZMÉNY:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{Q}{U} = \frac{\int \vec{D} d\vec{A}}{U} = \frac{\epsilon \int \vec{E} d\vec{A}}{U} \\ G &= \frac{1}{U} = \frac{\int \vec{j} d\vec{A}}{U} = \frac{\sigma \int \vec{E} d\vec{A}}{U} \end{aligned} \right\} \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

$$\text{div}(\epsilon \text{grad } \Phi) = -\rho$$

$$\text{div}(\sigma (-\vec{E})) = \text{div}(\sigma \vec{E}_{\text{t}} + \vec{j}_{\text{t}})$$

A tükrözés módszere így alkalmazható, hogy az adott homogén, σ vezetőképeségű közegben az eredeti peremfeltételeket kielégítő áramlási teret eredményez.

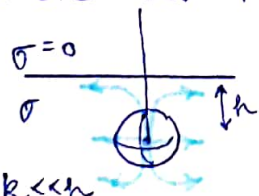
$$j_{2n} = j_{1n}$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

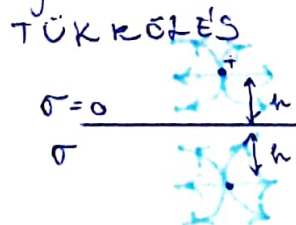
továbbá: $\rho = 0$
 $E_{\text{t}} = 0$
 $j_{\text{t}} = 0$

$\vec{E}$	C	C_{10}	C_{1n}
SA	G	G_{10}	G_{1n}

IDEÁLIS VEZETŐ



=>



⊕ kell, mert a határfelületen a normalisoknak ki kell állniuk egymást $\left. \begin{matrix} j_n \\ E_t \\ D_n \end{matrix} \right\}$ folyamon

27.)

MAGNETOSZTIKA ALAPEGYENLETEI

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{j} = 0$$

↑ permanens mágneses tere

Maxwell: $\text{rot } \vec{H} = 0 \rightarrow$ érvénymentes } homogén, nem
 $\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow$ forrámentes } tartalmaz gerjesztést

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

↑ mágnesesség (tér forrása)

pl. permanens mágnes

MÁGNESES SKALÁRPOTENCIÁL:

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \leftarrow \vec{H} = -\text{grad } \Phi_m$$

$$\text{div } (\mu_0 (-\text{grad } \Phi_m + \vec{M})) = 0$$

a $\text{rot } \vec{H} = 0$ egyenletet automatikusan kielégítjük, ha a $\vec{H}$ mekkört egy skalárpotenciálé gradienseként írjuk le.

$$\text{div grad } \Phi_m = \text{div } \vec{M}$$

$$\Delta \Phi_m = \text{div } \vec{M} = \nabla^2 \Phi_m \leftarrow \text{Poisson - egyenlet}$$

27/b STACIONÁRIUS MÁGNESES TÉR

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

források: áramok
permanens mágnesek

MAXWELL:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \leftarrow \text{speciális eset}$$

VEKTORPOTENCIÁL:

$\text{div } \vec{B} = 0$ teljesíthető, ha $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, mert $\text{div rot } \vec{A} \equiv 0$
 $\vec{A}$ nem egyértelmű

$$\text{pl: } \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } u \leftarrow \text{bitörélesség}$$

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } u}_0 = \text{rot } (\vec{A})$$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ a hurokáramokkal az analógiában,
mert egy mágnes forrásmentességét kell kielégíteni

MÉRTÉKVONLASZTÁS: $\leftarrow$ egy vektormező egyértelműen leírható
forrásaival és örvényeivel

$\text{div } \vec{A}$ előírása

pl. $\text{div } \vec{A} = 0 \rightarrow$ Coulomb-mérték

Egyértelművé tehető, ha megadjuk $\text{div}(\cdot)$ -jét. Mivel
egy vektormező egyértelműen meghatározható
forrásaival és örvényeivel.

LAPLACE POISSON:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \neq \text{rot } \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{j} \leftarrow \text{speciális eset} \rightarrow \mu \text{ konst.} \quad \text{homogén}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{j}$$

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{j}$$

$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j} \leftarrow \text{Laplace - Poisson}$$

$$\Delta A_x = -\mu j_x$$

$$\Delta A_y = -\mu j_y$$

$$\Delta A_z = -\mu j_z$$

28.) STACIONÁRIUS ÁRAMOK KÉLTETE MÁGNESES TÉR

MAXWELL:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \leftarrow \text{forrás}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \leftarrow \text{lineáris anyagban konstitúció}$$

ÁRÓLT ENERGIA:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} dV$$

vektoranalízis:

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} \leftarrow \text{szorzat derivált}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \underbrace{\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}}_{\vec{j}} dV + \frac{1}{2} \underbrace{\oint (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}}_0 = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

tfh nincs ferromágneses közeg, ekkor a közeg permeabilitása mindenhol állandó

FOLYTATÓSSÁGI FELTÉTELEK:

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_s$$

29.) ✓

MAXWELL:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div } B = 0$$

$$\text{div } D = \rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$j = \text{konst}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

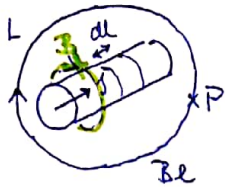
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega$$

VEKONY VÉGTELEN HOSSZÚ VEZETŐ

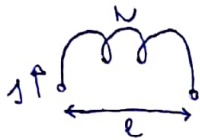


$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} = j$$

$$H_r(\vec{r}) \oint_L d\vec{l} = j = j_r(\vec{r}) \cdot 2\pi r$$

$$H_r(\vec{r}) = \frac{j}{2\pi r} \rightarrow B(\vec{r}) = \mu \cdot \frac{j}{2\pi r}$$

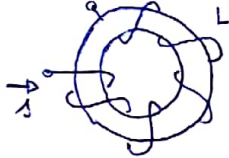
SZOLEONID



$$H \cdot l = Nj$$

$$H = \frac{N \cdot j}{l} \rightarrow B = \mu \frac{Nj}{l}$$

TOKOID:



$$H_r l = N \cdot j$$

$$H_r 2\pi R = Nj$$

$$H_r = \frac{Nj}{2\pi R} \rightarrow B = \mu \cdot \frac{Nj}{2\pi R}$$

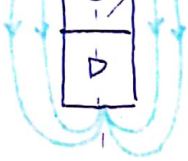
ampère tétele genj. törvény: $\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum j = \int_S \vec{j} d\vec{S}$

30.)

$\text{div } \vec{B} = 0$ ← nincs mágneses monopólus

ELEMI MÁGNESRŐD

$\vec{r} \text{ def: } \Phi_m(r, \theta) = \frac{m}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$



m : mágneses dipólus momentum $[Am^2]$

$\vec{H} = -\text{grad } \Phi_m$

$\vec{B} = \mu \vec{H}$

forgatónyomatok: $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_k$ ($\vec{T} = \vec{r} \times \vec{E}$)

ELEMI KÖRÁRAM:

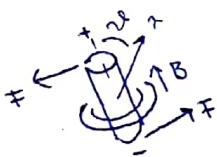


$m = I \cdot S$

$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}, \varphi, \theta) = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi$

$A_\varphi(r, \theta) = \frac{\mu m}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \rightarrow \text{rot} \Rightarrow \vec{B}$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$



$\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

MÁGNESERETTSÉG:

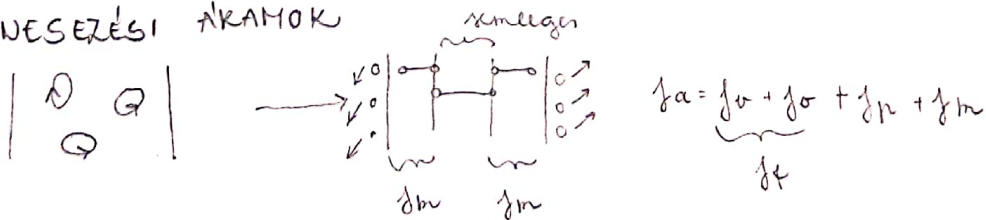
$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_k \vec{m}_k}{\Delta V} \rightarrow \text{lásd: } \vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$

$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$

MÁGNESES TULAJDONSÁGOK

- diamágnes } $\mu_r \approx 1$ pl. rez, aluminium
- + paramágnes }
- ferromágnes: $\mu_r \sim 10^3 - 10^6$ pl. vas

MÁGNESEZÉSI ÁRAMOK



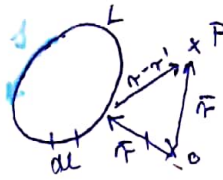
polarizációs áram

PERMEABILITÁS: lineáris körkben: $M \sim H \rightarrow M = \chi_m H$

$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

$\uparrow$ susceptibilitás $\uparrow$ relatív permeabilitás

31.7 BIOT-SAVART - TV: ← áramjanta hurkok által keltett mágneses indukció számítására
Poisson: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



$$\vec{B}(\vec{r}) = ?$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = ?$$

vékony vezetők: $\int \vec{j} dV = \int \vec{i} dl$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \leftarrow \text{Biot-Savart tv.}$$

ÉRTÉLMELÉZÉS:

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

→ köráram áramdipólusok egymás utáni



"áramelem?"

töltésmegmaradás elvét nem teljesíti

↓
ilyen nincs

legyen: $\vec{r} = 0$ és $d\vec{l} = dl \cdot \vec{e}_z \rightarrow d\vec{H} = dH \vec{e}_\phi$

örögt a vörsgall elemre:

$$dH_\phi = \frac{I dl}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \leftarrow \text{áramdipólus mágneses tere}$$

Biot-Savart elemi összeröjje egy áramdipólust feltételez.

Áramdipólus lehet pl: egy elemet elárunk vagy végre dobunk. Ha ilyen áramdipólusokat pakolunk egymás után, akkor csak a vezető elemek maradnak.

32.

ÖZINDUKTIVITÁS:

VÉkony Vezető:

lineáris közege: $\Psi \sim I$

$$L \triangleq \frac{\Psi}{I}$$

↑
önindukció

$$\text{energia: } W_m = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} L I^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_k \Psi_k I_k$$

KITERJEDT ÁRAMLÁS:



ex általánosabb

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{2 W_m}{I^2}$$

ex mindig működik



VASTAG Vezető

nem definiálható egyértelműen a fluxus

hibrid megoldás:

$$L \approx L_{\text{első}} + L_{\text{külső}}$$

↑
 $\Psi_{m, \text{b}}$ csak energiából
 mágneses tér vezetőkön
 belső erő kellene

↑
 Ψ_s
 fluxusok vagy energiák
 vezető első réteg
 felől ki

$$\frac{1}{2} L I^2 = \int \frac{1}{2} \mu H^2 dV = W_m$$

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mu H^2 dV$$

KÖLSÖNÖS INDUKCIÓ

vezető végeire! ← mert a vezető nem 0 vastag

VÉkony Vezető



$$\text{ha } I_2 = 0 \rightarrow \Psi_2 \sim I_1 \rightarrow L_{21} \triangleq \frac{\Psi_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

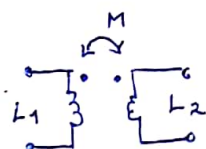
$$\text{ha } I_1 = 0 \rightarrow \Psi_1 \sim I_2 \rightarrow L_{12} \triangleq \frac{\Psi_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

↑
 erőpár
 ↓
 $M = L_{12} = L_{21}$

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

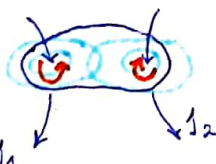
$$\Psi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

↑
 önindukció

↑
közös indukció

$$W_m = I_1 \Psi_1 + I_2 \Psi_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

KITERJEDT ÁRAMLÁS



szuperpozíció:

$$M \triangleq \frac{W_m - \frac{1}{2} L_1 I_1^2 - \frac{1}{2} L_2 I_2^2}{I_1 \cdot I_2}$$

$$1. \text{ eset: } I_1 \neq 0 \text{ és } I_2 = 0 \rightarrow \bar{J}_1 \rightarrow \bar{B}_1 \rightarrow W_{m1} \rightarrow L_1 = \frac{2 W_{m1}}{I_1^2}$$

$$2. \text{ eset: } I_1 = 0 \text{ és } I_2 \neq 0 \rightarrow \bar{J}_2 \rightarrow \bar{B}_2 \rightarrow W_{m2} \rightarrow L_2 = \frac{2 W_{m2}}{I_2^2}$$

$$3. \text{ eset: } I_1 \neq 0 \text{ és } I_2 \neq 0 \rightarrow \bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 \rightarrow \bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 \rightarrow W_m \neq W_{m1} + W_{m2}$$

33, INDUKCIÓSI JELENSÉGEK

NYUGALMI $\leftarrow$ ha $\vec{B}$ változik

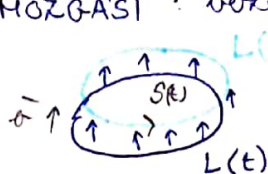
$$\mu_i = -\frac{d\psi_s}{dt}$$



$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \mu_i$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

MOZGÁSI: vezető darab mozog a térben képest



$$\mu_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

$$\mu_i = \mu_{ny} + \mu_m \leftarrow \text{egyesített indukciós tv!}$$

$$\oint_L (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \mu_i$$

Össz a menettel együtt mozgó koordinátarendszerben mérjük

$$\mu_i = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = -\frac{d\psi_s}{dt}$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{indukált fesz: } \mu_i \triangleq \oint_L \vec{E} d\vec{l}$$

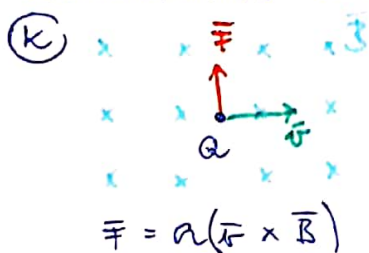
$\vec{E}$ transzformációira

- relativisztikus megközelítés
- klasszikus relativisztikus $\rightarrow \frac{v^2}{c^2} \approx 0$
- nem relativisztikus

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}'$$

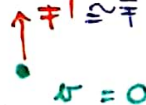
$$\frac{v^2}{c^2} \approx 0, \frac{v}{c} \approx 0$$

DIFFERENCIÁLIS OHM-TV



$$\vec{E} = \alpha(\vec{v} \times \vec{B})$$

(K') K-hoz képest $\vec{v}$ -vel mozog



$$\vec{B}' \approx \vec{B}$$

$$\vec{E}' \triangleq \frac{\vec{F}'}{q}$$

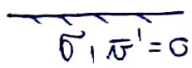
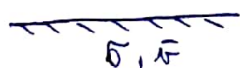
$$\text{alt. } \vec{E}' = \vec{E} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}$$

hozzáadódik a megfelelő térhez

ALKALMAZÁS

$$(K) \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$(K') \vec{j}' = \sigma \vec{E}' \quad \vec{j}' \approx \vec{j}$$



$$\text{elválasztás: } \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{be}) + \vec{j}_{be}$$

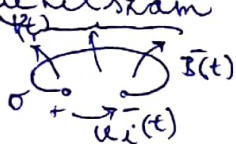
$$\vec{E}_{be} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{j}_{be} = 0$$

Közegmozgás egy beiktatott ténerősséget hoz létre, ami a töltéseket mozgatra bírja

← Ebben az esetben sem a vezető, sem a mágneses mező nem mozog. Itt indukciót az időben változó fluxus hozza l re (MII - Faraday), amit az időben változó áram kelt (MI - G ng r l n )

N mérőszámú eseten: $\mathcal{U}_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$



← Ha egy időben állandó mágneses tér, illetve egy benne elhelyezkedő vezető darabot egymáshoz viszony atra mozgatunk, akkor a vezető k t v gponja között fesz letre g m rhet .

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_i = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

csak a mágneses t r okozta v rtatott vagy indukált t r ss ggel kell sz molni.

$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$

 g  $\vec{F}_i = q\vec{E}$

$$\mathcal{U}_i(t) = \int \vec{E}_i d\vec{l} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

Itt jelen g   g  is magy r zhat , hogy a v sebess ggel mozgó vezet  l hossz s g  darabja dt id  alatt $d\vec{a} = l \cdot \vec{v} \cdot dt$ fel letet $-d\Phi = \vec{B} \cdot l \cdot \vec{v} \cdot dt$ fluxusvonalat metsz, ahonnan az indukált fesz:

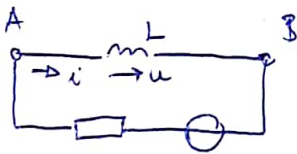
$$\mathcal{U}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \vec{B} \cdot l \cdot v$$

Itt megfogalmi is a mozgási indukció fizikai alapja más, de a k t jelenség egy g esen kezelhet  abban az  rtelemben, hogy a vezet  k r k fluxus nak megv ltoz sa, egy r kt a mágneses indukció id ster k ti megv ltoz sa miatt, m r r kt a vezet  keresztmetszet nek megv ltoz sa j n l re:

$$\mathcal{U}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B}(r,t) d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B}(r,t) \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \frac{\vec{B}(r,t)}{dt} d\vec{A} ?$$

$$R = \frac{\mathcal{U}}{I} = \frac{\oint E dl}{I}$$

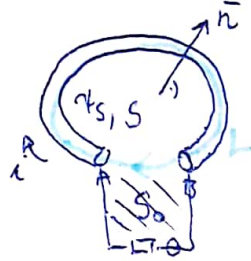
34. ✓ INDUKÁLT FESZÜTSÉG A KAPACSTESZÜLTSEGREN



$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$u_i = - \frac{d\psi_s}{dt} = - \frac{d(L \cdot i)}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -u$$

↑
a minusz jel



$$S_0: \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$$

$$u_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \underbrace{\int_A^B \vec{E} d\vec{l}}_{\text{kapocsfeszültség}} + \underbrace{\int_B^A \vec{E} d\vec{l}}_{-u} = -u$$

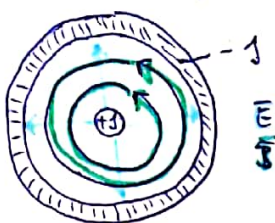
$$u = -u_i = -\left(-L \frac{di}{dt}\right) = L \frac{di}{dt}$$

↑
kapocsfeszültség

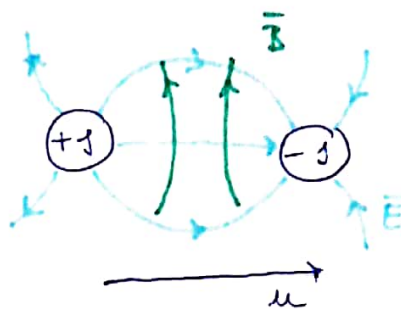
↑
indukált feszültség

36.) 2. TÁVVEZETÉK KONSTRUKCIÓK

KOAX



KÉTŐS VEZETÉK (LECHER)



κ' -erősen fr. függő

MIKRO ZALAG VONAL



"kvázi TEM"

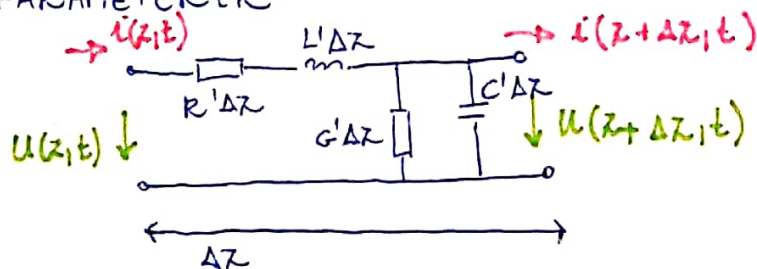
levegőben hűvűben vannak
teherörvög vonalak

KÖZÖS JELLEMZŐK:

- két vezetős rendszerek
- TEM terjedés $\rightarrow E_z = B_z = 0$
- $(U, I) \rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ hozzárendelhető a teljes $\vec{E}$ és $\vec{B}$ vektormező
- TV-n a jelenségek leírhatók egyetlen fesz. és áram adatokkal

$\downarrow$
 $\left. \begin{matrix} u(z,t) \\ i(z,t) \end{matrix} \right\}$ skalar adat, amelyből a mező rekonstruálható

PARAMÉTEREK:



$R'\Delta z$: Ohmos veszteség
 $L'\Delta z$: induktív fesz. esés
 $G'\Delta z$: kivárgási áram leáramlása
 $C'\Delta z$: kapacitív keresztáram leáramlása

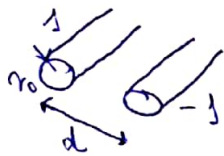
κ' : áramotokkal arányos veszteség $= \frac{R}{h} \left[\frac{\Omega}{m} \right]$

L' : mágneses térben tárolt energia áram $= \frac{L}{h} \left[\frac{H}{m} \right]$

G' : feszültséggel arányos veszteség $= \frac{G}{h} \left[\frac{S}{m} \right]$

C' : elektromos térben tárolt energia áram $= \frac{C}{h} \left[\frac{F}{m} \right]$

KÉTŐS VEZETŐVEL:



$$G' = \frac{\pi \sigma}{\ln \frac{d}{r}}$$

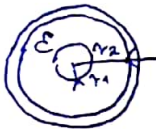
$$C' = \frac{q}{u} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d}{r}}$$

elektromos dipól

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{r}$$

$$k' = \frac{2}{\sigma A}$$

KOAX:



hengerkondai

$$C' = \frac{q}{u} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$G' = \frac{2\pi \sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$k' = \frac{1}{\sigma A_1} + \frac{1}{\sigma A_2}$$

k' erősen fr. függő!

LEGSZIGETELETESŰ ~~STB~~ TV:

$$\epsilon = \epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

$$L'C' \approx \mu_0 \epsilon = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r = \frac{c_r}{c^2}$$

$$H = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r} \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln \frac{d-r}{r} - \ln \frac{r}{d-r} \right) = \\ &= \frac{\mu I}{\pi} \ln \frac{d}{r} \end{aligned}$$

$$E_+ = \frac{q}{2\pi \epsilon} \frac{1}{r}$$

$$E_- = -\frac{q}{2\pi \epsilon} \frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) =$$

$$\frac{q}{2\pi \epsilon} \left(\ln \frac{r_0}{r_+} - \ln \frac{r_0}{r_-} \right) =$$

$$\frac{q}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_-}{r_+}$$

$$u = \varphi(r) - \varphi(d) =$$

$$= \frac{q}{2\pi \epsilon} \left(\ln \frac{d}{r} - \ln \frac{r}{d} \right) =$$

$$= \frac{q}{2\pi \epsilon} 2 \ln \frac{d}{r}$$

$$E = \frac{q}{2\pi \epsilon} \frac{1}{r}$$

$$\Phi = \frac{q}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

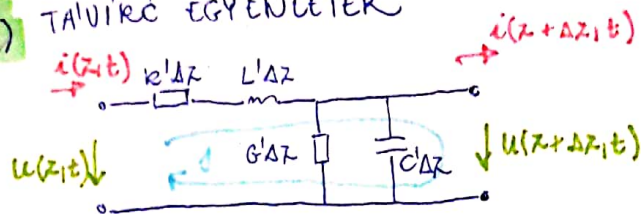
$$u = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{q}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\pi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\Phi' = \int u H = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Ha ideális a vezető, úgy belső induktivitás nincsen, csak külső, mert kizárul a belsőből a mágneses tér!

37.) TALVIRÓ EGYENLETEK



hurok: $u(z + \Delta z, t) - u(z, t) + R' \Delta z \cdot i(z, t) + L' \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z, t) = 0$

csomópont: $i(z + \Delta z, t) - i(z, t) + G' \Delta z \cdot u(z + \Delta z, t) + C' \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} u(z + \Delta z, t) = 0$

↓ ha $\Delta z \rightarrow 0$

TALVIRÓ EGYENLETEK:

↓
 $\frac{u(z + \Delta z, t) - u(z, t)}{\Delta z} = -R' i(z, t) - L' \frac{\partial}{\partial t} i(z, t)$

↓
 $\frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} = -G' u(z, t) - C' \frac{\partial}{\partial t} u(z + \Delta z, t)$

↓
 $-\frac{\partial u}{\partial z} = R' i + L' \frac{\partial i}{\partial t}$

↓
 $-\frac{\partial i}{\partial z} = G' u + C' \frac{\partial u}{\partial t}$

↓
 $-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \frac{\partial i}{\partial z} + L' \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t}$ → 2 szerinti deriváltak

↓
 $-\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G' \frac{\partial u}{\partial t} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ → 1 szerinti deriváltak

1 - be 2 - t

↓
 ÁLTALÁNOS 1D HULLÁMEGYENLET

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' G' u + (R' C' + L' G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ideális TV-nél: $R', G', d = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \leftarrow \text{hiperbolicus}$$

megoldás: $\forall$ folyamatosan differenciálható $f(x) - \pi$

$$u(z, t) = f\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

leghígebbes eset: $v = c$

ha dielektrikummal töltött: $v = \sqrt{\frac{c}{\epsilon_r}}$

38) HELMHOLTZ EGYENLET

↓
a tévítő egyenlet szinuszos, időbeli változásra vonatkozó alakja

az időbeli szinuszos állandósult állapot a feszültség és az áram komplex alakjával írjuk le

KOMPLEX AMPLITUDÓK

frekvenciátartomány:

↑
fázis lehet a hely függvénye
 $u(z,t) = \hat{u}(z) \cos(\omega t + \varphi_u(z)) \rightarrow u(z,t) = \operatorname{Re} \{ \bar{u}(z) e^{j\omega t} \} =$

↑
 $\bar{u}(z) = \hat{u}(z) e^{j\varphi_u(z)}$

$i(z,t) = \hat{i}(z) \cos(\omega t + \varphi_i(z)) \rightarrow i(z,t) = \operatorname{Re} \{ \bar{i}(z) e^{j\omega t} \}$

↑
 $\bar{i}(z) = \hat{i}(z) e^{j\varphi_i(z)}$

Helmholtz: $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega$

$-\frac{d\bar{u}(z)}{dz} = R' \bar{i}(z) + L' j\omega \bar{i}(z) = (R' + j\omega L') \bar{i}(z)$

$-\frac{d\bar{i}(z)}{dz} = G' \bar{u}(z) + C' j\omega \bar{u}(z) = (G' + j\omega C') \bar{u}(z)$

↓
 $\bar{i}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\bar{u}(z)}{dz}$

↑
 $\frac{1}{R' + j\omega L'} \left(-\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} \right) = (G' + j\omega C') \bar{u}(z)$

HELMHOLTZ EGYENLET:

$\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} - \overbrace{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}^{\gamma^2} \bar{u}(z) = 0 \leftarrow 1D$

def: TERJEDESI EGYÜTHATÓ

$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \left[\frac{1}{m} \right] \quad 0 < \gamma < \pi$

$\gamma = \alpha + j\beta$
↑
csillapítás $\left[\frac{1}{m} \right]$ fázistényező $\left[\frac{\text{rad}}{m} \right]$

1D-ALAK: $\frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{u} = 0$

A'LTALA'NOS MEGOLDÁS:

próba fv: $\bar{u}(z) = \bar{u}_0 e^{\bar{k}z}$

$$\bar{k}^2 \bar{u}_0 e^{\bar{k}z} - \bar{Y}^2 \bar{u}_0 e^{\bar{k}z} = 0$$

$$\bar{k}^2 - \bar{Y}^2 = 0$$

$$\bar{k} = \pm \bar{Y}$$

A'LTALA'NOS MEGOLDÁS A TESSZÜLTSEGRE

$$u(z) = \bar{u}^+ e^{-\bar{Y}z} + \bar{u}^- e^{\bar{Y}z} \quad u^+, u^- \text{ tetszőleges}$$

$$\bar{Y}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\bar{u}(z)}{dz} = \frac{\bar{Y}}{R' + j\omega L'} u^+ e^{-\bar{Y}z} - \frac{\bar{Y}}{R' + j\omega L'} u^- e^{\bar{Y}z}$$

HULLÁMIMPEDANCIA

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

A'LTALA'NOS MEGOLDÁS AZ ÁRAMRA

$$\bar{Y}(z) = \frac{\bar{u}^+}{Z_0} e^{-\bar{Y}z} - \frac{\bar{u}^-}{Z_0} e^{\bar{Y}z}$$

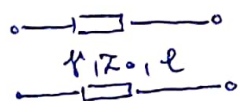
$$\bar{Y}(z) = \bar{Y}^+ e^{-\bar{Y}z} + \bar{Y}^- e^{\bar{Y}z}$$

egyenletek:

$$\bar{u}(z) = \bar{u}^+ e^{-\bar{Y}z} + \bar{u}^- e^{\bar{Y}z}$$

$$\bar{Y}(z) = \frac{\bar{u}^+}{Z_0} e^{-\bar{Y}z} - \frac{\bar{u}^-}{Z_0} e^{\bar{Y}z}$$

definiciának egy távvezeték szakaszt:



Y/Z_0 : hullámparaméterek

megoldás értelmezése:

teh $u^- = 0$, $u^+ = u_0 e^{j\tau}$, $Y = \alpha + j\beta$, $u^+ \in \mathbb{R} \rightarrow \tau = 0$

$$u(z) = u^+ e^{-\bar{Y}z} = u^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = u_0 e^{j\tau} e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

$$u(z, t) = \text{Re} \{ u(z) e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ u^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \} =$$

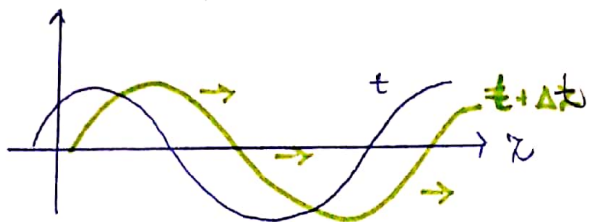
$$= u^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) = \text{Re} \{ u_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z + \tau)} \}$$

$$\alpha = 0 \quad u(z, t) = u_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \tau) = u_0 e^{-\alpha z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\beta}{\omega} z \right) + \tau \right]$$

$$u(z, t) = u^+ \cos(\omega t - \beta z) = u^+ \cos \left(\omega t - \left(\frac{\beta}{\omega} \right) z \right)$$

$\frac{\beta}{\omega} z \rightarrow$ térben és időben szinuszos
 $\frac{\beta}{\omega} z \rightarrow$ távolsággal arányos

helyől függő fázis, ami egy haladáshoz felel meg, ahol a terjedés sebessége: $\frac{\omega}{\beta}$



a függvénynek van idő és térbeli periodicitása

✓ időpontban a hely függvényében szimuláció
✓ helyen az idő függvényében

sebesség: $v = \frac{\omega}{\beta}$



fázis sebesség, amelyet azonosítunk a hullám terjedési sebességével

periodicitás:

időbeli: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

térbeli: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

ha $U \neq 0, U' = 0 \rightarrow -z$ irányú hullám $U \cdot e^{jz} \cos(\omega t + \beta z)$
azt: egymással szembe haladó hullámok,
haladási irányban ellentétesek $(-z)$

ideális TV: $R' = G' = 0 \rightarrow$ ideális vezető és szigetelő

$\gamma = \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C'} = j\omega \sqrt{L'C'} = j\beta \rightarrow$ csak képző rész van, ami a fázistényező

$\beta = \omega \sqrt{L'C'}$

↓
ideális TV csapadékosan hullámok szét
 $\alpha = 0$

fázis sebesség: $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$ ← diszperziómentes: v ω -tól független, ϵ_r független.

az így kapott terjedési sebesség frekvenciafüggetlen általánosan ideális és lossy vezetők

$v = c$

$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$

$\alpha = 0$

HULLÁMIMPEDANCIA

$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Re}\{Z_0\} \geq 0$

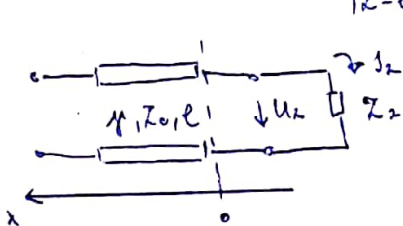
"hullámellenállás", mert tisztán való ideális esetben

39.) REFLEXIÓ TÉNYESZŐ: szubsztrát hullámok komplex csillapítási arányát

$$\bar{\Gamma} = \frac{\bar{U}_{\text{reflektált}}}{\bar{U}_{\text{beérő}}} \Big|_{z=l}$$

a lezáráson

$$\bar{\Gamma}_Z = \frac{U^- e^{\gamma l}}{U^+ e^{-\gamma l}} = \frac{U^-}{U^+} e^{2\gamma l}$$



egyen $x = l - z$

$$z = l - x$$

viszavert

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma(l-x)} + U^- e^{\gamma(l-x)} = \underbrace{U^+ e^{-\gamma l}}_{U_2^+} e^{\gamma x} + \underbrace{U^- e^{\gamma l}}_{U_2^-} e^{-\gamma x} = U_2$$

általános Helmholtz megoldások az új rendszerben:

$$U(x) = U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}$$

beérő $\rightarrow$ reflektált

$$U_2^- = \Gamma_2 U_2^+ \leftarrow \bar{\Gamma}_2 = \frac{U_2^- e^{-\gamma l}}{U_2^+ e^{\gamma l}} = \frac{U_2^-}{U_2^+}$$

$\Downarrow$

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= U_2^+ (e^{\gamma x} + \Gamma_2 e^{-\gamma x}) \\ I(x) &= \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{\gamma x} - \Gamma_2 e^{-\gamma x}) \end{aligned} \right\} \text{újra megoldásához}$$

az áram reflexió tényezője a feszültség reflexió tényezőjének (-1) -eszerese ugyanazon a lezáráson.

$$I_2^- = -\Gamma_2 I_2^+$$

$$U_2^- = \Gamma_2 U_2^+$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{U(x=l)}{U(x=0)} = \frac{U_2^+ (1 + \Gamma_2)}{\frac{U_2^+}{Z_0} (1 - \Gamma_2)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \\ \text{ kifejezve } \Gamma_2 \text{-vel: } \Gamma_2 &= \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \end{aligned} \right\}$$

SPECIÁLIS LEZÁRÁSOK
1. ILLESZTETT LEZÁRÁS

ha $\text{Re}\{Z_2\} > 0$ passzív lezárás esetén
és $\text{Re}\{Z_0\} \geq 0 \Rightarrow |\Gamma_2| \leq 1$ egyenlőségkoránál

TV-t egy hullámimpedanciájának megfelelő impedanciával zárjuk le ($Z_2 = Z_0$)

$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 0 \rightarrow \text{nincs reflexió}$$

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z}$$

$$U(x) = U_2^+ e^{\gamma x} \text{ nincs reflektált tényező}$$

nézzük TV

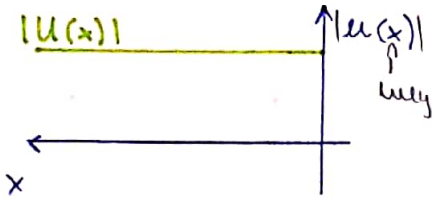
$$\Gamma_2 = 0 \leftarrow \text{tiszta haladó hullám} \leftarrow P$$

2. $Z_2 \rightarrow \infty$ $\left\{ |\Gamma_2| = 1 \rightarrow \text{teljes reflexió} \rightarrow \text{tiszta visszavert hullám} \leftarrow R$
3. $Z_2 = 0$

IDEÁLUS ESET:

$$\gamma = j\beta$$

$$U(x) = U_2 e^{j\beta x} \rightarrow |U(x)| = |U_2| = \text{const.}$$



Ha nincs reflektált komponens, akkor tisztán haladó a hullám

↓
amplitudó eloszlása a TV mentén állandó

$$U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + r_2 e^{-j\beta x})$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} - r_2 e^{-j\beta x})$$

2. NYITOTT VÉGŰ TV: $I=0$ csúcspont a táplózati végén

$$\left. \begin{matrix} Z_2 = \infty \\ r_2 = 0 \end{matrix} \right\} \text{ideális}$$

$$|r_2| = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 1 \quad \text{teljes visszaverődés} \leftarrow \text{tiszta visszahullám} \in \mathbb{R}$$

helyek nem változnak

$$|r_2| = 1 \Leftrightarrow |U_2^+| = |U_2^-| \quad \text{bejövő és reflektált hullámok amplitúdója azonos} \quad \angle(r_2) = 0$$

TELSZÖLTSEG:

$$U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2 U_2^+ \cos(\beta x)$$

↑
legyen valóban $t=0$ -ban: $U_2^+ \in \mathbb{R}$ pozitív

$$U(x, t) = \text{Re} \{ U(x) e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ 2 U_2^+ \cos(\beta x) e^{j\omega t} \} = 2 U_2^+ \cos(\beta x) \cos(\omega t)$$

$$i(x, t) = - \frac{U_2^+}{Z_0} 2 \sin(\beta x) \sin(\omega t)$$

amplitudó

keressük az $i(x, t) = 0$ helyeket!

$$\sin(\beta x) = 0 \quad \beta = \frac{k\pi}{\lambda}$$

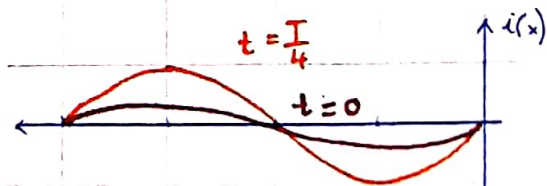
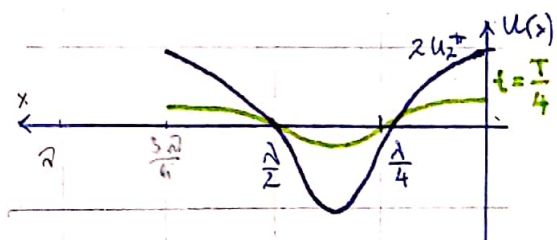
$$\beta x = k\pi \quad \downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{\beta} k = \left(\frac{\lambda}{2} \right) k \quad \leftarrow \text{itt lesznek az áram nullhelyei}$$

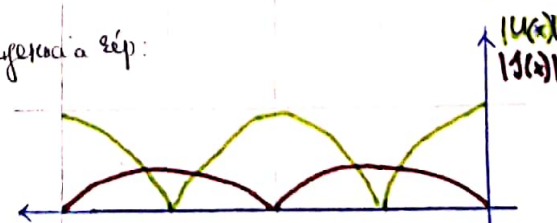
• fél λ és áram között idő és hossz szerint is van egy negyed periódusnyi kécs

• van egy pillanat, amikor a TV energiája teljes egészében az E térben tárolódik
 $t=0 \quad U = \text{max} \quad I = 0$

• van egy pillanat, amikor a TV energiája teljes egészében a B térben tárolódik
 $t = \frac{T}{4} \quad U = 0 \quad I = \text{max}$



interferencia kép:

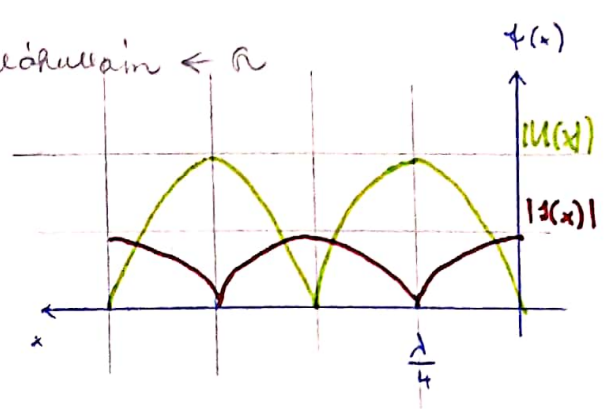


3. RÖVIDRE ZÁRT TV: $Z_2 = 0$
 $u=0 \rightarrow$ csomópont $\alpha=0$ ideális visszai átlókulcs $\leftarrow R$

$$\gamma = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1 \quad \text{teljes visszaverődés}$$

$$u(x) = u_2^+ (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = 2j u_2^+ \sin(\beta x)$$

$$I(x) = \frac{u_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) = \frac{2 u_2^+}{Z_0} \cos(\beta x)$$



DE: felbontás peremfeltétel; utatörés
 időben kezdési feltétel

40. $\operatorname{Re}\{z_2\} \geq 0$
 ideális eset : $\alpha = 0 \rightarrow \gamma = j\beta$ ideális
 $z_0 = \sqrt{\frac{K^2 + j\omega L}{2 + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{2C}} \in \mathbb{R}^+$
 $\bar{\tau}_2 = \frac{z_2 - z_0}{z_2 + z_0} = \tau e^{j\varphi} \quad \tau \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

$$u(x) = u_2^+ (e^{j\beta x} + \tau e^{j\varphi} e^{-j\beta x}) = \underbrace{u_2^+ e^{j\beta x}}_{\text{haladó}} - \underbrace{u_2^+ \tau e^{j\varphi} e^{-j\beta x}}_{\text{visszatérő}} + u_2^+ \tau e^{j\beta x} + u_2^+ \tau e^{j\varphi} e^{-j\beta x}$$

$$= u_2^+ e^{j\beta x} (1 - \tau) + u_2^+ \tau e^{j\frac{\varphi}{2}} \left[e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} + e^{-j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} \right] =$$

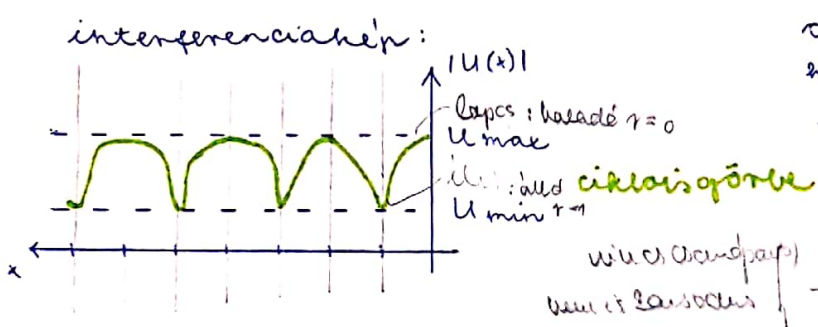
$$= \underbrace{u_2^+ e^{j\beta x} (1 - \tau)}_{\text{haladó}} + \underbrace{2 u_2^+ \tau e^{j\frac{\varphi}{2}} \cos(\beta x - \frac{\varphi}{2})}_{\text{álló}}$$

ÁLLÓ - HALADÓ HULLAM FELBONTÁS:

$$u(x) = u_H(x) + u_A(x) = u_2^+ e^{j\beta x} (1 - \tau) + 2 u_2^+ \tau e^{j\frac{\varphi}{2}} \cos(\beta x - \frac{\varphi}{2})$$

$$|u_H(x)| = |u_2^+| (1 - \tau) |e^{j\beta x}| = |u_2^+| (1 - \tau) = \text{konst} \rightarrow \text{haladó, nem függ } x\text{-től}$$

$$|u_A(x)| = 2 |u_2^+| \tau |e^{j\frac{\varphi}{2}}| |\cos(\beta x - \frac{\varphi}{2})| = 2 |u_2^+| \tau |\cos(\beta x - \frac{\varphi}{2})| \quad x\text{-től függ}$$



csomópontjai vannak a hely függvényében
 $\exists x \quad u_A(x) = 0 \rightarrow \text{álló}$
 ↓
 csomópontjai vannak a hely függvényében
 $\exists x \quad u_A(x) = 0 \rightarrow \text{álló}$
 ↓
 álló és haladó közötti
 csomópontok
 tartózkodás

$$I(x) = \frac{u_2^+}{z_0} (e^{j\beta x} + \tau e^{j\varphi} e^{-j\beta x})$$

Teljesítmény eloszlás esetén a teljesség kedvéért a hullámok
 előállításához egy álló és egy haladó hullám összegezését

41.) ESZ. AMPLITUDE MIN / MAX HELYEN

$$U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + \tau e^{j\beta l} e^{-j\beta x}) = U_2^+ e^{j\beta x} (1 + \tau e^{j\beta(l-x)}) = U_2^+ e^{j\beta x} (1 + \tau e^{-j(2\beta x - l)})$$

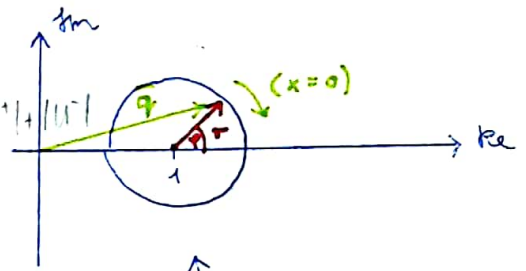
$$|U(x)| = |U_2^+| \underbrace{|1 + \tau e^{-j(2\beta x - l)}|}_{\rho(x) \text{ helyszíni visszaverési együttható}}$$

$U_{\max}$ akkor lép fel, ha $\beta x - \frac{l}{2} = k\pi$

$$U_{\max} = \max_x |U(x)| = |U_2^+| (1 + \tau) = |U_2^+| + |U_2^-| = |U^+| + |U^-|$$

$U_{\min}$ akkor lép fel, ha $\beta x - \frac{l}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$U_{\min} = \min_x |U(x)| = |U_2^+| (1 - \tau)$$



ÁLLÓHULLÁMARÁNY (VSWR) - Voltage Standing Wave Ratio

teljesítmény-
szint
mérés
maximális
és minimális
feszültség amplitúdójának
hányadosa

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \quad \sigma \in [1, \infty]$$

haladó $\sigma = 1$ -
vagyis 0 visszaverés
azaz $\sigma = \infty$, $|\tau| = 1$

- egy hullámhossz alatt kétszer fordul körbe $(2\beta x)$ - ennek az abszolút értéke egyenlő a körös görbét.
- állóhullám esetén a kör érinti az origót, mert akkor $U(x)$ konstans, tehát $\frac{U_2^+}{U_2^-} = 1 \Rightarrow \tau = 1$ teljes.

Nagyszámú a hozzávezetések is bevezethetők a mérésbe.

hullámvezetőként viselkednek

Mérhető VSWR egy távezeték végén csatlakoztatva mérőszalaggal / multiméterrel.

Keressen a max és min értékeket.

$$\begin{cases} \text{megfigyelés: } U_{\max} = |U_2^+| (1 + \tau) = |U_2^+| + |U_2^-| = |U^+| + |U^-| > \text{korrelációval} \\ U_{\min} = |U_2^+| (1 - \tau) = |U_2^+| - |U_2^-| = |U^+| - |U^-| \\ \text{haladó hullám P-t szálait} \\ \text{állóhullám B-ka közt van} \end{cases}$$

NAGYFREKVENCIA'S Z MÉRÉS:

- csak TV nagy távolságra végén lehet impedanciát mérni
- nagyfeszültségű hordozóvezeték nem alkalmazhatóak
- állóhullámárnyék kell mérni a távezetéken

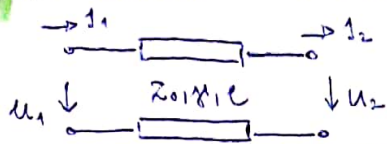
↓
meghatározható

• $\tau \rightarrow Z_2$ meghat.

$$\tau = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$$

ℓ kell és
először ismert impedanciával,
majd ismeretlen
impedanciával

43) TV LANCZPARAMÉTEREK



Helyettesítve egyenletet állapítva megkapjuk

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$U_1 = A_{11} U_2 + A_{12} I_2$$

$$I_1 = A_{21} U_2 + A_{22} I_2$$

továbbá meg:

$$z=0: U_1 = U^+ + U^-$$

$$I_1 = \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0}$$

$$z=l: U_2 = U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l}$$

$$I_2 = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma l}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \\ \frac{1}{Z_0} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ e^{-\gamma l} \frac{1}{Z_0} & -e^{\gamma l} \frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \cosh(j\beta l) &= \cos(\beta l) \\ \sinh(j\beta l) &= j \sin(\beta l) \end{aligned} \right\} \text{trig. azonosságok}$$

ideális TV-n:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j Z_0 \sin(\beta l) \\ j \frac{\sin(\beta l)}{Z_0} & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

$$\alpha=0$$

$$\gamma=j\beta$$

$$U_1 = \cos(\beta l) U_2 + j Z_0 \sin(\beta l) I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_0} j \sin(\beta l) U_2 + \cos(\beta l) I_2$$

$$\cosh(\gamma l) = \cosh(\alpha l + j\beta l) = \cosh(\alpha l) \cos(\beta l) + j \sinh(\alpha l) \sin(\beta l)$$

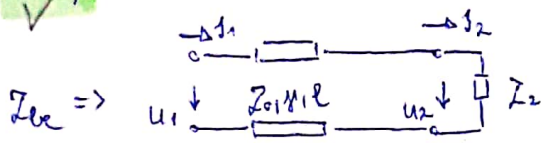
$$\sinh(\gamma l) = \sinh(\alpha l + j\beta l) = \sinh(\alpha l) \cos(\beta l) + j \cosh(\alpha l) \sin(\beta l)$$

tulajdonságok:

reciprokus, mert $\det \underline{\underline{A}} = \cosh^2(\gamma l) - \sinh^2(\gamma l) = 1 \checkmark$

szimmetrikus, mert $\underline{\underline{A}}_{11} = \underline{\underline{A}}_{22} \checkmark$

44. TV. BEHETETI IMP.



$$Z_{be} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{u_2 \cosh(\gamma l) + Z_0 i_2 \sinh(\gamma l)}{\frac{u_2}{Z_0} \sinh(\gamma l) + i_2 \cosh(\gamma l)} \stackrel{Z_0}{\times} = Z_0 \frac{\left(\frac{u_2}{i_2}\right) \cosh(\gamma l) + Z_0 \sinh(\gamma l)}{\left(\frac{u_2}{i_2}\right) \sinh(\gamma l) + Z_0 \cosh(\gamma l)} =$$

hasznosítsd az áram

komplex amplitúdókat

$$\text{hányados} = Z_0 \frac{Z_2 \cosh(\gamma l) + Z_0 \sinh(\gamma l)}{Z_2 \sinh(\gamma l) + Z_0 \cosh(\gamma l)}$$

ideális eset:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos(\beta l) + j Z_0 \sin(\beta l)}{j Z_2 \sin(\beta l) + Z_0 \cos(\beta l)} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \cos \beta l \neq 0}}{=} Z_0 \frac{Z_2 + j Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + j Z_2 \tan \beta l}$$

spec. eset: $Z_2 = Z_0 \rightarrow$ illesztett $\rightarrow Z_{be} = Z_2 = Z_0$

$$\begin{cases} Z_2 = 0 \rightarrow Z_{be} = j Z_0 \tan \beta l = Z_{be,rx} \\ Z_2 \rightarrow \infty \rightarrow Z_{be} = -j Z_0 \cot \beta l = Z_0 \frac{1}{j \tan \beta l} = Z_{be,ij} \\ (l \rightarrow \infty) \rightarrow Z_{be} = Z_0 \end{cases}$$

nyitott végű vagy rövidre kötött TV-en tetszőleges impedancia előállítható a hossz megfelelő megválasztásával

$$Z_0 = \sqrt{Z_{be,rx} \cdot Z_{be,ij}} \quad \text{mértani közép}$$

$$\tan(\beta l) = \sqrt{\frac{Z_{be,rx}}{Z_{be,ij}}}$$

45.) SZABADTÉRI HULLÁMTERJEDÉS → r.h. hullám

MODELLFELTÉTELEK

homogén, lineáris, izotrop közeg → $\sigma, \epsilon, \mu = \text{konst}$

forrásmentes: $\rho = 0, E_{\text{ext}} = 0, j_{\text{ext}} = 0$

de $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ áramokat megengedünk a közegben

helyfel független áramok

MAXWELL: csak $\vec{E}$ és $\vec{H}$: hullámterjedés

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

↑
vezetési
áram

↑
előrebbi
áram

↑ áram, ami folyik az $\vec{E}$ terénősségtől függ, ezért
írhadjuk fel a vezetési
áramokat $\vec{E}$ -vel

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \mu \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

HOMOGEN V HULLÁM EGYENLET $\vec{E}$ -RE:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) =$$

$$= -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

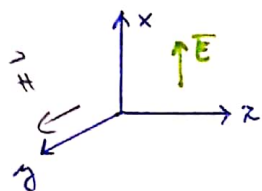
$$\text{rot rot } \vec{E} = \underbrace{\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}}_{=0} = -\Delta \vec{E}$$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \leftarrow \text{hullámegyenlet}$$

$$= 0$$

46.) TÉRERŐSSÉGVÉKTOR KOMPLEX AMPLITUDÓJA

HEGKÖZELÍTÉSEK: hullámegyenletről végtelen sz. megoldása van.



Olyan megoldásokat keresünk, ahol $\vec{E}$ csak x irányú.

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(z, t) \cdot \vec{e}_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0 \leftarrow \text{csak } z \text{ irányú a változás}$$

t hullámfrontok párhuzamos síkokat alkotnak.

SZINUSZOS IDŐBELI VÁLTOZÁS:

$$E_x(z, t) = \underbrace{\hat{E}_x(z)}_{\text{amplitúdó}} \cos(\omega t + \varphi(z)) = \text{Re} \left\{ \underbrace{\hat{E}_x(z)}_{\text{komplex amplitúdó}} e^{j\omega t} \right\}$$

HELMHOLTZ EGYENLET $\vec{E}$ -RE:

$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \cancel{\Delta E_y \vec{e}_y} + \cancel{\Delta E_z \vec{e}_z}$$

$\uparrow$ ez van csak

Skalár
Laplace

$$\Delta \vec{E}_x = \underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}}_0 \leftarrow \text{csak ez a változás van}$$

komplex amplitúdó: $E_x(z, t) \rightarrow \bar{E}_x(z)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2 \bar{E}_x}{dz^2} - j\omega \mu \sigma \bar{E}_x - (j\omega)^2 \mu \epsilon \bar{E}_x = 0$$

skalár
komplex egyenlet

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\downarrow \text{egyen: } \gamma = \sqrt{j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon)} \quad \text{terjedési együttható}$$

$$\frac{d^2 \bar{E}_x}{dz^2} - \gamma^2 \bar{E}_x = 0 \leftarrow \text{Helmholtz - egyenlet}$$

$\downarrow$ általános megoldás

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ e^{-\gamma z} + \bar{E}^- e^{\gamma z}$$

$z^+ \rightarrow$ irányba terjedő
szinuszos hullámok és a

síkharmon:

Ide vesszük egy a terjedési irányra merőleges síkot, akkor ennek a síknak $\forall$ pontjában u.a. lesz a térerősség. Az amplitúdó és a fázis egy a z tengelyre merőleges síkban a sík minden pontjában ugyanaz.

47.) SÍKHULLÁM ID HELMHOLTZ

HELMHOLTZ EGYENLET

$$\Delta \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x \leftarrow \text{csak } x \text{ komponens}$$

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \text{ csak } z \text{ irányú változása van}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \vec{E}_x = 0, \text{ ahol } \gamma = \sqrt{j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon)}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

SÍKHULLÁM:

A hullámfrontok egymással párhuzamos síkok, melyek egyenletes sebességgel haladnak a közeg normálisuk irányába. A hullámegyenlet egy olyan megoldása, amely nem függ külön-külön a helytől és az időtől.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \vec{E} \text{ kizárólag } x \text{ irányú} \\ \bullet \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{csak } z \text{ irányú változás} \\ \bullet \vec{E}(x, y, z, t) = E(z, t) \cdot \vec{e}_x \end{array} \right.$$

TEM: transzverzális elektromos mágneses

A villamos és mágneses térerősségek is csak a hengerek merőleges síkban van komponense.

$$E_z = 0, H_z = 0$$

$$\vec{E} \perp \vec{H} \quad \vec{E}, \vec{H} \perp \vec{e}_z$$

SÍKHULLÁM - TV ANALÓGIA:

TV	u	i	R'	L'	C'	G'
SÍKHULLÁM	E_x	H_y	$-$	μ	ϵ	σ

$$\vec{E}_x(z) = \vec{E}^+ e^{-\gamma z} + \vec{E}^- e^{\gamma z}$$

$$\vec{H}_y(z) = \frac{\vec{E}^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{\vec{E}^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

KORLÁTOK

polarizáció: síkhullámoknál detalános állapot

közegekhatár: síkhullám és közegekhatár viszonya

Ha nem merőleges a vésés, TV analógia nem használható. reflexus hullám nem ugyanazon az útvonalon tér vissza

K' miatt hiányzik:

- TV K' a vezeték hosszirányba folyó áramához /
fesz. eséséhez kell
- ha a vezető nem ideális

↓

$\exists$ z irányú $\vec{E}$ tér, amikor anyaghatáron a tangenciális komponense folytonosan megy át, így a vezető körül is lesz z irányú tér

↓

nem TEM! de rézhullámvia TEM terjedés van

6 nem jó model

- stacionárius sebességhatározás meg
mellőzve: atpolarizációs során vezeték helyekhez, amit
okkerfeldp σ nem vesz figyelembe, csak a vezetési vezetékkel
vezeték, σ hely: polarizációs vezeték: szinuszos időfü.

$$\vec{E} = \epsilon' \vec{E}''$$

KÖZEG HULLÁMHÍMPEDANCIÁJA

$$Z_0 = \frac{j\omega\mu}{\uparrow} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

frekvenciafüggő

$$Z_0 = \frac{Z' + j\omega L}{\uparrow} = \frac{Z' + j\omega L}{\sqrt{(Z' + j\omega L)(G' + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{Z' + j\omega L}{G' + j\omega C}}$$

48.) GYKULLA'N IDEÁLIS SZIGETELŐBEN / dielektrikusban

ideális dielektrikum : $\sigma = 0, \epsilon \in \mathbb{R}$
 $\mu = \mu_0$

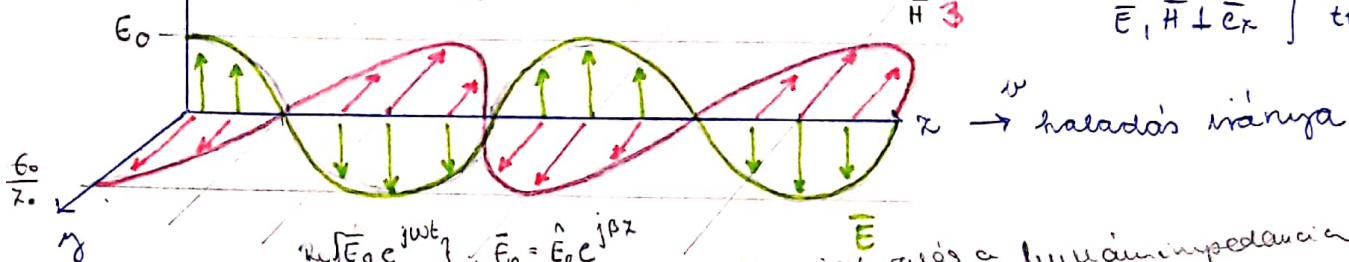
$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j\beta, \alpha = 0 \rightarrow \text{tiszta hirtelen}$$

hullám fázis sebessége: $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 [\Omega]$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

HULLÁMKEP: $t=0$ $\vec{E}_x = 0, \vec{E}_y = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \beta z)$
 egy irányú terjed: odafele halad $\vec{E} \perp \vec{H}$
 $\vec{E}, \vec{H} \perp \vec{e}_z$ } TEM terjedés



$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega(t - \frac{\beta}{\omega}z))$$

$$H_y(z,t) = \frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega(t - \frac{\beta}{\omega}z))$$

miért van a hullámimpedancia? $\vec{E}$ és $\vec{H}$ időben fázisban vannak, térben 90°-kal el vannak tolva HA ideál. zártságra, min. fizikailag

$\epsilon \in \mathbb{R} \rightarrow$ elterjedés $e^{j\omega t}$ -ben

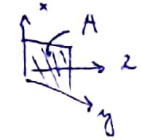
49) ENERGIA TERJEDÉSE SÍKHULLÁMBAN

spec: síkhullám, (ideális dielektrikumban) $\rightarrow \epsilon \neq 0, \epsilon \in \mathbb{R}$
 idő + z irányú terjedés

$$\vec{E}_x(z) = \vec{E}^+ e^{-j\beta z} = |\vec{E}^+| e^{j\varphi} e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H}_y(z) = \vec{H}^+ e^{-j\beta z} = |\vec{H}^+| e^{j\varphi} e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H}^+ = \frac{\vec{E}^+}{Z_0}$$



$$P(z) + jQ(z) = \frac{1}{2} U(z) I^*(z) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{H}^*$$

LEVEZETÉS:

$$\begin{cases} E_x(z,t) = |\vec{E}^+| \cos(\omega t - \beta z + \varphi) \\ H_y(z,t) = |\vec{H}^+| \cos(\omega t - \beta z + \varphi) \end{cases}$$

axialis, ideális dielektrikum

$$A \left(\frac{1}{2} \vec{E}_x \vec{H}_y^* \right) = P_A + jQ_A$$

vegyértékhatásműködés

$$\cos^2(\kappa) = \frac{1 + \cos(2\kappa)}{2}$$

$$S_z(z,t) = \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{E}_x \vec{e}_x) \times (\vec{H}_y \vec{e}_y) = S_z \vec{e}_z$$

parametrikus

$S_z(z,t) = |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| \cos^2(\omega t - \beta z + \varphi) = \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| + \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$
 időbeli átlag $\Leftrightarrow$ határos teljesítmény $\rightarrow$ egyidejű felületen áthaladó határos teljesítmény

$$S_{avg}(z) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T S_z(z,t) dt = \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| \leftarrow \text{határos teljesítmény-sűrűség (z-től függően)}$$

ÉRTELMEZÉSE:

"A" kont felületre $\rightarrow$ az integrálja S_{avg} -nak

$$P = \oint_A S_{avg} d\vec{A} \rightarrow S_{avg} = \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+|$$

KOMPLEX POYNTING-VEKTOR:

$$\vec{S} \triangleq \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

komplex vektor def:
 $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = \vec{E}_re + j\vec{E}_im$
 $\rightarrow$ lindex komplex

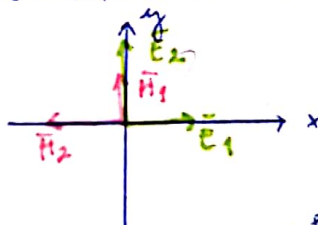
ÉRTELMEZÉS:

$P + jQ = c$ teljesítmény (S foglalt)

$$\text{ahol } P + jQ = \oint_A \vec{S} d\vec{A}$$

$$P = \text{Re} \left\{ \oint_A \vec{S} d\vec{A} \right\} \quad Q = \text{Im} \left\{ \oint_A \vec{S} d\vec{A} \right\}$$

POLARIZÁCIÓ: z irányú terjedés

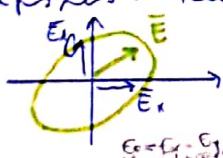


$$\begin{cases} E_x(t) = E_{x0} \cos(\omega t) \\ E_y(t) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \rightarrow \vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

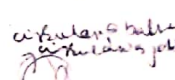
z=0 n.k.!

elipszis polarizáció $\rightarrow$ spec: cirkuláris

akárhány hullámot hozzáveszték, mindegy elipszis kapok



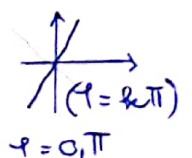
pozitív φ az óramutató járásával
 negatív φ az ellentétes irányban



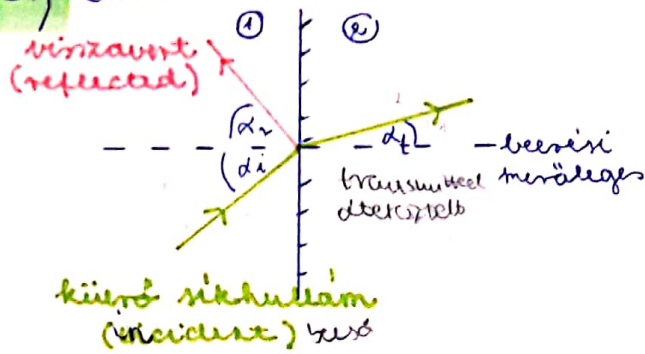
$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x + E_0 \vec{e}_y$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

lineáris



50.) SIKHULLAM ANYAGHATÁRON



Snellius - Descartes: $d_i = d_r$

$$\frac{\sin \alpha_t}{\sin \alpha_i} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}$$

törésmutató

MERŐLEGES BEESÉS:

$$d_i = 0 \rightarrow d_r = 0$$

$$\alpha_t = 0$$

- feltevések:
- homogén, izotrop, homogén felület
 - lineáris polarizáció
 - meglátásról való

$$E_1(z) = E_1^+ e^{-\gamma_1 z} + E_1^- e^{\gamma_1 z}$$

$$H_1(z) = \frac{E_1^+}{Z_{01}} e^{-\gamma_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} e^{\gamma_1 z}$$

$$\left. \begin{aligned} E_2(z) &= E_2^+ e^{-\gamma_2 z} \\ H_2(z) &= \frac{E_2^+}{Z_{02}} e^{-\gamma_2 z} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{csak odafele haladó komponens} \\ &\text{mivel reflexió} \\ &\text{nincs jelen} \end{aligned}$$

kapcsolat: folytonosság anyaghataáron

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (\gamma_s = 0) \text{ nincs felületi áram, dielektrikum}$$

TÁVVEZETEK ANALÓGIA:

$$z=0 \quad E_1^+ + E_1^- = E_2^+$$

$$\frac{E_1^+}{Z_{01}} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} = \frac{E_2^+}{Z_{02}}$$

ha E_1^+ ismert, akkor E_1^- és E_2^+ számítható
kell: $\Gamma_{12} + \tau_{12} = 1$

$$\Gamma_{12} \triangleq \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad \text{reflexió tényszerű}$$

$$\tau_{12} \triangleq \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad \text{transzmisszió tényszerű}$$



távvezeték analógia

lineáris polarizáció sikhullám esetén

51.) ÁTHULLAM VEZETŐBEN

Vezetőben ($\sigma \gg \omega \epsilon$) a vezetési áramok sokkal nagyobbak, mint az eltolási áramok. Vízvezetőben

TERJEDÉSI EGYÜTHATÓ:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{j} \sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$\rightarrow 0$, elhanyagolható

BEHATÁSAI MÉLYSÉG: SKIN-mélység

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \text{ [m]} \rightarrow \gamma = (1+j)\frac{1}{\delta}$$

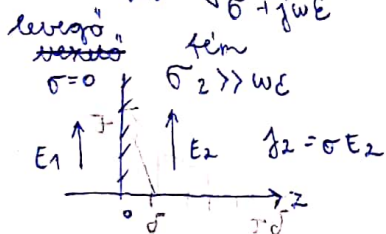
$$\alpha = \frac{1}{\delta} \rightarrow \beta = \frac{1}{\delta}$$

+ fémekben a villamosmérnöki frekvenciákon

$$\gamma = (1+j) \frac{1}{\delta} \text{ teljesül}$$

		50 Hz	1 MHz	1 GHz
Cu	$\sigma = 57 \frac{\text{MS}}{\text{m}}$ $\mu_r = 1$	$\sim 1 \text{ cm}$ 9.3 mm	66.7 μm	2.11 μm
Fe	$\sigma = 14,5 \frac{\text{MS}}{\text{m}}$ $\mu_r = 1000$	0.3 mm	2.03 μm	66 nm

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{\sigma^2}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$



$z > 0$

$$j_2(z) = \sigma E_2(z) = \sigma E_2^+ e^{-\gamma z} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$|j_2(z)| = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \delta = 6,28 \delta$$

$$|\beta| \approx 1, z > 5\delta$$

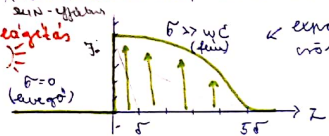
$$\frac{|j_2(z)|}{|j_0|} < 1\% \text{ ha } z > 5\delta$$

1 hullámhossz belül elenyészés
minis hullám
 $\downarrow$
nagyfrekvenciás áramterhelés
nagyfrekvencián gyakran csökken az
elektromágneses intenzitás FÉNYKÉPEN

$$\approx \frac{1}{e} \text{ és } 5\delta$$

52) ÁTKALKULÁSOK, KÖZELÉGI HATÁS

megjegyzés: $\delta \gg r_0$ (átlag) $\leftarrow$ exponenciális növekedés, növekedés mértéke δ -tól függ



$$E_z(z) = E_z^0 e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$j_z(z) = \delta E_z^0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\beta z} \quad z > 0$$

$$|j_z(z)| = \underbrace{\delta E_z^0}_{j_0} e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \tau \approx \delta \quad (\tau \text{ itt időállandó})$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta = 6.28\delta \quad \left. \begin{array}{l} \text{egy hullámhosszon belül} \\ \text{elcsúszás} \end{array} \right\}$$

$$|j_z| \approx 0, \quad z \gg 5\delta$$

ALKALMAZÁS:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma}} \sim \sqrt{\omega}$$

a) $\delta \gg r_0 \rightarrow$ az árameloszlás elhanyagolható, nincs arányosítás

az áram egyenletesen tölti ki a keresztmetszetet.

DC elemzés

$$K_0' = \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda^2 \pi} = K_{DC} \leftarrow \bar{j}(r) = \bar{j}_{DC}(r) = \frac{j}{r_0^2 \pi}$$

$$L_0' = \frac{\mu}{8\pi}$$

b) $\delta \ll r_0 \rightarrow$ mikromágnes analógia, az áram körkörös a felületen

$$K_1' = \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda^2 \pi \delta} > K_0' \leftarrow \bar{j}_0 = \frac{j}{2\pi r_0 \delta}$$

$$K_1' = \frac{K_0'}{\delta}$$

c) $\delta \sim r_0$: körös eset $\rightarrow$ Bessel fu./numerikus módszer

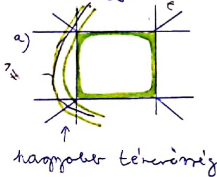


$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} K_1' = \infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} L_1' = 0$$

$\leftarrow$ ha az áram körkörös, akkor a indukciós tér is

KITEKINTÉS:



Barátságos vezetők esetén a hatások kölcsönösen vesznek részt a vezetékekben.

2) Proximity effektus: két vezető közötti indukciós áramok vesznek részt a vezetésben

az áram sűrűsége

ÁTKALKULÁS

$$\bar{j} = \bar{j}_{KF} + \bar{j}_{EC}$$

