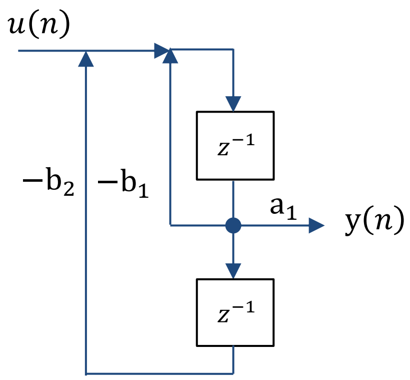
Méréselmélet 2. zárthelyi 2020.05.19.

1. A $H(z)=\frac{a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$ átviteli függvénnyel jellemezhető rendszer állapotváltozóit kellene megbecsülnünk. Vélelmezzük, hogy a rendszer belső struktúrája a direkt számítási struktúrának felel meg. Bemenetén multiszinuszos gerjesztést alkalmazunk. A paramétereket ismertnek tételezzük fel: $a_1=0.5,\ b_1=-1,\ b_2=0.5$. Tervezzen olyan megfigyelőt (azaz számítsa ki a megfigyelő ismeretlen paramétereit), amely képes a vizsgált rendszer állapotváltozóinak a lehető legrövidebb időn belüli meghatározására (max. 4 pont)! (A megfigyelési zaj elhanyagolható!) Ellenőrizze, hogy teljesül-e a megfigyelő sajátértékeire vonatkozó feltétel (max. 2 pont)! Hogyan függenek a megfigyelő ismeretlen paraméterei a b_2 értékétől (max. 1 pont)?

Megoldás:

A direkt struktúra jelfolyamgráfja:



Az állapotváltozós leírás:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C})^2=\boldsymbol{0}$ teljesüljön. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$

Egyenértékű feltétel, hogy a megfigyelő összes sajátértéke nulla.

$$\begin{bmatrix} -b_1-a_1g_0 & -b_2 \\ 1-a_1g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1-a_1g_0 & -b_2 \\ 1-a_1g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_1+a_1g_0)^2-b_2(1-a_1g_1) & b_2(b_1+a_1g_0) \\ -(b_1+a_1g_0)(1-a_1g_1) & -b_2(1-a_1g_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1-0.5g_0 & -0.5 \\ 1-0.5g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-0.5g_0 & -0.5 \\ 1-0.5g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-0.5g_0)^2-0.5+0.25g_1 & -0.5+0.25g_0 \\ (1-0.5g_0)(1-0.5g_1) & -0.5+0.25g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. A megfigyelő összes sajátértéke nulla feltétel:

$$det\begin{bmatrix} \lambda+b_1+a_1g_0 & b_2 \\ -1+a_1g_1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+b_1+a_1g_0)+b_2(1-a_1g_1) = \lambda^2+\lambda(b_1+a_1g_0)+b_2(1-a_1g_1)=0$$

Ebből is $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. A $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$ korrekciós tényezők nem függenek a b_2 paramétertől!

2. Valósítsa meg az 1. feladatban szereplő átviteli függvényt rezonátoros struktúrával, $z_0=1$ és $z_1=-1$ pozíciójú rezonátorok feltételezésével! A megvalósítás a blokkvázlat felrajzolását és a struktúra paramétereinek levezetését jelenti (max. 4 pont). Teljesül-e a választott megoldásnál a strukturális passzivitás feltétele (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$H(z)=\frac{a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} = \frac{\frac{r_0z^{-1}}{1-z^{-1}}w_0-\frac{r_1z^{-1}}{1+z^{-1}}w_1}{1+\frac{r_0z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{r_1z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(1+z^{-1})r_0z^{-1}w_0-(1-z^{-1})r_1z^{-1}w_1}{1-z^{-2}+(1+z^{-1})r_0z^{-1}-(1-z^{-1})r_1z^{-1}} =$$

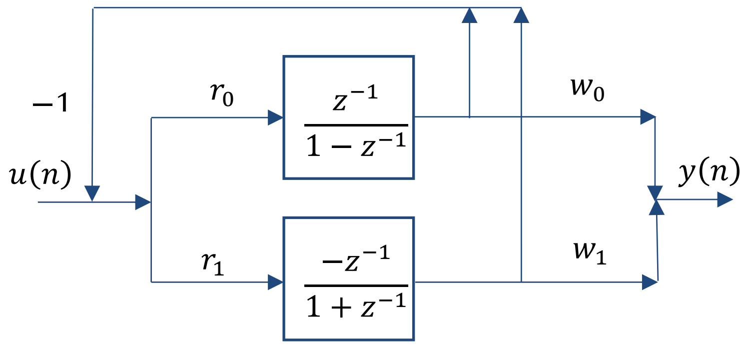
$$= \frac{(r_0 w_0 - r_1 w_1)z^{-1} + (r_0 w_0 + r_1 w_1)z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1)z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1)z^{-2}}$$

$r_0 - r_1 = b_1, r_0 + r_1 - 1 = b_2$, ahonnan

$$r_0 = \frac{1 + b_1 + b_2}{2} = 0.25, r_1 = \frac{1 - b_1 + b_2}{2} = 1.25,$$

ill.

$$w_0 = \frac{a_1}{1 + b_1 + b_2} = 1, w_1 = \frac{-a_1}{1 - b_1 + b_2} = -0.2,$$



A strukturális passzivitás feltétele nem teljesül, mert $r_0 + r_1 = 1 + b_2 > 1$.

Megjegyzés: A strukturális passzivitás teljesüléséhez az $1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = -(b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2})$ egyenlet gyökei jelölik ki a rezonátor pólusokat:

$z^{-2} + \frac{2b_1}{1+b_2} z^{-1} + 1 = z^{-2} + 2z^{-1} cos\varphi_0 + 1 = 0$, $z_{0,1} = cos\varphi_0 \pm j sin\varphi_0$ ahol $cos\varphi_0 = \frac{b_1}{1+b_2}$

A nevezőpolinomok egyeztetésével ($r_0 = r_1$)

$$1 + 2z^{-1} cos\varphi_0 + z^{-2} + 2r_0(z^{-1} cos\varphi_0 - z^{-2}) = 1 + 2(1 - r_0)z^{-1} \frac{b_1}{1 + b_2} + (1 - 2r_0)z^{-2} = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

ahonnan $1 - 2r_0 = b_2$, vagyis $r_0 = \frac{1-b_2}{2} = r_1$, $r_0 + r_1 = 1 - b_2 < 1$.

3. Mutassa be a skalár Kalman szűrés modelljét és zajparamétereit! Vezesse le a szűrő optimális $a(n)$ és $b(n)$ paramétereit meghatározó ortogonalitási egyenleteket (max. 4 pont), majd $b(n)$ kifejezését annak ismeretében, hogy $a(n) = a[1 - b(n)c]$ (max. 4 pont)!

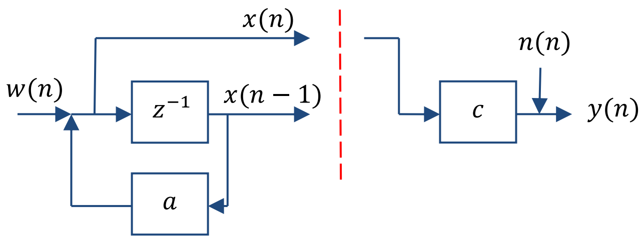
Megoldás:

$$x(n) = ax(n-1) + w(n), y(n) = cx(n) + n(n)$$

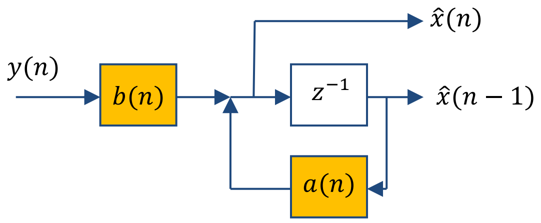
ahol $w(n)$ az ún. rendszerzaj, amelyre $E[w(n)] = 0$, $E[w(j)w(k)] = \sigma_w^2$, ha $j = k$, egyébként 0, $n(n)$ az ún. megfigyelési zaj, amelyre $E[n(n)] = 0$, $E[n(j)n(k)] = \sigma_n^2$, ha $j = k$, egyébként 0. $x(n) = 0, w(n) = 0$, ha $n < 0$.

$$E[w(n)x(n-1)] = E[n(n)\hat{x}(n-1)] = E[w(n)n(n)] = 0 \ \forall n.$$

A megfigyelés lineáris modellje:



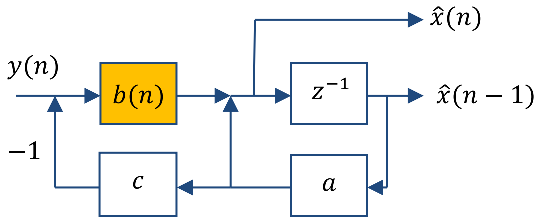
A rekurzív becslő:



$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ jelöléssel keressük $a(n)$ és $b(n)$ olyan értékét, amely minimalizálja a $E[e^2(n)] = E\left[\left(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)\right)^2\right]$ négyzetes hibát:

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a(n)} = -2E[e(n)\hat{x}(n-1)] = 0, \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial b(n)} = -2E[e(n)y(n)] = 0$$

Mivel $a(n) = a[1 - b(n)c]$, ezért



$b(n)$ meghatározása:

Kiindulva az

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n), \quad E\{e^2(n)\} = E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2\}$$

összefüggésből, és

$$x(n) = ax(n-1) + w(n)$$

valamint

$$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))$$

behelyettesítésével

$$E\{e^2(n)\} = E\left\{\left[ae(n-1) + w(n) - b(n)\left(ace(n-1) + cw(n) + n(n)\right)\right]^2\right\} =$$

$$= E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$

Mivel a négyzetre emelésnél a keresztszorzatok várható értékei nullák, mert a zajfolyamatok függetlenek egymástól, illetve az állapotváltozók korábbi értékeitől:

$$E\{e(n-1)w(n)\} = 0, E\{e(n-1)n(n)\} = 0, E\{w(n)n(n)\} = 0,$$

ezért a négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg:

$$E\{e^2(n)\} = a^2[1 - b(n)c]^2 E\{e^2(n-1)\} + [1 - b(n)c]^2 E\{w^2(n)\} + b^2(n)E\{n^2(n)\}.$$

Bevezetve a

$$E\{e^2(n)\} = p(n);\ E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2;\ E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$$

jelöléseket, keressük $p(n)$ minimumát $b(n)$ függvényében:

$$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0,$$

ahonnan a keresett optimális súlytényező

$$b(n)|_{opt}=\frac{a^2cp(n-1)+c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1)+c^2\sigma_w^2+\sigma_n^2}=cp_1(n)[c^2p_1(n)+\sigma_n^2]^{-1}, \text{ahol}$$

$$p_1(n)=a^2p(n-1)+\sigma_w^2$$

4. Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $\left(1,\ \frac{1-j}{2},\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},\ \frac{1+j}{2}\right)$ értékű Fourier transzformált jellemez (max. 3 pont)!

Megoldás:

$$1*e^{j\frac{2\pi}{5}0n}+\frac{1-j}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}1n}+\frac{1}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}2n}+\frac{1}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}3n}+\frac{1+j}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}4n}=$$

$$=1*e^{j\frac{2\pi}{5}0n}+\frac{1-j}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}1n}+\frac{1+j}{2}*e^{-j\frac{2\pi}{5}1n}+\frac{1}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}2n}+\frac{1}{2}*e^{-j\frac{2\pi}{5}2n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}1n}+\frac{1}{2}*e^{-j\frac{2\pi}{5}1n}-\frac{j}{2}*e^{+j\frac{2\pi}{5}1n}+\frac{j}{2}*e^{-j\frac{2\pi}{5}1n}+\frac{1}{2}*e^{j\frac{2\pi}{5}2n}+\frac{1}{2}*e^{-j\frac{2\pi}{5}2n}=$$

$$=1+cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

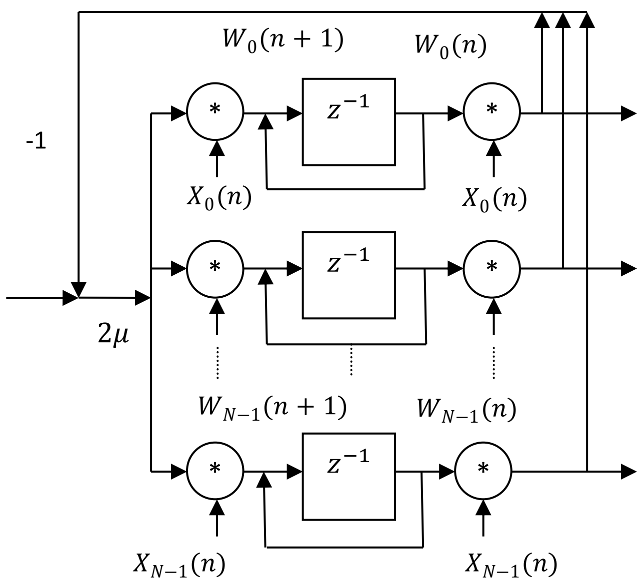
5. Blokkvázlat és az összefüggések megadásával mutassa be az LMS eljárás és a rekurzív diszkrét Fourier transzformáció kapcsolatát (max. 2 pont)! Mutassa be a μ konvergencia tényező megválasztásának kritériumát – az LMS eljárás alkalmazása esetén – a stabiltáselméleti megközelítésre alapozva (max. 4 pont)! Adjon felső határértéket μ-re, ha $\dim\boldsymbol{X}(n)=N=25$ és a regressziós vektor elemeinek maximuma $L=10$ (max. 1 pont)!

Megoldás:

Az LMS eljárás lerajzolható ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció. Az LMS algoritmus összefüggése komplex regressziós vektor esetén:

$$\boldsymbol{W}(n+1)=\boldsymbol{W}(n)+2\mu e(n)\boldsymbol{X}^*(n),$$

azaz a bázisvektor az $\boldsymbol{X}(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu\boldsymbol{X}^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstans szorosának felel meg. Ha $\boldsymbol{X}(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu=1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.



A paraméterhiba kifejezése:

$$\boldsymbol{V}(n+1) = [\boldsymbol{I} - 2\mu\boldsymbol{X}(n)X^T(n)]\boldsymbol{V}(n).$$

Ez utóbbi egy autonóm rendszer, amely globálisan aszimptotikusan stabil esetben:

$$\boldsymbol{V}(n) \Rightarrow 0, \text{ amivel } \boldsymbol{W}(n) \Rightarrow \boldsymbol{W}^*.$$

Ljapunov módszerével keresünk egy alkalmas energiafüggvényt. Esetünkben erre alkalmas:

$$G(n) = \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n).$$

Azt keressük, hogy ez miként csökkenthető:

$$\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0,$$

minden n-re. Ha $G(0)$ véges, akkor $\Delta G(n) \Rightarrow 0$.

$$\Delta G(n+1) = \boldsymbol{V}^T(n+1)\boldsymbol{V}(n+1) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) =$$

$$= \boldsymbol{V}^T(n)[I - 2\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]^T[I - 2\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]\boldsymbol{V}(n) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) =$$

$$\boldsymbol{V}^T(n)[-4\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n) + [4\mu^2\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)]\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]\,\boldsymbol{V}(n) =$$

$$= -4\mu e^2(n)(1 - \mu\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n))$$

ahol felhasználtuk, hogy $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n) = e(n)$. Mivel $\mu > 0$, ezért ha

$$0 < \mu < \frac{1}{\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)}$$

$\forall$n-re, akkor $\Delta G \Rightarrow 0$ magával vonja $\mu e^2(n) \to 0$, illetve $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n) \to 0$.

Megjegyzés:

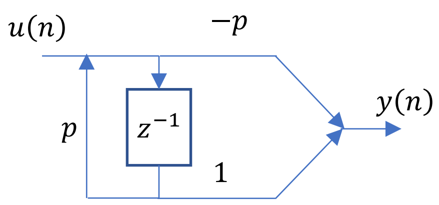
A $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n)$ skalár szorzat lehet úgy is nulla, hogy a két vektor ortogonális, amikoris $\boldsymbol{V}(n) \neq 0$. Ez kerülendő.

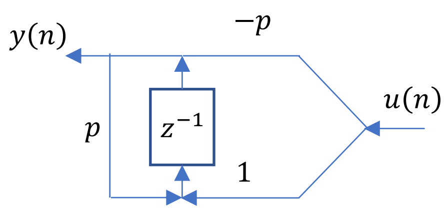
$$0 < \mu < \frac{1}{\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)} < \frac{1}{NL^2} = \frac{1}{2500} = 0.0004$$

6. Írja fel egy olyan mindentáteresztő hálózat átviteli függvényét, amelynek egyetlen pólusa a z sík $p = 0.5 + j0$ koordinátájú pontjában helyezkedik el, és az átvitelének abszolút értéke 1 (max. 1 pont)! Rajzolja fel a hálózat jelfolyamgráfját a direkt struktúrának, valamint transzponáltjának megfelelően! (max. 2 pont)! Adja meg mindkét hálózat állapotváltozós leírását! Mindkét hálózat esetében vezesse le, hogy nulla bemenet esetén - végtelen idő alatt - mennyi energia nyerhető ki belőlük (max. 3 pont)! Alkalmas transzformációval hozzon létre olyan beállítást, amely esetén a kivehető energia az állapotváltozó négyzetével egyezik (max. 1 pont)! Adjon meg strukturálisan passzív realizációt is (max. 2 pont)! Adja meg a kivehető energiát erre a realizációra is. Melyik elrendezésből vehető ki a legtöbb energia (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}$$





$x(n+1) = px(n) + u(n)$

$y(n) = x(n) - p\,x(n+1) = (1-p^2)x(n) - pu(n)$

$A = p, C = 1 - p^2$

$x(n+1) = px(n) + (1-p^2)u(n)$

$y(n) = x(n) - pu(n)$

$A_t = p, C_t = 1$

Az $A^T PA + C^T C = P$ összefüggéssel összhangban:

$pPp + (1-p^2)^2 = P \to P = 1 - p^2 = 0.75$

$pP_t p + 1 = P_t \to P_t = \frac{1}{1-p^2} = \frac{4}{3} \cong 1.33$

A kivehető energia:

$0.75x^2$

$1.33x^2$

A hasonlósági transzformáció mátrixa:

$R = \sqrt{1-p^2}$

$R_t = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$

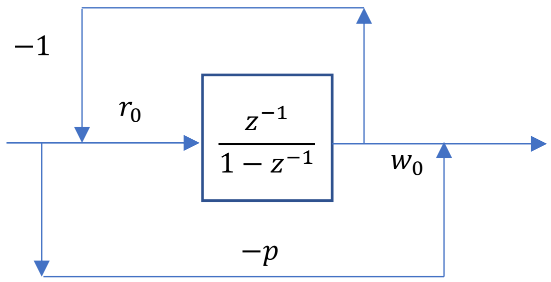
$A' = p, C' = \sqrt{1-p^2}$

$A'_t = p, C'_t = \sqrt{1-p^2}$

Ezzel $A^T A + C^T C = I$, mert

$p^2 + 1 - p^2 = 1$

$p^2 + 1 - p^2 = 1$



A strukturálisan passzív realizációhoz:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}} = -p + \frac{(1-p^2)z^{-1}}{1 - pz^{-1}}$$

$$\frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}} w_0}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1}}{1-(1-r_0)z^{-1}} w_0 = \frac{(1-p^2)z^{-1}}{1-pz^{-1}}$$

Ebből $r_0 = 1 - p = 0.5$, $w_0 = 1 + p = 1.5$

A kinyerhető energiához: $A = p, C = 1 + p$

$pPp + (1+p)^2 = P \to P = \frac{1+p}{1-p} = 3$, amivel a kinyerhető energia: $3x^2$

Alternatív számolás: $(1+p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{2k} = \frac{1+p}{1-p}$

A rezonátoros struktúra transzponáltjának alkalmazása esetén: $A_t = p, C_t = r_0 = 1 - p$

$pP_t p + (1-p)^2 = P_t \to P = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1}{3} \cong 0.33$, amivel a kinyerhető energia: $0.33x^2$

A legtöbb energia a strukturálisan passzív, rezonátoros elrendezésből nyerhető ki, és ennek megfelelően ebben lesznek a legalacsonyabbak a belső jelszintek.

7*. Bizonyítsa be, hogy az eredőben valós átvitelt megvalósító, komplex együtthatós, elsőfokú rezonátorokból felépített, visszacsatolt rezonátoros struktúrából kinyerhető energia a $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}\langle \mathrm{r}_0^{-1}, \mathrm{r}_1^{-1}, \dots, \mathrm{r}_{\mathrm{N}-1}^{-1} \rangle$ mátrix segítségével adható meg, amennyiben $\sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{r}_\mathrm{m} = 1$, ahol $\mathrm{r}_\mathrm{m} > 0$, $\forall$m-re (max. 5 pont)!

Megoldás:

$A = diag\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1}\rangle$, $A^* = diag\langle z_0^{-1}, z_1^{-1}, \dots, z_{N-1}^{-1}\rangle$, $R^T = [r_0, r_1, \dots, r_{N-1}]$, $G = AR$, $C = [1,1,\dots,1]$ jelölésekkel, ahol a '*' konjugált transzponáltat jelent:

Bizonyítandó, hogy $(A - GC)^* Q (A - GC) + C^T C = Q$. Elvégezve a műveleteket:

$$A^*QA - A^*QGC - C^T G^* QA + C^T G^* QGC + C^T C = A^*QA - A^*QARC - C^T R^T A^* QA + C^T R^T A^* QARC + C^T C =$$

$= Q - QRC - C^T R^T Q + C^T R^T QRC + C^T C = Q - 2C^T C + 2C^T C = Q$, ahol felhasználtuk, hogy

$A^*QA = Q$, $QR = C^T$, $R^T Q = C$, $R^T QR = \sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{r}_\mathrm{m} = 1$.

Megjegyzés: A Q mátrix szimmetrikus négyzetgyökével megvalósított hasonlósági transzformációval a rezonátoros struktúra ortogonális realizációjához jutunk.

A *-os feladat nélkül elérhető pontszám: 40. Az elégségeshez 16 pont kell. A *-os feladattal többletpontok szerezhetők. A többletpontokat a tárgy végső értékelésénél figyelembe vesszük.