1. feladat — 10 pont

Legyen $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$ és $w = 1 + 2\imath$! Adja meg a $z + w$, $\frac{z}{w}$ és z^{2015} valós részét!

Megoldás: $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z\overline{w})}{|w|^2} = \frac{\frac{1}{2}1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2}{5} = \frac{1+2\sqrt{3}}{10} \quad \boxed{\textbf{3p.}}$$

$|z| = 1$, és $\arg z = -\frac{\pi}{3}$

$z^{2015} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2015} = \cos\left(-\frac{2015\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(-\frac{2015\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\operatorname{Re} z^{2015} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

2. feladat — 4+12 pont

Mondja ki a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tételt!

Vizsgálja az

$$a_n = \left(1 - \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}\right)^{3n+1}$$

sorozat limesz inferiorját, limesz szuperiorját, és limeszét!

Megoldás: **Tétel:** Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. $\boxed{\textbf{4p.}}$

$$a_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{6n+1} = \left(\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^4 \to \left(e^{-1}\right)^3 \cdot 1 = e^{-3}$$

$\boxed{\textbf{3p.}}$

$$a_{2n-1} = \left(1 - \frac{-1}{2n-1+1}\right)^{3(2n-1)+1} = \left(\left(1 - \frac{-1}{2n}\right)^{2n}\right)^3 \left(1 - \frac{-1}{2n-1}\right)^{-2} \to e^3 \cdot 1 = e^3$$

$\boxed{\textbf{3p.}}$

Mivel minden index szerepel valamelyik részsorozatban, így csak ez a két torlódási pontja van a sorozatnak. $\boxed{\textbf{3p.}}$

$\liminf a_n = e^{-3}$, $\limsup a_n = e^3$, és $\lim a_n$ nem létezik. $\boxed{\textbf{3p.}}$

3. feladat **3+3+4+4 pont**

Legyen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, és $g(x) = x^{1/x}$!

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = ?$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = ?$ (d) $g'(x) = ?$

Megoldás:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \dfrac{-\infty}{0+} = -\infty$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$, mert e^x folytonos a 0-ban. $\boxed{\textbf{4p.}}$

(d) $g'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x\cdot 1}{x^2} = x^{1/x}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

4. feladat **4+6+4 pont**

Mondja ki és bizonyítsa be a szorzatfüggvény deriválási szabályát! Mutasson olyan f és g függvényeket, melyek nem deriválhatók a 0-ban, de szorzatuk igen!

Megoldás: **Tétel:** Ha f és g deriválható a-ban, akkor fg is, és

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \boxed{\textbf{4p.}}$$

Bizonyítás:

$$(fg)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}\underbrace{g(x)}_{\to g(a)}\right) + \lim_{x\to a}\left(f(a)\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}\right) =$$

$$= f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

$\boxed{\textbf{6p.}}$

Legyen $f(x) = g(x) = |x|$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

5. feladat* **12 pont**

Az $x_0 = 1$-ben tetszőlegesen sokszor deriválható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$y^6 + 15y + 2x^3y^2 - x^2 - 4x = \cancel{3} - 17$$

implicit egyenletet, és $y(1) = -1$. Milyen lokális szélsőértéke van x_0-ban?

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát x szerint deriválva az

$$6y^5y' + 15y' + 6x^2y^2 + 4x^3yy' - 2x - 4 = 0 \boxed{\textbf{4p.}}$$

egyenletet kapjuk. $x = 1$ és $y(x) = y(1) = -1$ helyettesítéssel

$$-6y'(1) + 15y'(1) + 6 - 4y'(1) - 2 - 4 = 0,$$

amiből $y'(1) = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.
Ha újra deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát, akkor

$$30y^4y'y' + 6y^5y'' + 15y'' + 12xy^2 + 12x^2yy' + 12x^2yy' + 4x^3y'y' + 4x^3yy'' - 2 = 0 \boxed{\textbf{3p.}}$$

adódik. $x = 1$, $y(x) = y(1) = -1$ és $y'(x) = y'(1) = 0$ helyettesítéssel

$$-6y''(1) + 15y''(1) + 12 - 4y''(1) - 2 = 0,$$

amiből $y''(1) = -2$ $\boxed{\textbf{1p.}}$, vagyis lokális maximum van x_0-ban $\boxed{\textbf{2p.}}$.

6. feladat* **8+8 pont**

Határozza meg az alábbi integrálokat! (A (b)-nél használja a $t = 1+\sqrt{x}$ helyettesítést!)

(a) $\displaystyle\int (x^2 + 1)\sin(3x - 1)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\,dx$

Megoldás:

(a) $$\int \underbrace{(x^2+1)}_{f}\underbrace{\sin(3x-1)}_{g'}\,dx = \underbrace{(x^2+1)}_{f}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\cos(3x-1)}{3}}_{g}\right) - \int \underbrace{2x}_{f'=u}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\cos(3x-1)}{3}}_{g=v'}\right)dx \boxed{\textbf{3p.}} = -(x^2+1)\cdot\frac{\cos(3x-1)}{3} - \left[\underbrace{2x}_{u}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\sin(3x-1)}{9}}_{v}\right) - \int \underbrace{2}_{u'}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\sin(3x-1)}{9}}_{v}\right)dx\right] \boxed{\textbf{3p.}} = -(x^2+1)\cdot\frac{\cos(3x-1)}{3} + 2x\cdot\frac{\sin(3x-1)}{9} + 2\frac{\cos(3x-1)}{27} + c \boxed{\textbf{2p.}}$$

(b) $\sqrt{x} = t - 1$, $x = (t-1)^2$, $dx = 2(t-1)\,dt$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$$\int \frac{3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{3(t-1)}{t}2(t-1)\,dt \boxed{\textbf{2p.}} = \int \frac{6(t-1)^2}{t}\,dt = \int 6t - 12 + \frac{6}{t}\,dt \boxed{\textbf{2p.}} = 3t^2 - 12t + 6\ln t + c = -6\sqrt{x} + 3x + 6\ln(1+\sqrt{x}) + c \boxed{\textbf{2p.}}$$

7. feladat* **8 pont**

Határozza meg az $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ Riemann-integrált!

Megoldás: $f'f$ alakú integrandus: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\boxed{\textbf{4p.}}\right]_0^1 = \frac{\operatorname{arctg}^2 1}{2} - \frac{\operatorname{arctg}^2 0}{2} = \frac{\pi^2}{32}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

8. feladat* **10 pont**

Határozza meg az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x^2-4x+4}$ improprius integrált!

Megoldás: $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-4x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)+c$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx\boxed{\textbf{2p.}} =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx\boxed{\textbf{2p.}} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)\right]_a^0 +$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)\right]_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(a-1)\right] +$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(b-1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1)\right]_0^b = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\boxed{\textbf{3p.}} = \frac{\pi}{2}.$$