Digitális jelfeldolgozás – felhasznált fogalmak

2007. november 16. 15:24

Megjegyzés: ha precízek akarunk lenni, akkor a valószínűségi változót és a sűrűségfüggvény változóját másképp kell jelölni. A mérnöki tárgyakban ezt a megkülönböztetést gyakran elhagyjuk. Az anyagban mindenütt feltételezzük, hogy a megfelelő várható értékek (momentumok) léteznek.

Átlagos négyzetes érték:

$$\Psi^2\{x\} = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

Ez egyben a teljesítmény is.

Átlagérték: N minta esetén az

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

érték.

Autokorreláció-függvény: Egy sztochasztikus folyamatra

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau,t) &= E\{(x(t))(x(t+\tau))\} \\ &= C_{xx}(\tau,t) + \mu_x(t)\mu_x(t+\tau) \end{aligned}$$

Stacionárius sztochasztikus folyamat esetén a kifejezés t-től nem függ:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E\{(x(t))(x(t+\tau))\} \\ &= C_{xx}(\tau) + \mu_x^2 \end{aligned}$$

Autokovariancia-függvény: Egy sztochasztikus folyamatra

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau,t) &= E\{(x(t) - E\{x(t)\})(x(t+\tau) - E\{x(t+\tau)\})\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} - E\{x(t)\}E\{x(t+\tau)\} \\ &= R_{xx}(\tau,t) - \mu_x(t)\mu_x(t+\tau) \end{aligned}$$

Stacionárius sztochasztikus folyamat esetén a kifejezés t-től nem függ:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= E\{(x(t) - E\{x(t)\})(x(t+\tau) - E\{x(t+\tau)\})\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} - E\{x(t)\}E\{x(t+\tau)\} \\ &= R_{xx}(\tau) - \mu_x^2 \end{aligned}$$

Diszkrét Fourier-transzformáció:

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi\frac{ki}{N}}, \quad x_i = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi\frac{ki}{N}}$$

Eloszlás: az eseménytéren értelmezett valószínűségi mérték, vagyis definiálja az egyes események valószínűségét

Eloszlásfüggvény: valós skaláris valószínűségi változó esetén az a függvény, melyet a $F(x) = P(\xi < x)$ valószínűség definiál, tehát az argumentumától balra esés valószínűsége.

Többváltozós esetben az együttes balra esés valószínűsége:

$$F(x_1, x_1, ...) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ...)$$

Ergodikus sztochasztikus folyamat: olyan stacionárius sztochasztikus folyamat, melyben a sokaság szerinti várható értéket időátlagból is ki lehet számítani, például így:

$$E\{x\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$E\{x\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t)dt \ .$$

Gyenge ergodicitásról beszélhetünk, ha ez az összefüggés az első két momentumra igaz, erősről, ha minden momentumra igaz.

Fourier-transzformáció:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Szinuszjelhez a következő Fourier-transzformáltat rendeljük hozzá:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_1 t + \varphi)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{2}e^{j\varphi}\delta(f - f_1) + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}\delta(f + f_1)$$

A Fourier-transzformáció felírható *f* helyett ω változóval is:

$$X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X_2(2\pi f) = X(f)$$

Függetlenség: Két valószínűségi változó független, ha együttes eloszlásfüggvényük az egyváltozós eloszlásfüggvények szorzata (ha a sűrűségfüggvények léteznek, akkor ez azokra is ugyanúgy vonatkozik):

$$F_{12}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2), \quad f_{12}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

Karakterisztikus függvény: a valószínűség-sűrűségfüggvény (inverz) Fourier-transzformáltja: $\Phi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jux}dx = E\{e^{jux}\}$. Közvetlen szemléletes jelentése nincs, szerepe hasonló az időfüggvény mellett definiált Fourier-transzformálthoz (mely a frekvencia szerinti „amplitúdó-eloszlást” adja meg).

Keresztkorreláció-függvény: Két sztochasztikus folyamatra

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau, t) &= E\{(x(t))(y(t+\tau))\} \\ &= C_{xy}(\tau, t) + \mu_x(t)\mu_y(t+\tau) \end{aligned}$$

Stacionárius sztochasztikus folyamatok esetén a kifejezés *t*-től nem függ:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E\{(x(t))(y(t+\tau))\} \\ &= C_{xy}(\tau) + \mu_x\mu_y \end{aligned}$$

Kereszt-teljesítmény-sűrűségfüggvény: A keresztkorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

A *H(f)* átviteli függvényű lineáris rendszer be- és kimenete között az összefüggés így is számítható:

$$S_{xy}(f)=S_{xx}(f)H(f)$$

Komplex valószínűségi változó: olyan kételemű valószínűségi vektorváltozónak tekintjük, melynek elemei a valós rész és a képzetes rész. Így a komplex normális valószínűségi változót a várható értékek 1x2-es vektora és a 2x2 elemű kovariancia-mátrix jellemzi:

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix},\quad |\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)$$

Korreláció:

$$R_{xy}=E\{xy\}$$

Korrelációs együttható:

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{E\{(x-E\{x\})(y-E\{y\})\}}{\sqrt{E\{(x-E\{x\})^2\}E\{(y-E\{y\})^2\}}}$$

Korrelálatlanság: a korrelációs együttható vagy a kovariancia 0 (és *nem* a korreláció 0!). Általában nem jelent két valószínűségi változó között függetlenséget, kivéve ha tudjuk, hogy az együttes eloszlásuk normális.

Kovariancia:

$$C_{xy}=E\{(x-E\{x\})(y-E\{y\})\}$$

Kovariancia-függvény: Általános esetben két sztochasztikus folyamatra a kereszt-kovariancia-függvény:

$$\begin{aligned}C_{xy}(\tau,t)&=E\{(x(t)-E\{x(t)\})(y(t+\tau)-E\{y(t+\tau)\})\}\\&=E\{x(t)y(t+\tau)\}-E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\}\\&=R_{xy}(\tau,t)-\mu_x(t)\mu_y(t+\tau)\end{aligned}$$

Stacionárius sztochasztikus folyamatok esetén a kifejezés *t*-től nem függ:

$$\begin{aligned}C_{xy}(\tau)&=E\{(x(t)-E\{x(t)\})(y(t+\tau)-E\{y(t+\tau)\})\}\\&=E\{x(t)y(t+\tau)\}-E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\}\\&=R_{xy}(\tau)-\mu_x\mu_y\end{aligned}$$

Kovariancia-teljesítménysűrűségfüggvény: Ugyanaz, mint a közönséges teljesítménysűrűségfüggvény, de a jel középértékét elnyomjuk, vagyis az autokorreláció-függvény helyett az autokovariancia-függvényt Fourier-transzformáljuk:

$$S_{xc}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}C_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

Ortogonalitás: A korreláció nulla:

$$R_{xy}=E\{xy\}=0$$

Ez nem ekvivalens sem a függetlenséggel, sem a korrelálatlasággal!

Periodogram: A teljesítmény-sűrűségfüggvény becslője közvetlenül a mért regisztrátumból:

$$\hat{S}_{xy}(f)=\frac{1}{T}\overline{X(f,T)}Y(f,T),\ \text{vagy}\ \hat{S}_{xyk}=\frac{1}{N}\overline{X_k}Y_k$$

Periodikus realizációjú sztochasztikus folyamat: olyan sztochasztikus folyamat, melynek realizációi periodikus jelek valamilyen közös *T* periódusidővel. Legegyszerűbb a véletlen fázisú szinuszjel. Ez utóbbi felfogható a ϕ fázis mint valószínűségi változó eloszlása leképezésének a függvények terére, ezért a ϕ fázis sűrűségfüggvénye segítségével kiszámítható minden jellemző:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Stacionárius sztochasztikus folyamat: olyan sztochasztikus folyamat, melynek jellemzői (momentumai) az időponttól nem függnek. Gyenge stacionaritásról beszélhetünk, ha ez az első két momentumra igaz, erősről, ha minden momentumra (és a sűrűségfüggvényekre is) igaz. A sűrűségfüggvényekre vonatkozó állítás valamivel általánosabb, mint a momentumokra vonatkozó.

Sűrűségfüggvény (valószínűség-sűrűségfüggvény): az eloszlásfüggvény deriváltja (ha ez létezik). $f(x)dx$ annak a valószínűségét adja meg, hogy a valószínűségi változó egy x körüli dx szélességű intervallumba esik. Diszkrét (illetve kevert) eloszlású valószínűségi változókhoz Dirac-deltákat rendelünk hozzá:

$$f(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$$

Szórás: A szórásnégyzet vagy másképp variancia pozitív négyzetgyöke.

Szórásnégyzet: Lásd variancia

Szorzat Fourier-transzformáltja (konvolúció):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t)e^{-j2\pi ft}dt = X(f) * W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-g)W(g)dg$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)W(f)e^{j2\pi ft}df = x(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

Sztochasztikus folyamat: egy függvényhalmazon (lehetséges realizációk = elemi események) értelmezett valószínűség-eloszlás (valószínűségi mérték). A t időhöz rendelt értékek az $x(t)$ paraméteres valószínűségi változót adják. Alaptétel: a fenti definíció ekvivalens az összes $x(t_1), x(t_2),\dots x(t_M)$ valószínűségi változó-csoportok eloszlásfüggvényeinek megadásával

Teljesítmény-sűrűségfüggvény (teljesítménysűrűség spektrum): Az autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$S(f)df$ megadja az f körüli df szélességű intervallumba eső teljesítményt.

A $H(f)$ átviteli függvényű lineáris rendszer be- és kimenete között az összefüggés így is számítható:

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)\left|H(f)\right|^2$$

Várható érték (vagy középérték): $\mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Ergodikus folyamatoknál helyettesíthető az időátlaggal.

Variancia: ugyanaz, mint a szórásnégyzet:

$$\mathrm{var}\{x\} = E\left\{(x - E\{x\})^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xc}(f)df = \Psi_x^2 - \mu_x^2$$