Megoldás

1. feladat — 25 pont

Adja meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{\operatorname{arctg} x}$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x}-1}{\operatorname{arctg} x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\ln(x-1)\cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$

Megoldás:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{\operatorname{arctg} x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^{-x}}{\dfrac{1}{x^2+1}} = -1$ $\boxed{\textbf{10p.}}$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x}-1}{\operatorname{arctg} x} = -\dfrac{2}{\pi}$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\ln(x-1)\cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right) = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\dfrac{\pi}{2}} =$

$\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi(x-1)} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{-4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}}{\pi} = 0$ $\boxed{\textbf{10p.}}$

2. feladat — 25 pont

Adja meg a legbővebb intervallumo(ka)t, ahol az

$$f(x) = \frac{(x+2)^4}{x^4}$$

függvény konvex!

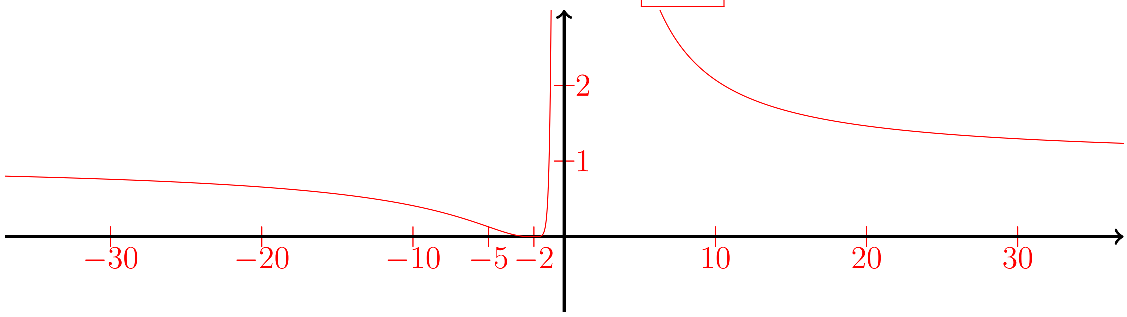
Megoldás: $f'(x) = \dfrac{4(x+2)^3x^4 - 4(x+2)^4x^3}{x^8} = \boxed{\textbf{5p.}} \dfrac{-8(x+2)^3}{x^5}$

$f''(x) = \dfrac{-24(x+2)^2x^5 + 40(x+2)^3x^4}{x^{10}} \boxed{\textbf{5p.}} = \dfrac{16(x+5)(x+2)^2}{x^6}$

$f''(x) = 0$ megoldásai $x_{1,2} = -2$ és $x_3 = -5$

	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,-2[$	-2	$]-2,0[$	$]0,\infty[$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$
f''	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$

f konvex a $[-5,0[$ és a $]0,\infty[$ intervallumokon. $\boxed{\textbf{15p.}}$



3. feladat **25 pont**

Az $y = y(x)$ tetszőlegesen sokszor deriválható függvényre teljesül a

$$\sin(xy) - \cos(y) = \pi x - 2xy + 1$$

implicit egyenlet, és grafikonja átmegy az $(x_0, y_0) = (1, \frac{\pi}{2})$ ponton. Van-e ebben a pontban lokális maximuma?

Megoldás: (Valóban, $\sin(1\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}) = \pi \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} + 1$.)
$y'(1)$ kiszámolásához deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát x szerint:

$$\cos(xy)(y + xy') + \sin(y) \cdot y' = \pi - 2y - 2xy'$$

Behelyettesítve x helyére 1-et és y helyére $\frac{\pi}{2}$-t a

$$y' = -2y'$$

egyenlet adódik, így $y' = 0$, azaz lehet lokális maximum.
$y''(1)$ kiszámolásához deriváljuk újra az egyenlet mindkét oldalát x szerint:

$$-\sin(xy)(y + xy')^2 + \cos(xy)(y' + y' + xy'') + \cos(y)(y')^2 + \sin(y)y'' = -2y' - 2y' - 2xy''$$

Behelyettesítve x helyére 1-et és y helyére $\frac{\pi}{2}$-t és y' helyére 0-t a

$$-\frac{\pi^2}{4} + y'' = -2y''$$

egyenlet adódik, így $y'' = \dfrac{\pi^2}{12} > 0$, azaz lokális minimum van, tehát nincs lokális maximum.

4. feladat **25 pont**

Adja meg az

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+2)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

függvény alábbi érintőegyenesei közül azokat, amelyek léteznek!

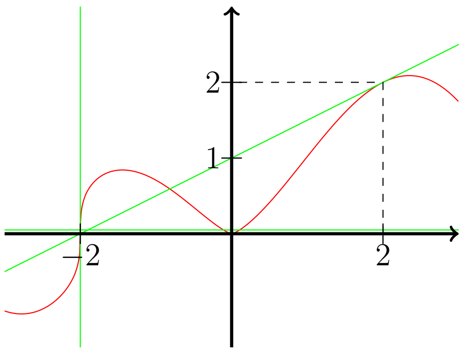
(a) $x_0 = 2$ pontbeli érintőegyenes;

(b) $x_0 = 0$ pontbeli érintőegyenes;

Megoldás:

(a) Ha $x \notin \{0, -2\}$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x(x+2))^2}}(2x+2)\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sqrt[3]{x(x+2)}\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, így $f'(2) = \dfrac{1}{2}$ és $f(2) = 2$, így az érintőegyenes $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \dfrac{x}{2} + 1$ $\boxed{\textbf{15p.}}$

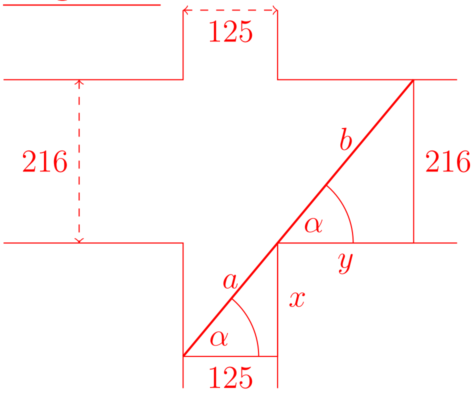
(b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\sqrt[3]{x(x+2)}}_{\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\frac{\pi}{4}x}}_{\to 1} \dfrac{\pi}{4} = 0$ és $f(0) = 0$, így az érintőegyenes $y = 0$. $\boxed{\textbf{10p.}}$



IMSC **feladat** **8 pont**

Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 216 centiméter, illetve 125 centiméter. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

Megoldás:



Az ábra szerint $\dfrac{x}{125} = \dfrac{216}{y}$, azaz $x = \dfrac{30^3}{y}$

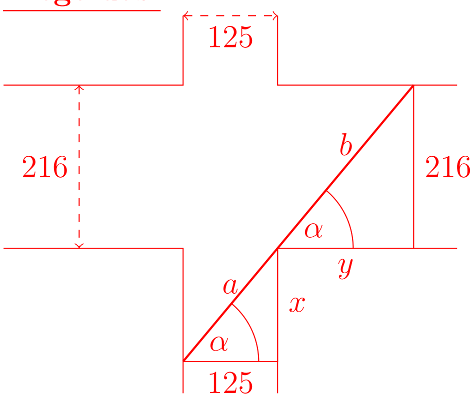
A létra hossza $f(y) = \sqrt{125^2 + x^2} + \sqrt{216^2 + y^2} = \sqrt{5^6 + \dfrac{30^6}{y^2}} + \sqrt{6^6 + y^2} = \left(\dfrac{5^3}{y} + 1\right)\sqrt{y^2 + 6^6}$

$f'(y) = -\dfrac{5^3}{y^2}\sqrt{y^2 + 6^6} + \left(\dfrac{5^3}{y} + 1\right)\dfrac{y}{\sqrt{y^2 + 6^6}} = 0 \iff 5^3 + y = 5^3 + \dfrac{5^3 \cdot 6^6}{y^2}$

$y = 180$ valóban minimumhely, mert ha $y < 180$, akkor $f'(y) < 0$, és ha $y > 180$, akkor $f'(y) > 0$.

Ekkor $x = 150$ és $f(y) = \sqrt{125^2 + 150^2} + \sqrt{216^2 + 180^2} = 25\sqrt{61} + 36\sqrt{61} = 61\sqrt{61}$

Megoldás:



Az ábra szerint $a + b = \dfrac{125}{\cos\alpha} + \dfrac{216}{\sin\alpha} = f(\alpha)$ minimumát keressük, ha $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f'(\alpha) = \dfrac{125\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{216\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{125\,\mathrm{tg}^3\,\alpha - 216}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = 0 \iff \mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{216}{125}} = \dfrac{6}{5}$

Ha $\mathrm{tg}\,\alpha < \dfrac{6}{5}$, akkor $f'(\alpha) < 0$, így f szigorúan monoton csökken.

Ha $\mathrm{tg}\,\alpha > \dfrac{6}{5}$, akkor $f'(\alpha) > 0$, így f szigorúan monoton növekszik.

Tehát $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{6}{5}$ esetén veszi fel a minimumát.

Ekkor $\dfrac{36}{25} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, így $a = 125\sqrt{\dfrac{61}{25}} = 25\sqrt{61}$ és

$\dfrac{25}{36} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$, így $b = 216\sqrt{\dfrac{61}{36}} = 36\sqrt{61}$ és $f(\alpha) = 61\sqrt{61}$ hosszú létra fér el.