

A

1. A véletlen kísérlet megfelel egy véletlen pont kiválasztásának a  $[0, 2] \times [0, 3]$  téglalapon. Háromszög akkor szerkeszthető, ha egyszerre teljesülnek:  $x + y > 1, x + 1 > y, y > x - 1$ . A tartomány berajzolása után a keresett terület 3 lesz, azaz a valószínűség  $\frac{1}{2}$  lesz.
2.  $\mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}(X < \sqrt[3]{t}) = \frac{\sqrt[3]{t}+2}{3}, t \in (-8, 1) \implies f_Y(t) = \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{9}$ .  
 $\mathbf{E}Y = \int_{-8}^1 \frac{\sqrt[3]{t}}{9} dt = \frac{1}{12} \left(1 - 8^{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{5}{4}, \mathbf{E}Y^2 = \int_{-8}^1 \frac{\sqrt[3]{t^4}}{9} dt = \frac{1}{21} \left(1 + 8^{\frac{7}{3}}\right) = \frac{129}{21}, \dots$
3.  $Y$  az összesen kihúzott lapok száma. A keresett valószínűség a teljes valószínűség tétele alapján:  $\mathbf{P}(X = 0) = \sum_{i=1}^{29} \mathbf{P}(X = 0 | Y = i) \mathbf{P}(Y = i)$ , ahol  $\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{8}, \mathbf{P}(Y = i) = \frac{28 \cdot \dots \cdot (28-i+1)}{32 \cdot \dots \cdot (32-i+1)} \cdot \frac{4}{32-i}$ , és  $\mathbf{P}(X = 0 | Y = 1) = 1, \mathbf{P}(X = 0 | Y = i) = \frac{24 \cdot \dots \cdot (24-i+1)}{28 \cdot \dots \cdot (28-i+1)}$ . Az eredmény egyébként  $\frac{1}{2}$  mert  $\mathbf{P}(X = 0)$  épp annak valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint hetest.
4.  $Y - X \in N(-4, \sqrt{13})$ :  
 $\mathbf{P}(Y < X) = \mathbf{P}(Y - X < 0) = \Phi\left(\frac{0+4}{\sqrt{13}}\right)$ .
5. Mivel  $X + Y = 2$ , ezért  $(X - 1) + (Y + 1) = 2 \implies (Y + 1) = 2 - (X - 1) \implies \mathbf{R}(X - 1, Y + 1) = -1$ .

B

1. A véletlen kísérlet megfelel egy véletlen pont kiválasztásának a  $[0, 1] \times [0, 2]$  téglalapon. Háromszög akkor szerkeszthető, ha egyszerre teljesülnek:  $x + y > 1, x + 1 > y, y > x - 1$ . A tartomány berajzolása után a keresett terület 1 lesz, azaz a valószínűség  $\frac{1}{2}$  lesz.
2.  $\mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}(X < \sqrt[5]{t}) = \frac{\sqrt[5]{t}+1}{3}, t \in (-1, 32) \implies f_Y(t) = \frac{t^{-\frac{4}{5}}}{15}$ .  
 $\mathbf{E}Y = \int_{-1}^{32} \frac{\sqrt[5]{t}}{15} dt = \frac{1}{18} (32^{\frac{6}{5}} - 1) = \frac{7}{2}, \mathbf{E}Y^2 = \int_{-8}^1 \frac{\sqrt[5]{t^6}}{15} dt = \frac{1}{33} (32^{\frac{11}{5}} - 1) = \frac{675}{11}, \dots$
3.  $Y$  az összesen kihúzott lapok száma. A keresett valószínűség a teljes valószínűség tétele alapján:  $\mathbf{P}(X = 0) = \sum_{i=1}^{25} \mathbf{P}(X = 0 | Y = i) \mathbf{P}(Y = i)$ , ahol  $\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(Y = i) = \frac{24 \cdot \dots \cdot (24-i+1)}{32 \cdot \dots \cdot (32-i+1)} \cdot \frac{8}{32-i}$ , és  $\mathbf{P}(X = 0 | Y = 1) = 1, \mathbf{P}(X = 0 | Y = i) = \frac{16 \cdot \dots \cdot (16-i+1)}{24 \cdot \dots \cdot (24-i+1)}$ .  
 Az eredmény egyébként  $\frac{1}{2}$  mert  $\mathbf{P}(X = 0)$  épp annak valószínűsége, hogy előbb húzunk pirosat, mint zöldet.
4.  $X - Y \in N(1, \sqrt{13})$ :  
 $\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X - Y < 0) = \Phi\left(\frac{0-1}{\sqrt{13}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ .
5. Mivel  $X + Y = 2$ , ezért  $(X + 1) + (Y - 1) = 2 \implies (Y - 1) = 2 - (X + 1) \implies R(X + 1, Y - 1) = -1$ .