1. feladat (5+12=17 pont)
a) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{7x-2}{4x+7} = -3$!

Mo. *a*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{7x-2}{4x+7} + 3\right| = \frac{|7x - 2 + 12x + 21|}{|4x+7|} = 19\frac{|x+1|}{|4x+7|}$$

A további becsléshez felhasználjuk, hogy x a -1 közelében van. Ha például $|x+1| < \frac{1}{2}$, akkor $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$, és $1 < 4x + 7 < 5$. Tehát

$$19\frac{|x+1|}{|4x+7|} < 19|x+1| < \varepsilon, \qquad \textbf{(7p)}$$

ha $|x+1| < \frac{1}{19}\varepsilon$ **(3p)** , így $\delta(\varepsilon) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{19}\varepsilon\right)$. **(2p)**

---

2. feladat (19 pont)
Osztályozza az $f(x) = \dfrac{(x-3)\sin^2(x+1)}{|x^3 - 2x^2 - 3x|}$ függvény szakadási helyeit!

Mo. A függvény az $0, -1, 3$ pontok kivételével folytonos. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x-3)\sin^2(x+1)}{|x^2 - 2x - 3|} \cdot \frac{1}{|x|} = -\infty \qquad \textbf{(3p)}$$

így a 0 pontban a függvénynek lényeges szakadása van **(2p)**

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)}{|x^2 - 3x|} \cdot \frac{\sin^2(x+1)}{(x+1)^2} \cdot |x+1| = 0 \qquad \textbf{(4p)}$$

így az -1 pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van **(2p)**

$$\lim_{x\to 3\pm} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)}{|x-3|} \cdot \frac{\sin^2(x+1)}{|x^2+x|} = \pm\frac{\sin^2 4}{12} \qquad \textbf{(4p)}$$

így az 3 pontban a függvénynek véges ugrása van **(2p)**

---

3. feladat (18 pont)
Adja meg az értelmezési tartományát, illetve értékkészletét az $f(x) = 4\,\mathrm{arctg}(5x+2) - 2\pi$ függvénynek! Határozza meg a függvény deriváltját! Invertálható a függvény a teljes értelemzési tartományán? (Indokoljon!) Ha igen, írja fel inverzét, és az inverz értelmezési tartományát, illetve értékkészletét.

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(2p)** , $R_f = (-4\pi, 0)$ **(3p)** . $f'(x) = \dfrac{20}{1+(5x+2)^2}$ **(3p)** . Mivel ez mindig pozitív, a függvény az egész értelmezési tartományán kölcsönösen egyértelmű, így invertálható **(2p)** . Inverze: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x+2\pi}{4}\right) - 2\right)$ **(4p)** , $D_{f^{-1}} = (-4\pi, 0)$ **(2p)** , $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ **(2p)**

---

4. feladat (22 pont)
Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-5)^2(x+2)^3$ függvény monoton! Mely pontokban veszi fel a függvény maximumát, illetve minimumát a $[1,3]$ intervallumon?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x-5)(x+2)^3 + 3(x-5)^2(x+2)^2 = (x-5)(x+2)^2(2(x+2) + 3(x-5)) = (x-5)(x+2)^2(5x-11) = 0$, ha $x = -2$, $x = \frac{11}{5}$, $x = 5$ **(6p)** .

	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,\frac{11}{5}\right)$	$\frac{11}{5}$	$\left(\frac{11}{5},5\right)$	5	$(5,\infty)$
f'	+	0	+	0	−	0	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

(**6p**)

tehát a függvény monoton nő a $\left(-\infty, \frac{11}{5}\right)$ és a $(5,\infty)$ intervallumon, és monoton csökken a $\left(\frac{11}{5}, 5\right)$ intervallumon. **(2p)** Mivel a függvény mindenhol folytonos, így korlátos és zárt intervalumon felveszi a minimumát és a maxiumát **(2p)** . Mivel a függvény mindenhol differenciálható, a minimumot, illetve a maximumot az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallum belsejében levő lokális szélsőértékhelyeken veheti fel. Az intervallumon belül egyedül a $-\frac{11}{5}$ pontban van lokális szélsőértékhely, és előtte a függvény növő, utána pedig csökkenő, a maximumot ebben a pontban veszi fel. **(3p)** . $f(1) = 432 < f(3) = 500$, tehát a minimumot az 1 pontban veszi fel. **(3p)**

---

5. feladat (24 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{arsh}(x^2-9)}{\operatorname{sh}(x^2-3x)}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{e^{3x}-1}\right)$

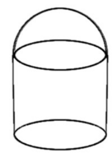
Mo. a) $\frac{0}{0}$ típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{arsh}(x^2-9)}{\operatorname{sh}(x^2-3x)} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2x}{\sqrt{1+(x^2-9)^2}}}{(2x-3)\operatorname{ch}(x^2-3x)} = 2 \qquad \textbf{(10p)}$$

b) $\infty - \infty$ típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{e^{3x}-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{3x(e^{3x}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{3(e^{3x}-1)+9xe^{3x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{9e^{3x}+9e^{3x}+27xe^{3x}} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{(10p)}$$

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Olajat szeretnénk egy alul henger, felül félgömb alakú flakonba önteni, amihez összesen 30 dm^2 felületre elegendő műanyag áll rendelkezésre. Mekkora legyen a henger alapkörének sugara, hogy a lehető legtöbb olaj férjen a flakonba? (Ha kiürült a flakon, pompás kis madáretetőt lehet belőle csinálni télre!)



Mo. Legyen r a henger sugara és h a magassága! Ekkor a flakon térfogata illetve felülete:

$$V = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi, \qquad A = r^2\pi + 2rh\pi + 2r^2\pi \qquad \textbf{(2p)}$$

Mivel $A = 30$ dm^2 ismert, így a második egyenletből kifejezve h-t és beírva az elsőbe:

$$V(r) = r^2\pi \cdot \frac{A-3r^2\pi}{2r\pi} + \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{Ar-3r^3\pi}{2} + \frac{2}{3}r^3\pi. \qquad \textbf{(2p)}$$

Látható, hogy az $V(r)$ függvény differenciálható a $(0,\infty)$ intervallumon (valójában persze r felülről korlátos, hiszen mondjuk a flakon alja nem lehet 10 dm^2-nél nagyobb), ezért a lokális szélsőértékhely(ek)en deriváltja zérus.

$$V'(r) = \frac{A}{2} - \frac{9r^2\pi}{2} + 2r^2\pi = \frac{A}{2} - \frac{5r^2\pi}{2}, \qquad \textbf{(2p)}$$

és ennek egyetlen pozitív zérushelye az $r_0 = \sqrt{\frac{A}{5\pi}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$ dm. **(1p)**

Mivel a derivált pozitív a zérushely előtt, és negatív utána, függvénynek valóban maximuma van a r_0 helyen **(1p)** .

(A számolást a dimenziók kezelése nélkül, $A = 30$ beírásával is elfogadjuk.)