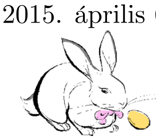
Valószínűségszámítás zh megoldás
2015. április 6.



1. Egy kosárban 3 darab piros és 2 darab lila hímes tojás van. Véletlenszerűen többször kihúznak egy tojást. A kihúzott tojást és még ugyanolyan színűből plusz 1 darabot visszatesznek a kosárba. Ezt megteszik egymás után 4-szer. Ezután újra húzva a kosárból, mekkora valószínűséggel fogunk piros tojást húzni?
Megoldás: Az első 4 húzás sorozata 16 féleképpen valósulhat meg. A p piros tojás húzását, l a lila tojás húzását jelöli:
$A_1 : pppp, A_2 : pplp, A_3 : plpp, A_4 : lppp,$
$A_5 : pllp, A_6 : lplp, A_7 : llpp, A_8 : lllp,$
$A_9 : llll, A_{10} : llpl, A_{11} : lpll, A_{12} : plll,$
$A_{13} : lppl, A_{14} : plpl, A_{15} : ppll, A_{16} : pppl$
Ezek az események teljes eseményrendszert alkotnak.
$\mathbf{P}(A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} = \frac{360}{1680}$
$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_{16}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{120}{1680}$
$\mathbf{P}(A_5) = \mathbf{P}(A_6) = \mathbf{P}(A_7) = \mathbf{P}(A_{13}) = \mathbf{P}(A_{14}) = \mathbf{P}(A_{15}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} = \frac{72}{1680}$
$\mathbf{P}(A_8) = \mathbf{P}(A_{10}) = \mathbf{P}(A_{11}) = \mathbf{P}(A_{12}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{72}{1680}$
$\mathbf{P}(A_9) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{120}{1680}$
Ha B jelöli azt az eseményt, hogy ötödszörre piros tojást húzunk, akkor a teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(B \mid A_1) = \frac{7}{9}, \mathbf{P}(B \mid A_2) = \frac{6}{9}, \mathbf{P}(B \mid A_5) = \frac{5}{9}, \mathbf{P}(B \mid A_8) = \frac{4}{9}, \mathbf{P}(B \mid A_9) = \frac{3}{9}$
$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{16} \mathbf{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i) = \frac{7}{9} \cdot \frac{360}{1680} + 4 \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{120}{1680} + 6 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{72}{1680} + 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{72}{1680} + \frac{3}{9} \cdot \frac{120}{1680} = \frac{8496}{1680} = 0,6$

2. Egy teherautó 100 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 1000 tojással. Szállításkor minden tojás 0,001 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 10-et. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két ládát nem fognak átvenni?
Megoldás: Az egy ládában összetört tojások száma (X) és az át nem vett ládák száma (Y) egyaránt binomiális eloszlású valószínűségi változók, ráadásul alkalmazhatjuk a Poisson eloszlással való közelítést:
$X \in B\left(1000, \frac{1}{1000}\right) \approx Po(1), Y \in B(100, p) \approx Po(100p)$
$p = \mathbf{P}(\text{egy ládában több az összetört tojás mint 10}) =$
$= \sum_{k=11}^{1000} \binom{1000}{k} (0,001)^k (0,999)^{1000-k} = 1 - \sum_{i=0}^{10} \binom{1000}{i} (0,001)^i (0,999)^{1000-i} \approx$

$1-e^{-1}\sum\limits_{i=0}^{10}\frac{1}{i!}$,

$\mathbf{P}\left(\text{legfeljebb két ládát nem fognak átvenni}\right)=\sum\limits_{k=0}^{2}\binom{100}{k}p^k\left(1-p\right)^{100-k}\approx\sum\limits_{k=0}^{2}\frac{(100p)^k}{k!}e^{-100p}$.

3. Az egységnyi oldalú négyzet két szomszédos oldalán találomra választunk egy-egy pontot véletlenszerűen. Jelöljük X-szel a két pont távolságát! Adja meg az $F_X\left(x\right)$ eloszlásfüggvényt!
Megoldás: Legyen a két szomszédos oldal az egységnégyzet x illetve y tengelyen fekvő oldalai. A két kiválasztott pontnak vegyük az origótol vett távolságát. Jelöljük ezeket a távolságokat a,b-vel! A két pont kiválasztása tehát megfelel egy pont kiválasztásának az egységnégyzetben. $X=\sqrt{a^2+b^2}$. A $X<t$ esemény azoknak a pontoknak felelnek meg az egységnégyzetben, amelyek távolsága az origóponttól kisebbek, mint t. Nyilván $t\in\left[0,\sqrt{2}\right]$. Az az eset egyszerű, ha $t\in[0,1]$, hiszen az alakzat egy origó közepű, t sugarú negyedkör. Ilyenkor $F_X\left(t\right)=\frac{t^2\pi}{4}$. Ha $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, akkor a tartomány két háromszög és egy körcikk uniója, hasonlatosan a példatár II./27 feladatához. Ilyenkor $F_X\left(t\right)=\sqrt{t^2-1}+\frac{t^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{1}{t}\right)$. Nyilván $F_X\left(t\right)=0$, ha $t\leq 0$ és $F_X\left(t\right)=1$, ha $t>\sqrt{2}$.

4. Legyen $X\in N\left(-2,3\right)$. $\mathbf{E}\left(X^5\right)=$? (Használjuk fel, hogy a standard normális eloszlás második momentuma 1, a negyedik pedig 3, valamint minden páratlan momentuma 0.)
Megoldás: Mivel $\tilde{X}=\frac{X+2}{3}\in N\left(0,1\right)$ illetve $X=3\tilde{X}-2$ így $X^5=\left(3\tilde{X}-2\right)^5=\sum\limits_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\left(3\tilde{X}\right)^i\left(-2\right)^{5-i}=-32+240\tilde{X}-720\tilde{X}^2+1080\tilde{X}^3-810\tilde{X}^4+243\tilde{X}^5$.
Mivel $\mathbf{E}\tilde{X}=\mathbf{E}\tilde{X}^3=\mathbf{E}\tilde{X}^5=0$ és $\mathbf{E}\tilde{X}^2=1,\mathbf{E}\tilde{X}^4=3$, így $\mathbf{E}X^5=-32-720-2430=-3182$.

5. A 32 lapos magyar kártyacsomagból két lapot kiválasztunk. Jelölje X a kihúzott piros, Y pedig a kihúzott zöld színű lapok számát. *Adja meg X és Y együttes eloszlását. Függetlenek X és Y?
Megoldás: $R_X=R_Y=\left\{0,1,2\right\}$.$\mathbf{P}\left(X=0,Y=0\right)=\frac{\binom{16}{2}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=1,Y=0\right)=\mathbf{P}\left(X=0,Y=1\right)=\frac{\binom{8}{1}\binom{16}{1}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=2,Y=0\right)=\mathbf{P}\left(X=0,Y=2\right)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=1,Y=1\right)=\frac{\binom{8}{1}\binom{8}{1}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=1,Y=2\right)=\mathbf{P}\left(X=2,Y=1\right)=\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)=0$.
A két változó nem független, mert pl. $\mathbf{P}\left(X=2\right)=\mathbf{P}\left(Y=2\right)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$ és $\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)=0$, így $\mathbf{P}\left(X=2\right)\cdot\mathbf{P}\left(Y=2\right)\neq\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)$.

Valószínűségszámítás zh megoldás
2015. április 6.

1. Egy kosárban 2 darab piros és 3 darab lila hímes tojás van. Véletlenszerűen többször kihúznak egy tojást. A kihúzott tojást és még ugyanolyan színűből plusz 2 darabot visszatesznek a kosárba. Ezt megteszik egymás után 4-szer. Ezután újra húzva a kosárból, mekkora valószínűséggel fogunk piros tojást húzni?
   Megoldás: Az első 4 húzás sorozata 16 féleképpen valósulhat meg. A p piros tojás húzását, l a lila tojás húzását jelöli:
   $A_1 : pppp, A_2 : pplp, A_3 : plpp, A_4 : lppp,$
   $A_5 : pllp, A_6 : lplp, A_7 : llpp, A_8 : lllp,$
   $A_9 : llll, A_{10} : llpl, A_{11} : lpll, A_{12} : plll,$
   $A_{13} : lppl, A_{14} : plpl, A_{15} : ppll, A_{16} : pppl$
   Ezek az események teljes eseményrendszert alkotnak.
   $\mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{8}{11} = \frac{384}{3465}$
   $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_{16}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{144}{3465}$
   $\mathbf{P}(A_5) = \mathbf{P}(A_6) = \mathbf{P}(A_7) = \mathbf{P}(A_{13}) = \mathbf{P}(A_{14}) = \mathbf{P}(A_{15}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{11} = \frac{120}{3465}$
   $\mathbf{P}(A_8) = \mathbf{P}(A_{10}) = \mathbf{P}(A_{11}) = \mathbf{P}(A_{12}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{210}{3465}$
   $\mathbf{P}(A_9) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{11} = \frac{945}{3465}$
   Ha B jelöli azt az eseményt, hogy ötödszörre piros tojást húzunk, akkor a teljes valószínűség tételéből:
   $\mathbf{P}(B \mid A_1) = \frac{10}{13}, \mathbf{P}(B \mid A_2) = \frac{8}{13}, \mathbf{P}(B \mid A_5) = \frac{6}{13}, \mathbf{P}(B \mid A_8) = \frac{4}{13}, \mathbf{P}(B \mid A_9) = \frac{2}{13}$
   $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{16} \mathbf{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i) = \frac{10}{13} \cdot \frac{384}{3465} + 4 \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{144}{3465} + 6 \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{120}{3465} + 4 \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{210}{3465} + \frac{2}{13} \cdot \frac{945}{3465} = \frac{18018}{45045} = 0,4$

2. Egy teherautó 50 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 1000 tojással. Szállításkor minden tojás 0,002 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 10-et. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két ládát nem fognak átvenni?
   Megoldás: Az egy ládában összetört tojások száma (X) és az át nem vett ládák száma (Y) egyaránt binomiális eloszlású valószínűségi változók, ráadásul alkalmazhatjuk a Poisson eloszlással való közelítést:
   $X \in B\left(1000, \frac{2}{1000}\right) \approx Po(2), Y \in B(50, p) \approx Po(50p)$
   $p = \mathbf{P}$ (egy ládában több az összetört tojás mint 10) $=$
   $= \sum_{k=11}^{1000} \binom{1000}{k} (0,002)^k (0,998)^{1000-k} = 1 - \sum_{i=0}^{10} \binom{1000}{i} (0,002)^i (0,998)^{1000-i} \approx$

$1-e^{-2}\sum\limits_{i=0}^{10}\frac{2^i}{i!}$,

$\mathbf{P}$ (legfeljebb két ládát nem fognak átvenni) $=\sum\limits_{k=0}^{2}\binom{50}{k}p^k\left(1-p\right)^{50-k}\approx\sum\limits_{k=0}^{2}\frac{(50p)^k}{k!}e^{-50p}$.

3. Az egységnyi oldalú négyzet x tengelyen fekvő oldalán találomra választunk egy pontot véletlenszerűen. Jelöljük X-szel a pont távolságát a négyzet (0,1) csúcsától! Adja meg az $F_X\left(x\right)$ eloszlásfüggvényt!
Megoldás: Jelöljük a pont és az origó távolságát Y-nal. $Y\in U\left(0,1\right)$. $X=\sqrt{1+Y^2}$.
$F_X\left(x\right)=\mathbf{P}\left(X<x\right)=\mathbf{P}\left(Y<\sqrt{x^2-1}\right)=\sqrt{x^2-1},x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$. $F_X\left(x\right)=0,x\leq 1$ és $F_X\left(x\right)=1,x>\sqrt{2}$

4. Legyen $X\in N\left(-1,2\right)$. $\mathbf{E}\left(X^5\right)=?$ (Használjuk fel, hogy a standard normális eloszlás második momentuma 1, a negyedik pedig 3, valamint minden páratlan momentuma 0.)
Megoldás: Mivel $\tilde{X}=\frac{X+1}{2}\in N\left(0,1\right)$ illetve $X=2\tilde{X}-1$ így $X^5=\left(2\tilde{X}-1\right)^5=\sum\limits_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\left(2\tilde{X}\right)^i\left(-1\right)^{5-i}=-1+10\tilde{X}-40\tilde{X}^2+80\tilde{X}^3-80\tilde{X}^4+32\tilde{X}^5$.
Mivel $\mathbf{E}\tilde{X}=\mathbf{E}\tilde{X}^3=\mathbf{E}\tilde{X}^5=0$ és $\mathbf{E}\tilde{X}^2=1,\mathbf{E}\tilde{X}^4=3$, így $\mathbf{E}X^5=-1-40-240=-281$.

5. A 32 lapos magyar kártyacsomagból két lapot kiválasztunk. Jelölje X a királyok, Y pedig az ászok számát a kiválasztott két lap között. *Adja meg X és Y együttes eloszlását. Függetlenek X és Y?
Megoldás: $R_X=R_Y=\{0,1,2\}$. $\mathbf{P}\left(X=0,Y=0\right)=\frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=1,Y=0\right)=\mathbf{P}\left(X=0,Y=1\right)=\frac{\binom{4}{1}\binom{24}{1}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=2,Y=0\right)=\mathbf{P}\left(X=0,Y=2\right)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=1,Y=1\right)=\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{32}{2}}$,
$\mathbf{P}\left(X=1,Y=2\right)=\mathbf{P}\left(X=2,Y=1\right)=\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)=0$.
A két változó nem független, mert pl. $\mathbf{P}\left(X=2\right)=\mathbf{P}\left(Y=2\right)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$ és $\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)=0$, így $\mathbf{P}\left(X=2\right)\cdot\mathbf{P}\left(Y=2\right)\neq\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)$.