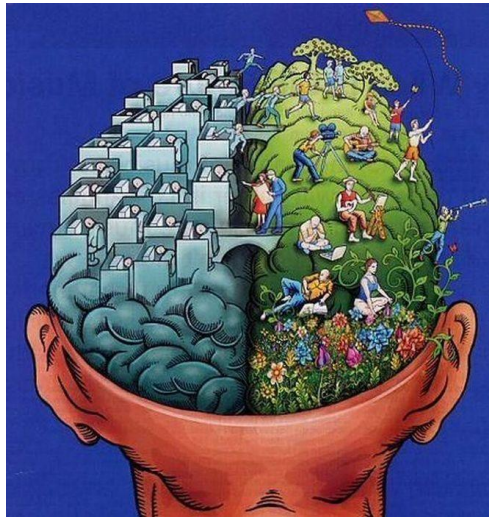




Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs rendszerek Tanszék



Mesterséges Intelligencia - MI

Következtetés valószínűségi hálókból

Előadó:

Hullám Gábor
Pataki Béla

Előadás anyaga:

Dobrowiecki Tadeusz



BME I.E. 414, 463-26-79

pataki@mit.bme.hu

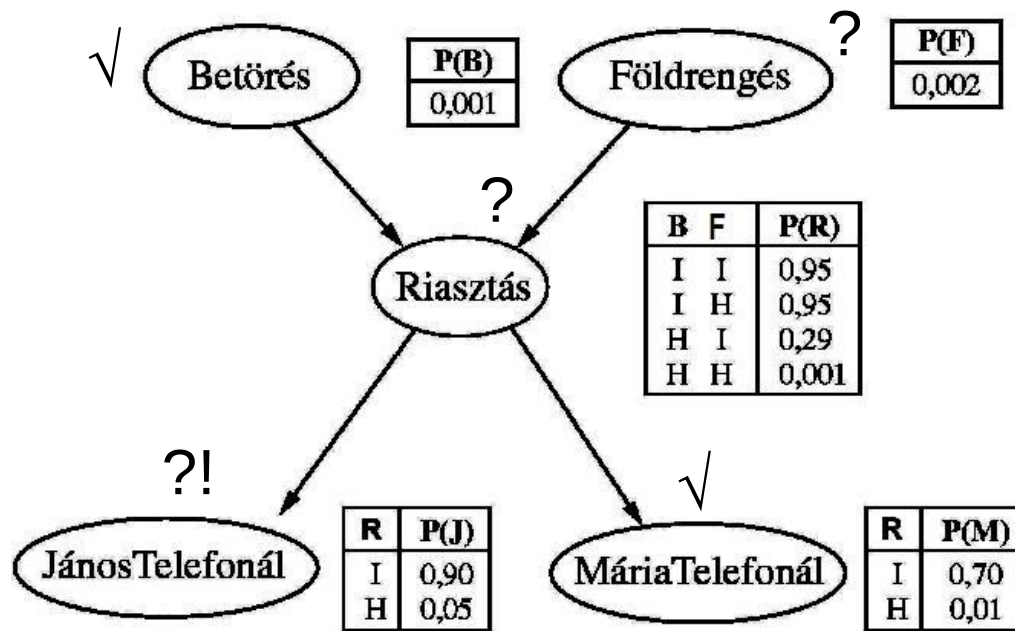
<http://www.mit.bme.hu/general/staff/pataki>



Következtetés valószínűségi hálókbán

$P(\text{lekérdezés} \mid \text{bizonyíték})$?

- **egzakt** – „egyszerű” hálónál egyszerű,
„bonyolult” hálónál bonyolult
- **közelítő** – „bonyolult” háló esetén is egyszerű



Összegzés rejtett változókra

$$P(J|M \neg B) = ?$$

$$= P(JM \neg B) / P(M \neg B)$$

$$P(JM \neg B) = \sum_{rf} P(JM \neg B \ r \ f)$$

$$P(M \neg B) = \sum_{rfj} P(M \neg B \ r \ f \ j)$$

$$\begin{aligned} P(J \ M \neg B \ R \ F) &= P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots \\ P(J \ M \neg B \neg R \ F) &= P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots \\ P(J \ M \neg B \ R \neg F) &= P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots \\ P(J \ M \neg B \neg R \neg F) &= P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M \neg B \ J \ R \ F) &= P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots \\ P(M \neg B \ J \ R \neg F) &= P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots \\ P(M \neg B \ J \neg R \ F) &= P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots \\ P(M \neg B \ J \neg R \neg F) &= P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots \\ P(M \neg B \neg J \ R \ F) &= P(\neg J|R) P(M|R) P(R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots \\ P(M \neg B \neg J \ R \neg F) &= P(\neg J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots \\ P(M \neg B \neg J \neg R \ F) &= P(\neg J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots \\ P(M \neg B \neg J \neg R \neg F) &= P(\neg J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots \end{aligned}$$

Következtetés felsorolással (balról jobbra)

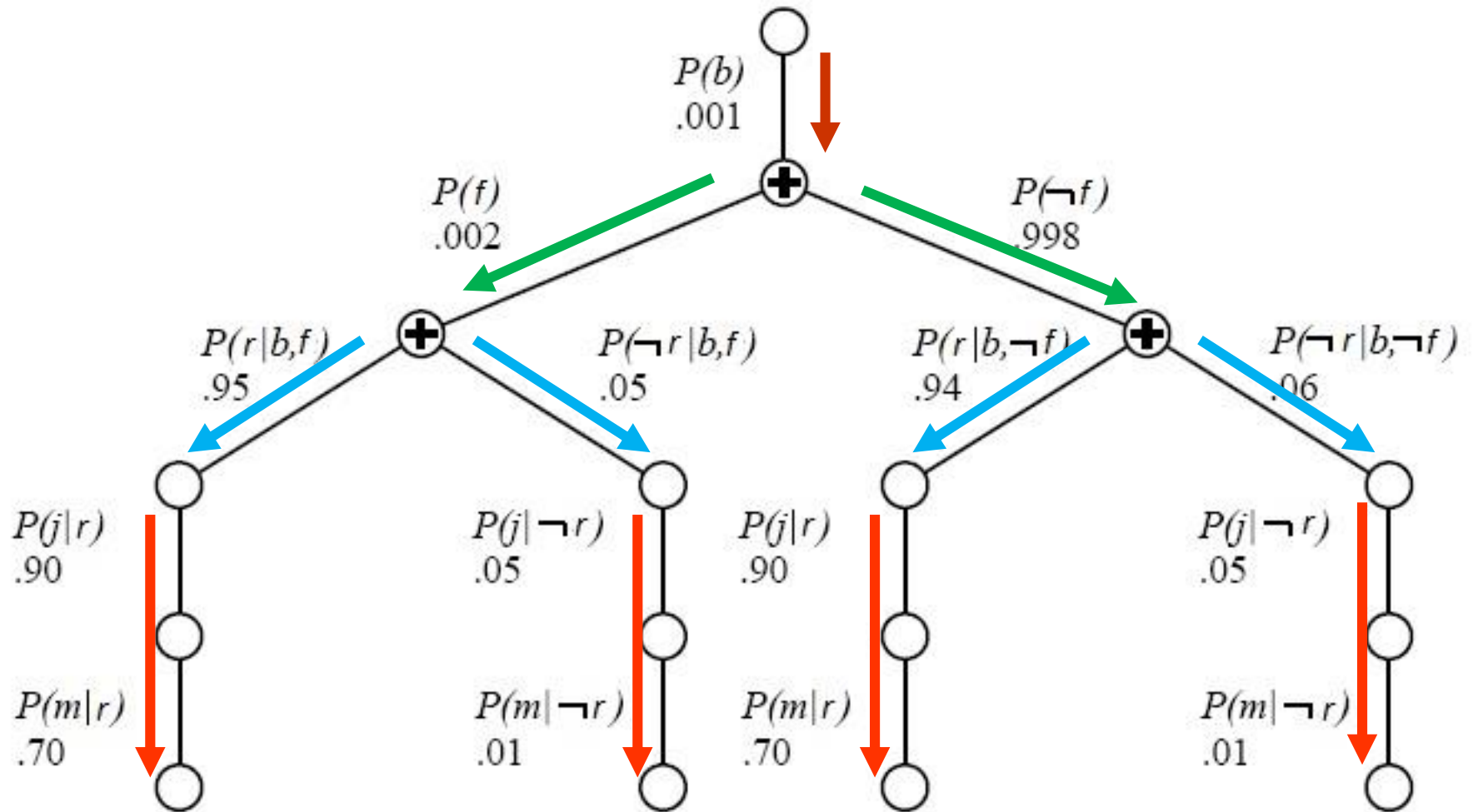
$$P(B \mid J \ M) = P(b=\text{lgaz} \mid j=\text{lgaz} \ m=\text{lgaz}) = ?$$

$$\begin{aligned} P(B \mid J \ M) &= \alpha \sum_f \sum_r P(B \ f \ r \ J \ M) \\ &= \alpha \sum_f \sum_r P(B) P(f) P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r) \\ &= \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r) \end{aligned}$$

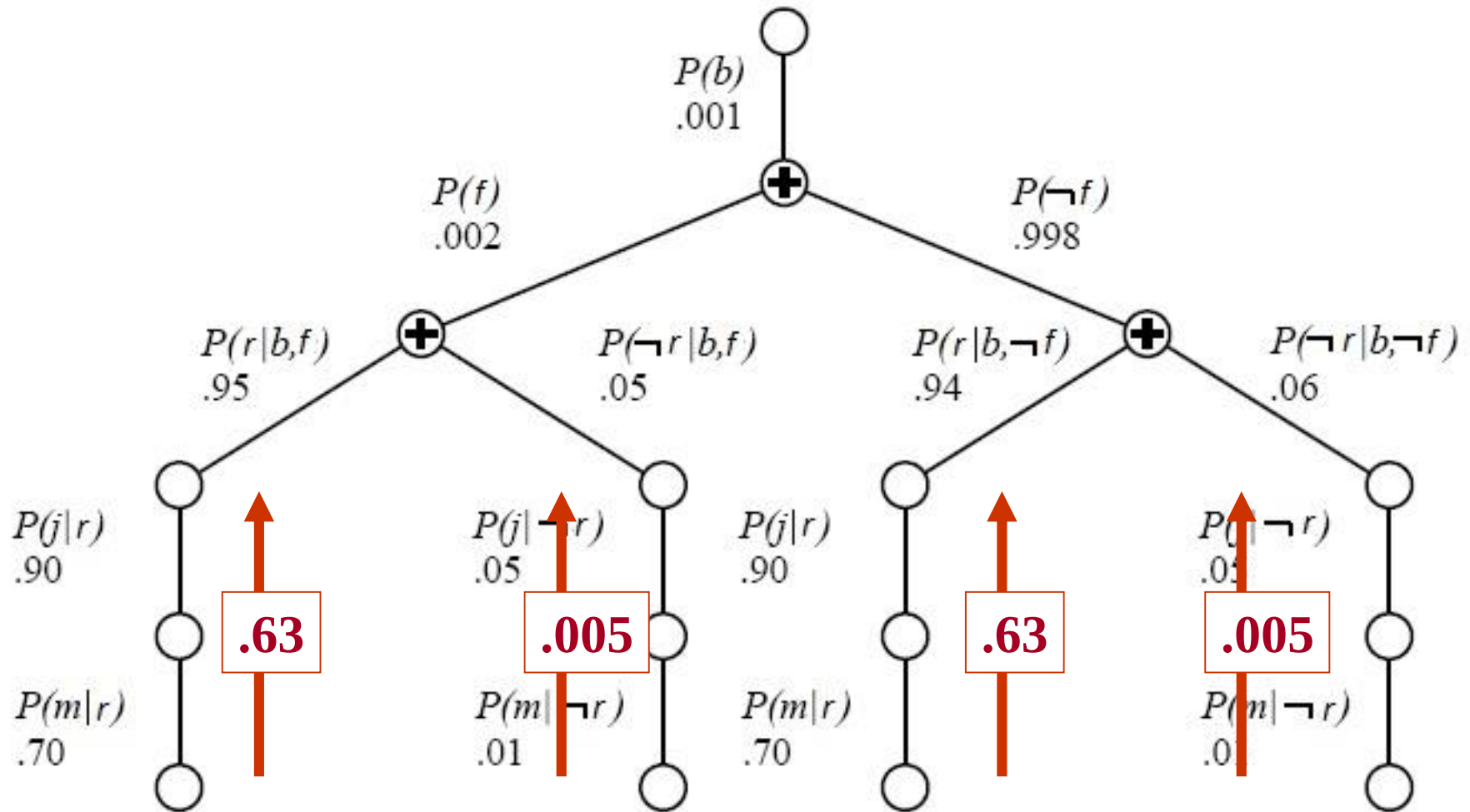
$$\text{és pl. } P(F \mid J \ M) = \alpha \sum_b \sum_r P(F \ b \ r \ J \ M) = \dots$$

$$P(B \mid J \ M) \geq P(F \mid J \ M) ?$$

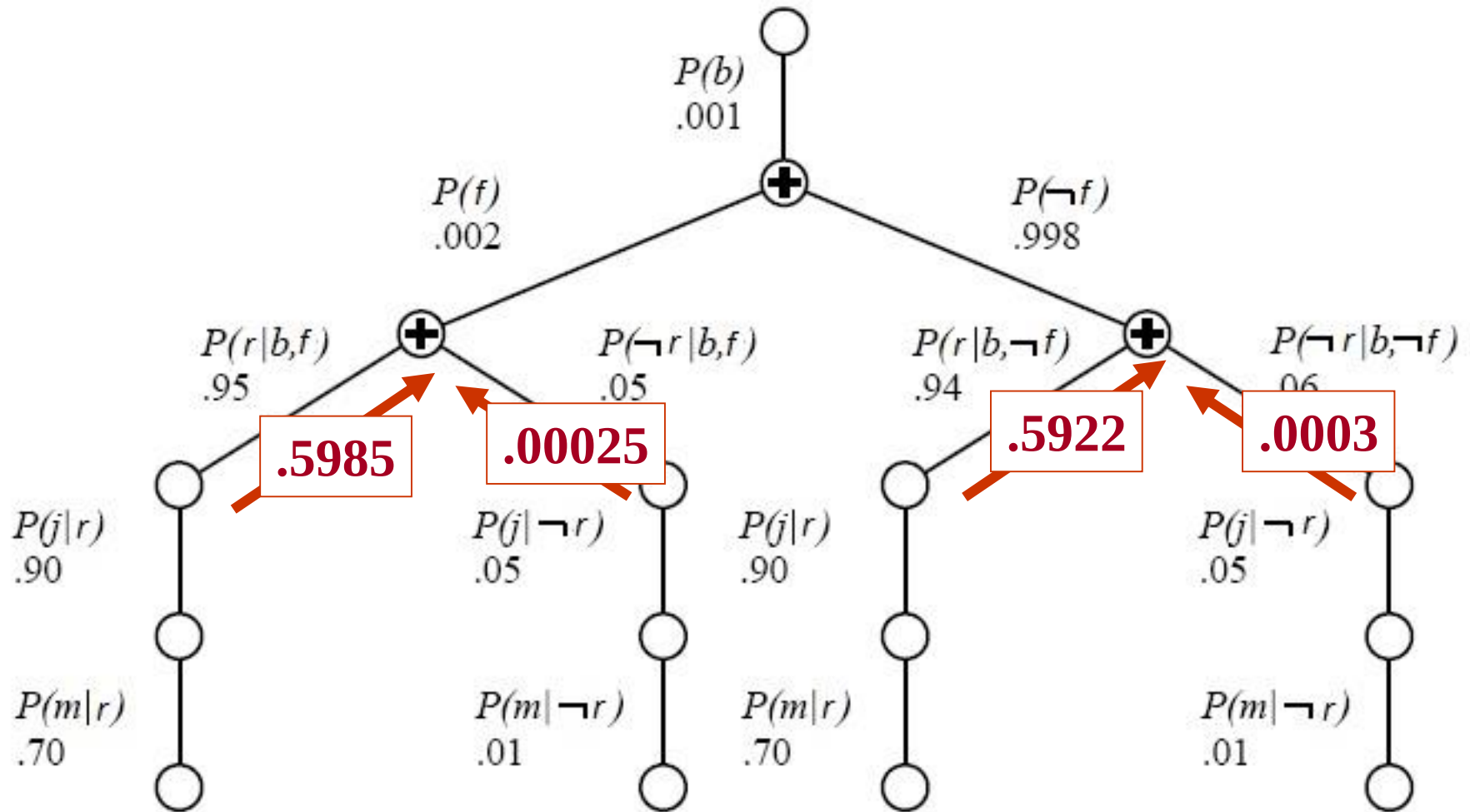
$$P(B \mid J \ M) = \alpha \underbrace{P(B)}_{\text{orange}} \underbrace{\sum_f}_{\text{green}} \underbrace{P(f) \sum_r}_{\text{blue}} \underbrace{P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)}_{\text{red}}$$



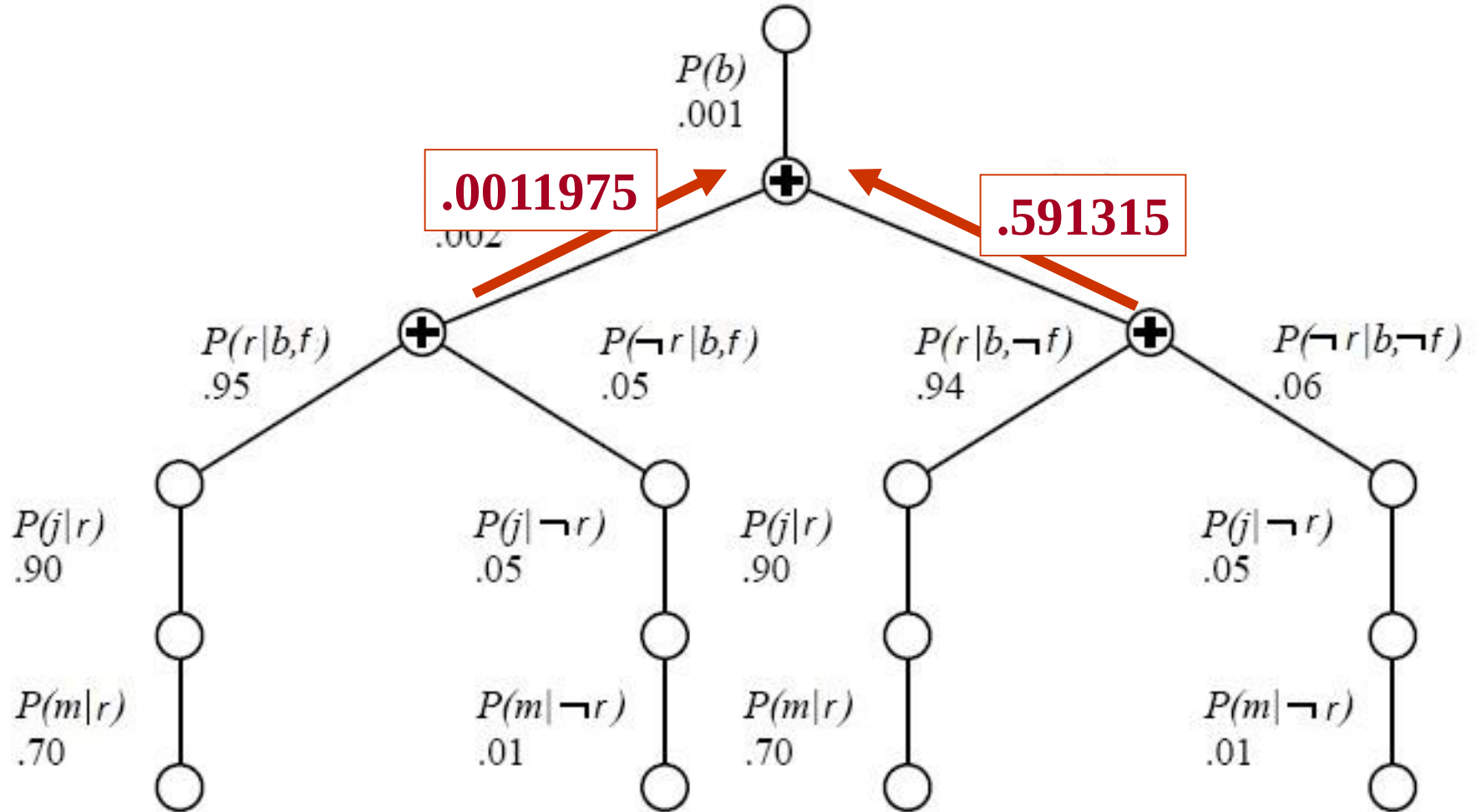
$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$



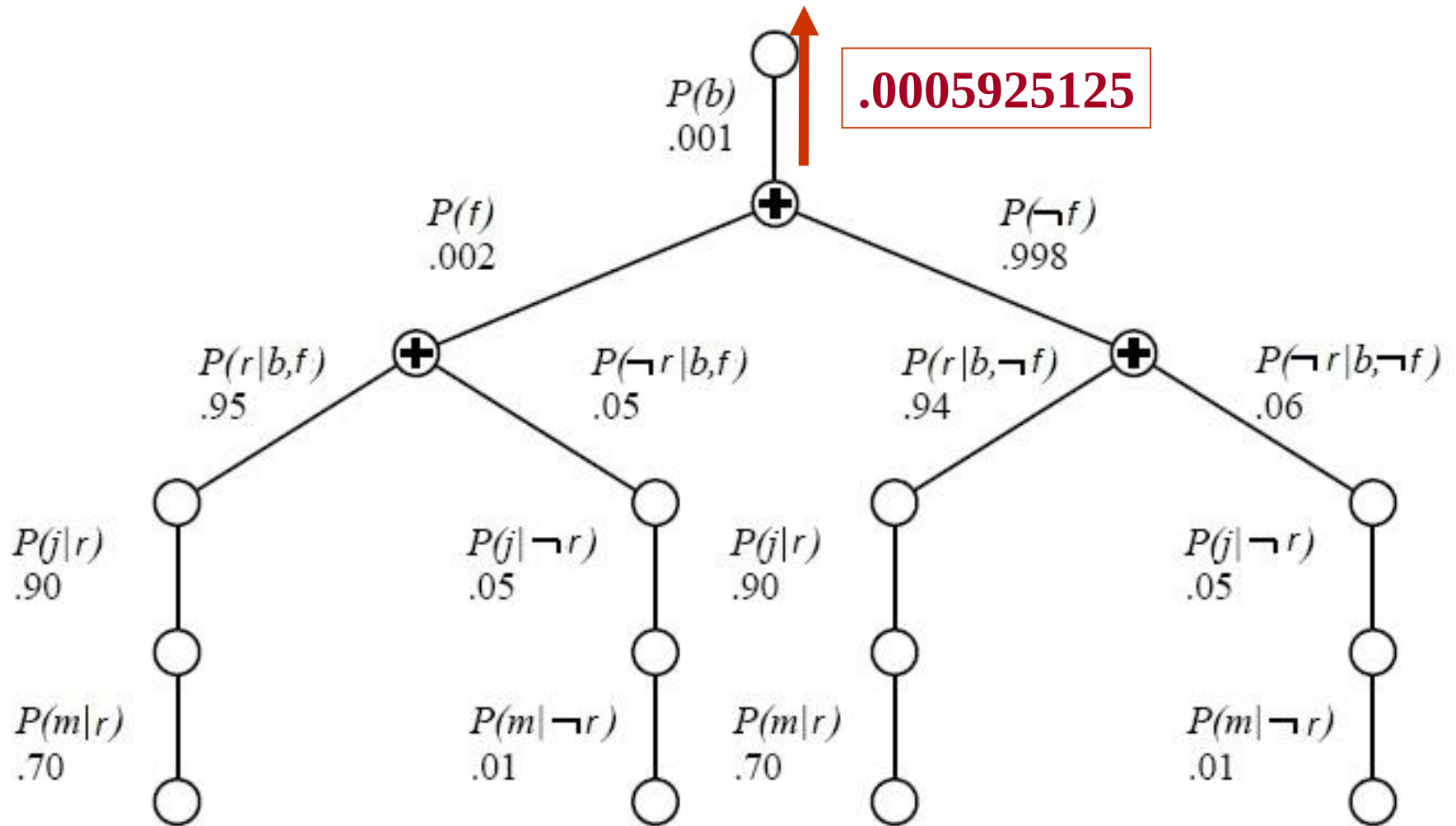
$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$



$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$



$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$



Következtetés változók eliminálásával

$P(B \mid J \ M)$

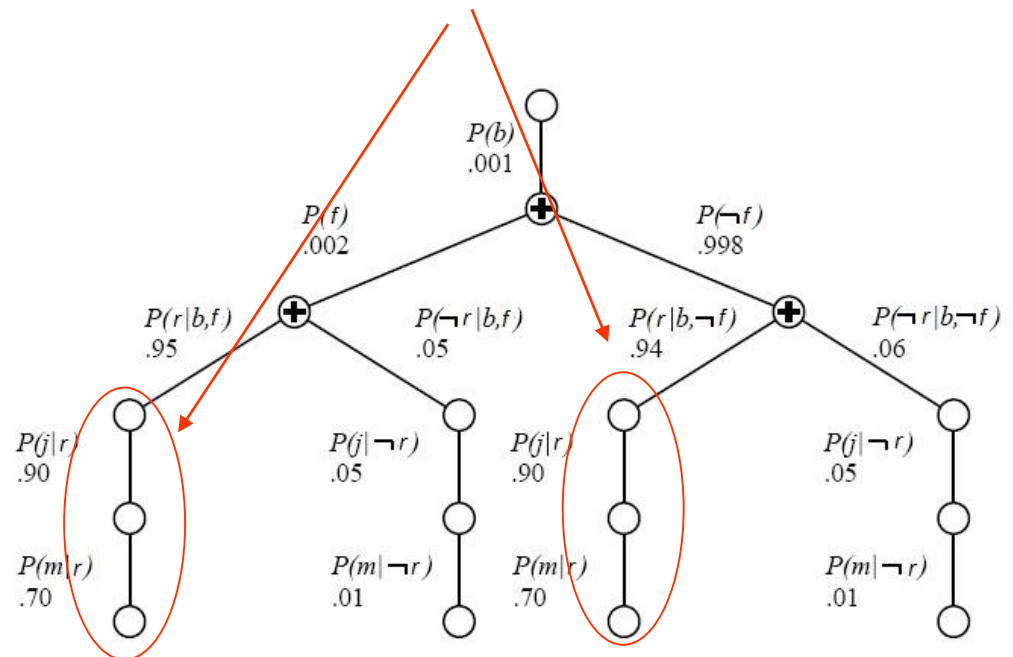
$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$



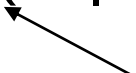
Kiértékelés:

- jobbról balra
- köztes eredmények tárolása

Probléma előbb: bizonyos tagok többszörös kiszámítása, pl.



Irreleváns változók eliminálása

$$P(J \mid B) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B, f) P(J \mid r) \sum_m P(m \mid r) = 1$$


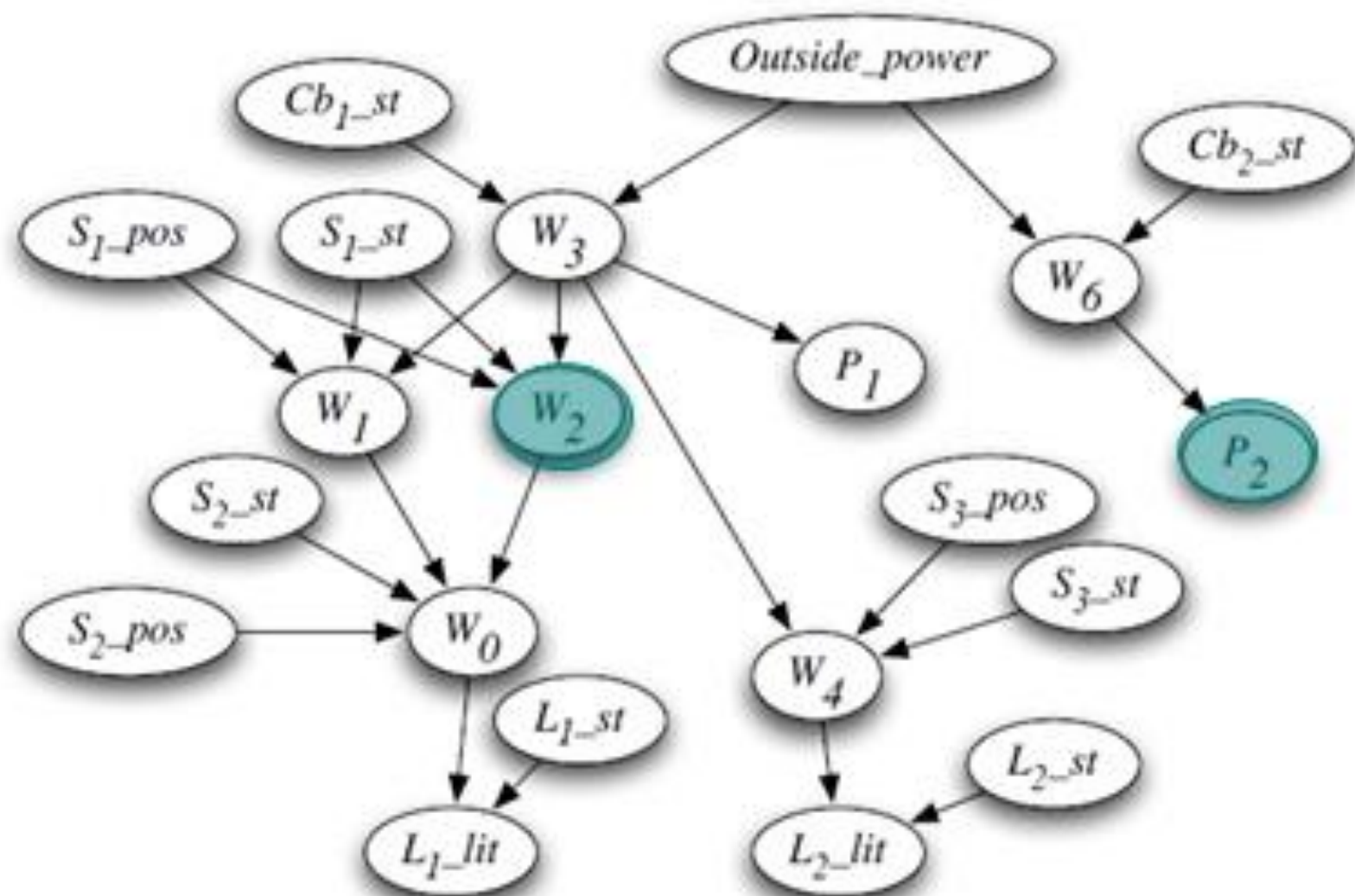
$P(\text{JánosTelefonál} \mid \text{Betörés})$ lekérdezés eredményét nem változtatja meg a MáriaHív eltávolítása a hálóból.

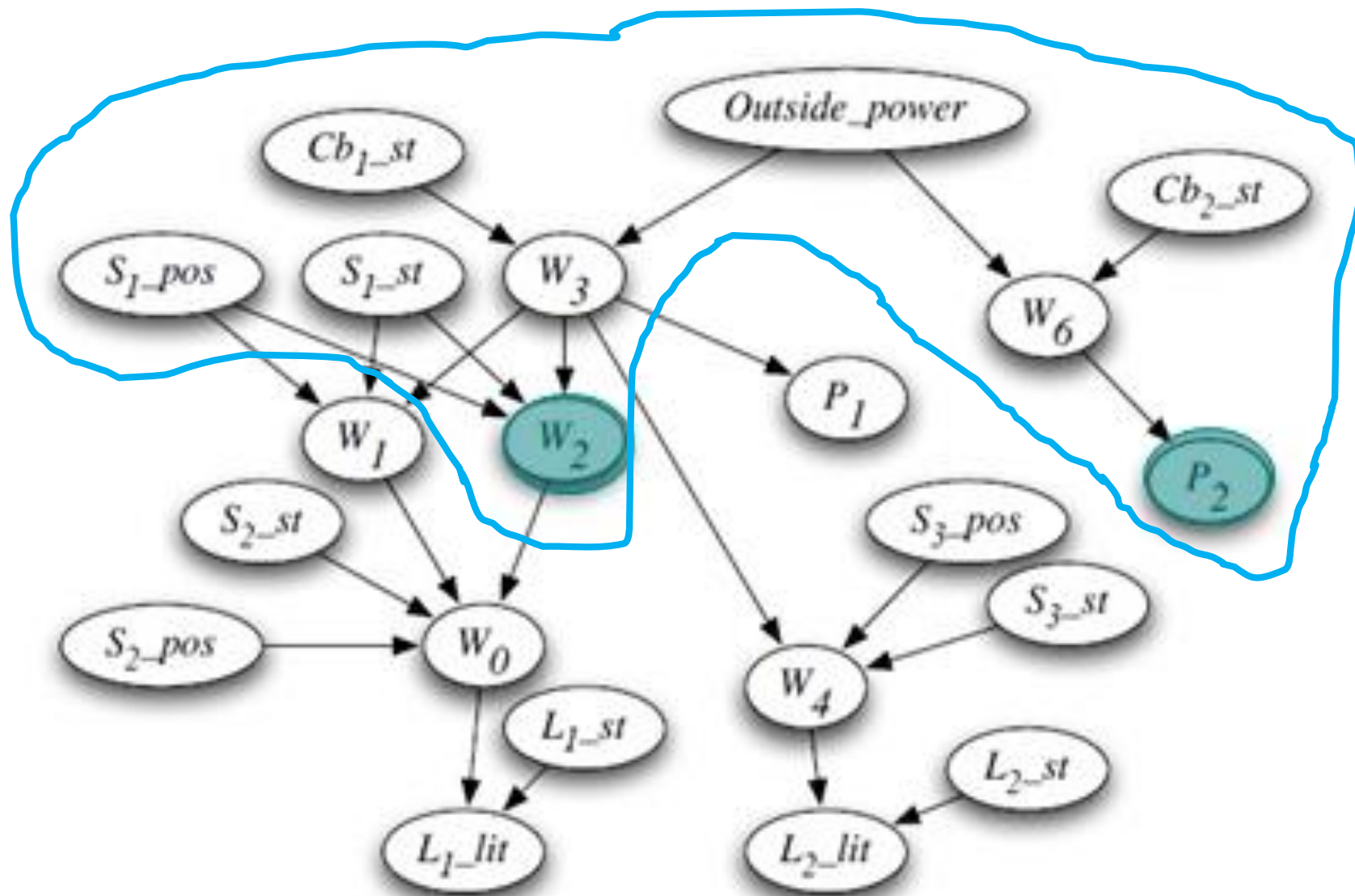
Általában, bármely **levél** csomópontot eltávolíthatunk, ami **nem célváltozó** vagy **nem bizonyíték** változó.

Eltávolítás után lehetnek újabb levélcsomópontok, amelyek szintén irrelevánsak lehetnek.

Minden változó, ami nem őse a célváltozónak, vagy egy bizonyíték változónak irreleváns a lekérdezésre. A változó elimináló algoritmus ezért az összes ilyen változót eltávolíthatja a lekérdezés kiértékelése előtt.

Mi a helyzet a $P(\text{Földrengés} \mid \text{Betörés})$ esetben?





Következtetés változók eliminálásával

- kiértékelés jobbról-balra
- matrixos faktorok FVT helyett
- speciális algebrai műveletek
- lényegesen egyszerűbb implementáció

$$P(B \mid J \ M)$$

$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$

$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$

$$= \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) f_M(r)$$

$$= \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r f_r(r \mid B \ f) \times f_J(r) \times f_M(r)$$

$$= \alpha P(B) \sum_f P(f) f_{fJM}(B \ f)$$

$$= \alpha P(B) \sum_f f_f(f) \times f_{fJM}(B \ f) \quad (\text{matrixos) tényezők}$$

$$= \alpha P(B) f_{JM}(B) \quad \text{speciális szorzattal}$$

$$= \alpha f_B(B) \times f_{JM}(B)$$

Feladat faktorai (FVT – faktor megfeleltetés):

P(b)		P(f)		P(r b f)				P(j r)			P(m r)		
b	f _b	f	f _f	b	f	r	f _{bfr}	r	j	f _{rj}	r	m	f _{rm}
0	0.999	0	0.998	0	0	0	0.999	0	0	0.95	0	0	0.99
1	0.001	1	0.002	0	0	1	0.001	0	1	0.05	0	1	0.01
				0	1	0	0.71	1	0	0.1	1	0	0.3
				0	1	1	0.29	1	1	0.9	1	1	0.7
				1	0	0	0.06						
				1	0	1	0.94						
				1	1	0	0.05						
				1	1	1	0.95						

Műveletek faktorokkal

- behelyettesítés
- változó eliminálása kiösszegzéssel
- faktorok szorzata

$f(j,r) \dots f(j=\text{lgaz},r)$

r	j	f_{rj}
0	0	0.95
0	1	0.05
1	0	0.1
1	1	0.9



r	f_{rJ}
0	0.05
1	0.9

$$\sum_f f_{rbf}(r,b,f) = f_{rbf}(r,b,f=\text{Hamis}) + f_{rbf}(r,b,f=\text{lgaz}) = f_{rb}(r,b)$$

$$f_{rj}(r,j) \times f_{rm}(r,m) = f_{rjm}(r,j,m)$$

r	j	f_{rj}
0	0	0.95
0	1	0.05
1	0	0.1
1	1	0.9

×

r	m	f_{rm}
0	0	0.99
0	1	0.01
1	0	0.3
1	1	0.7

=

r	j	m	f_{rjm}
0	0	0	0.95 x 0.999
0	0	1	0.95 x 0.01
0	1	0	0.05 x 0.99
0	1	1	0.05 x 0.01
1	0	0	0.1 x 0.3
1	0	1	0.1 x 0.7
1	1	0	0.9 x 0.3
1	1	1	0.9 x 0.7

$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$

b	f _b			f	f _f			b	f	r	f _{bfr}			r	j	f _{rj}			r	m	f _{rm}
0	0.999			0	0.998			0	0	0	0.999			0	0	0.95			0	0	0.99
1	0.001	×	Σ	1	0.002	×	Σ	0	0	1	0.001	×		0	1	0.05	×		0	1	0.01
								0	1	0	0.71			1	0	0.1			1	0	0.3
								0	1	1	0.29			1	1	0.9			1	1	0.7
								1	0	0	0.06										
								1	0	1	0.94										
								1	1	0	0.05										
								1	1	1	0.95										

$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B \ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$

f_B	f	f_f	f	r	f_{Bfr}	r	f_{rJ}	r	f_{rM}
0.001	0	0.998	0	0	0.06	0	0.05	0	0.01
	0	0.998	0	1	0.94	1	0.9	1	0.7
	1	0.002	1	0	0.05				
			1	1	0.95				

f_B	f	f_f	f	r	f_{Bfr}	r	f_{rJM}
0.001	0	0.998	0	0	0.06	0	0.05×0.01
	0	0.998	0	1	0.94	1	0.9×0.7
	1	0.002	1	0	0.05		
			1	1	0.95		

f_B	f	f_f	f	r	f_{BJMfr}
0.001	0	0.998	0	0	$0.06 \times 0.05 \times 0.01$
	0	0.998	0	1	$0.94 \times 0.9 \times 0.7$
	1	0.002	1	0	$0.05 \times 0.05 \times 0.01$
			1	1	$0.95 \times 0.9 \times 0.7$

$$P(B \mid J M) = \alpha P(B) \sum_f P(f) \sum_r P(r \mid B f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$

			f	r	f _{BJMfr}		
f _B		f	f _f				
0.001	×Σ	0	0.998	×Σ	0	0	0.06 x 0.05 x 0.01
		1	0.002		0	1	0.94 x 0.9 x 0.7
					1	0	0.05 x 0.05 x 0.01
					1	1	0.95 x 0.9 x 0.7

.0005925125

f_B		f	f_f		f	f_{BJMf}
0.001	$\times \Sigma$	0	0.998	$\times$	0	$0.06 \times 0.05 \times 0.01 + 0.94 \times 0.9 \times 0.7$
		1	0.002		1	$0.05 \times 0.05 \times 0.01 + 0.95 \times 0.9 \times 0.7$

f_B	f	f_{BJMf}
0.001	0	0.998 x (0.06 x 0.05 x 0.01 + 0.94 x 0.9 x 0.7)
	1	0.002 x (0.05 x 0.05 x 0.01 + 0.95 x 0.9 x 0.7)

f_B	f_{BJM}
0.001	$\times$ 0.998 x (0.06 x 0.05 x 0.01 + 0.94 x 0.9 x 0.7) + 0.002 x (0.05 x 0.05 x 0.01 + 0.95 x 0.9 x 0.7)

$$.001 \times (.998 \times (.06 \times .05 \times .01 + .94 \times .9 \times .7) + 0.002 \times (.05 \times .05 \times .01 + .95 \times .9 \times 0.7))$$

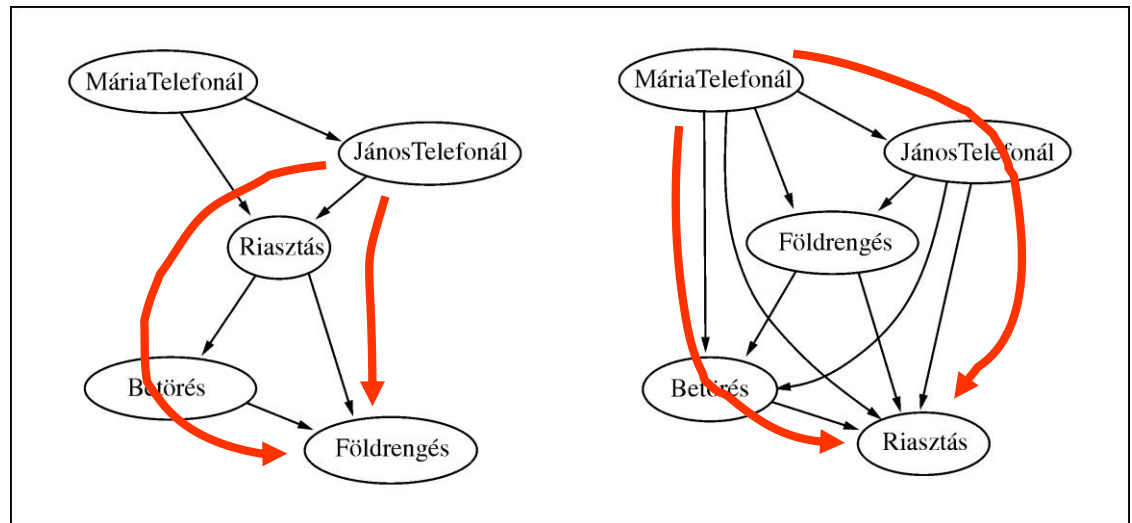
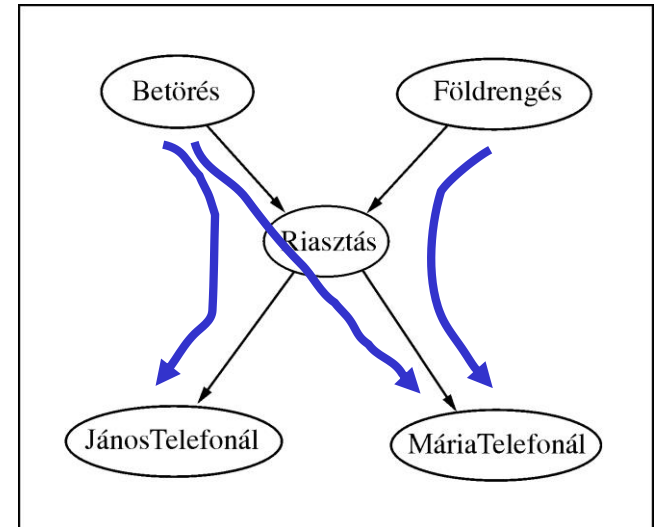
Az egzakt következtetés komplexitása

egyszeresen összekötött,

bármely két csp. között legfeljebb egyetlen egy irányítatlan út van

többszörösen összekötött

bármely két csomópont között több az út



Algoritmusok lekérdezések megválaszolására

A.) egyszeresen összekötött, fa gráf (polytree)

- létezik lineáris komplexitású algoritmus

B.) többszörösen összekötött

- nem létezik zárt alakú (rekurzív) algoritmus
- vagy a komplexitás megugrik (l. előbb), vagy csak közelítő módszerek maradnak

A számítás rekurzív hívásokból áll, X-ből indulva, a hálóban minden lehetséges úton haladva (fel/le).

A rekurzió leáll a:

ténycsomópontokon,

gyökércsomópontokon (szülő nélküli csomópont) és

levélcsomópontokon (gyermek nélküli csomópont).

Az algoritmus lineáris a háló csomópontjainak számában.

Ez csak azért lehetséges, mert a háló fa gráf.

Következtetés többszörösen összekötött hálókbán

Előbbi általános egzakt módszerek ...

Csoportosító, összevonó eljárások:

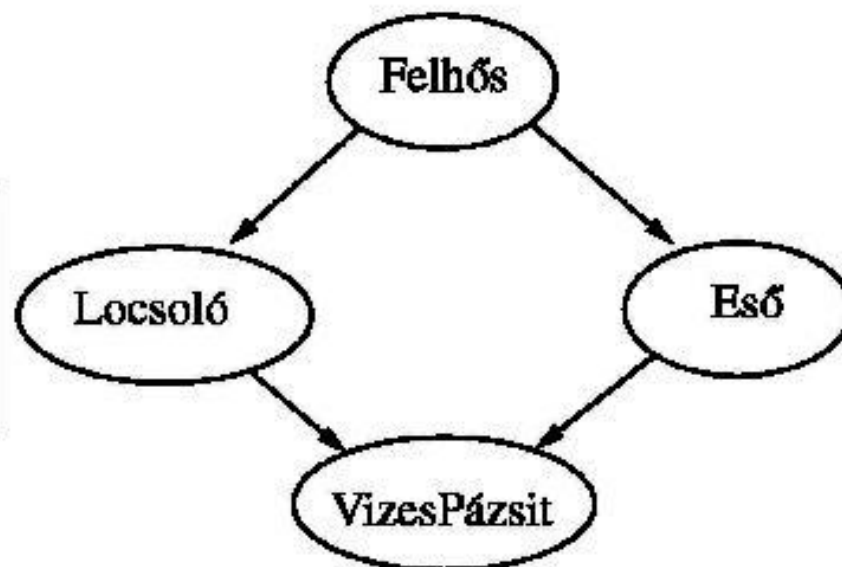
- Átalakítják a hálót a valószínűségek szempontjából ekvivalens (de más topológiájú) fa gráffá, a nem megfelelő csomópontokat összevonva (majd lineáris).

Sztokasztikus szimulációk eljárások:

- A tárgytartomány nagyon nagy számú konkrét modelljét generálják le, ami konzisztens a valószínűségi háló általdefiniált eloszlással.
- Ez alapján az egzakt eredmények közelítését adják.

$$P(F) = 0,5$$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

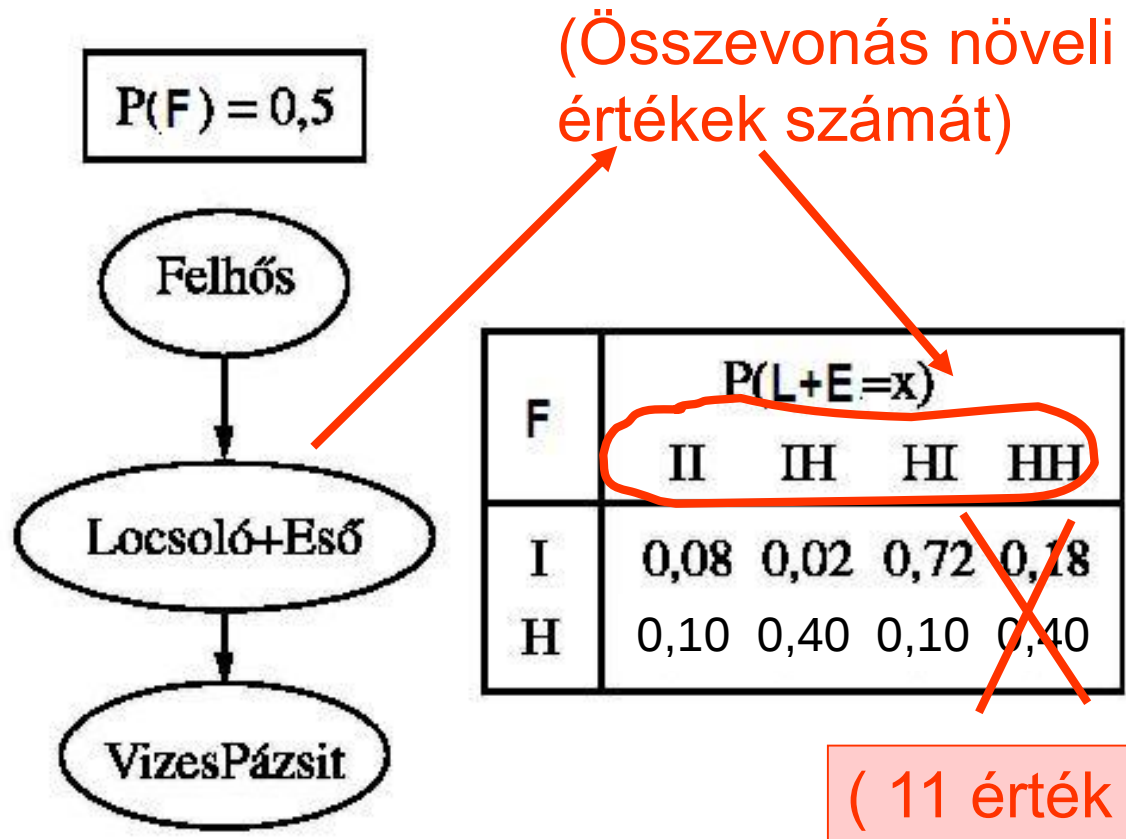


F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

(9 érték)

Összevonás



L+E	P(V)
I I	0,99
I H	0,90
H I	0,90
H H	0,00

Következtetés egyszerűbb, de az összevonás exponenciális is lehet, ügyes összevonás komplexitásba kerül.

Közvetlen logikai mintavételezés: sztochasztikus szimuláció

Ismételten leszimuláljuk a háló által leírt világot

(háló = véletlen számgenerátor, elemi eseményeket sorsol)

a kérdéses valószínűségeket a megfelelő események előfordulási gyakoriságával becsüljük meg.

Minden szimulációs ciklusban:

- a gyökér csomópontok értékeinek véletlen sorsolása az a priori valószínűségeinek megfelelően
- ez szülői feltétel a gyerek csomópontok számára, a gyerek sorsolásához a valószínűséget a szülői feltételhez rendelt FVT-ból választjuk
- ugyanezt tesszük lefelé haladva a hálóban

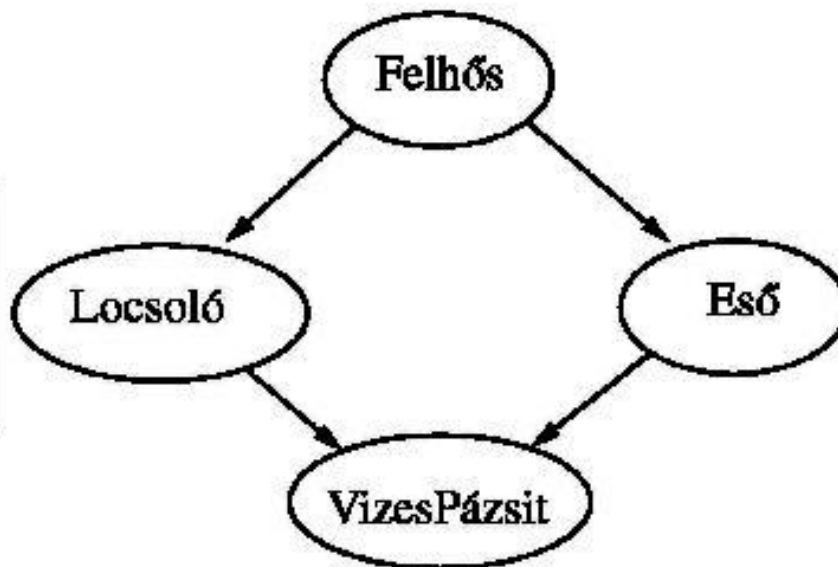
A $P(X)$ megbecsüléséhez a folyamatot sokszor megismételjük, és kiszámítjuk az esemény relatív frekvenciáját.

Sorsolás



$$P(F) = 0,5$$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

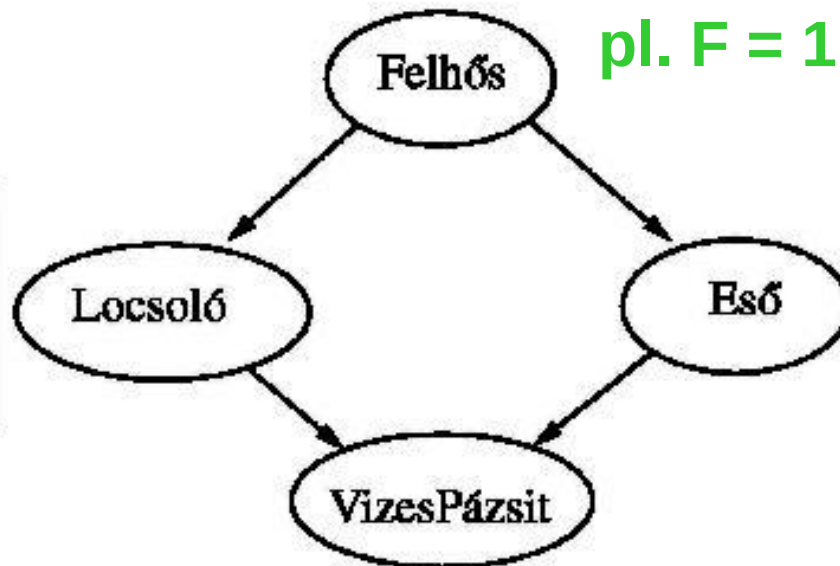
L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

pl. $L = 0$

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

$$pl. L = 0$$

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

Locsoló

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Eső

$$Sorsolás \rightarrow pl. L = 0$$

$$pl. E = 1 \leftarrow Sorsolás$$

VizesPázsit

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás → pl. $L = 0$

pl. $E = 1$ ← Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

pl. $L = 0$

pl. $E = 1$

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

Locsoló

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Eső

Sorsolás

$$pl. L = 0$$

$$pl. E = 1$$

Sorsolás

VizesPázsit

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$pl. V = 1$$

Elutasító logikai mintavételezés

először a háló által megadott a priori eloszlásból generál mintákat, majd elutasítja azokat, amelyek nem illeszkednek a bizonyítékhoz.

Sorsolások száma = $Locsoló = Igaz \ N_L$ (nincs elutasítva)
 $Locsoló = Igaz$ és $Eső = Igaz \ N_{LE}$

$$P(Eső | Locsoló) \leftarrow N_{LE} / N_L$$

Az elutasító mintavétel legnagyobb hibája, hogy nagyon sok mintát utasít el.

Az **e** bizonyítékkal konzisztens minták aránya exponenciálisan egyre kevesebb, ahogy a bizonyítékváltozók száma nő (**több feltétel = egyre ritkább esemény**), így az eljárás egyszerűen használhatatlan komplex problémákban.

A fő probléma: ha az érdekes események igen ritkán fordulnak elő.

Pl. a következő értéket szeretnénk tudni:

$$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit} \wedge \text{Locsoló})$$

Mivel az $\text{VizesPázsit} \wedge \text{Locsoló}$ ritkán fordul elő a világban, a szimuláció során a legtöbb menetben más értékeket kapunk ezekre a tény változókra, és ezeket az eseteket **nem tudjuk felhasználni**.

Valószínűségi súlyozás

amikor tény változóhoz érünk, ahelyett, hogy véletlenül választanánk egy értéket (a feltételes valószínűségek alapján), mindig a tény változó adott kívánt értékét választjuk

(= a ritka esemény **mindig** forduljon elő!)

de felhasználjuk a feltételes valószínűségét, hogy az mennyire is valószínű.

(az így kapott hozzájárulás a relatív frekvenciához nem 1, hanem kis valószínűség, a likelihood értékek szorzata)

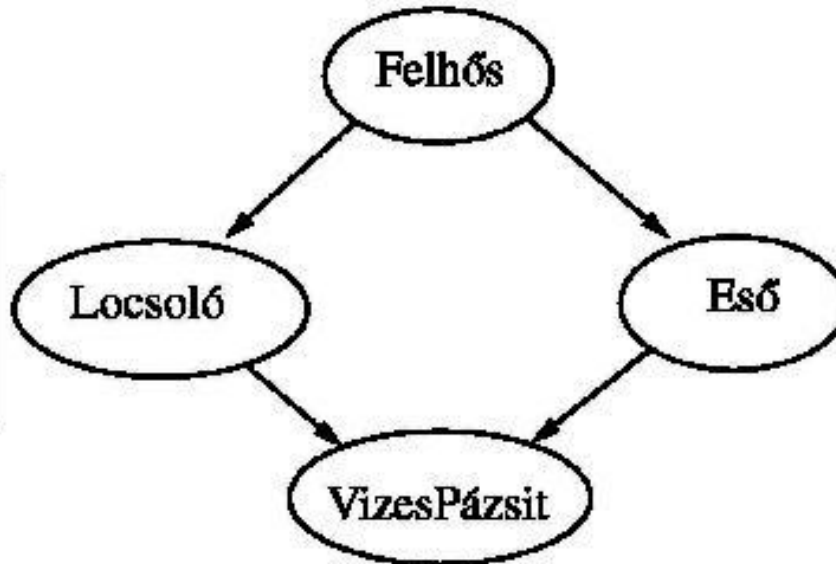
Példa:

$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

$W = 1$

Példa:

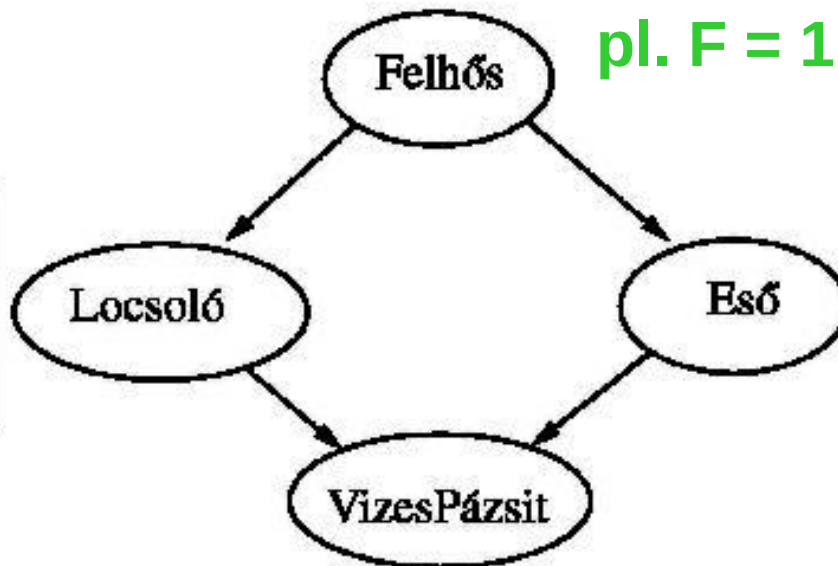
$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$

Sorsolás

$P(F) = 0,5$

pl. $F = 1$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

$W = 1$

Példa:

$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$

Sorsolás

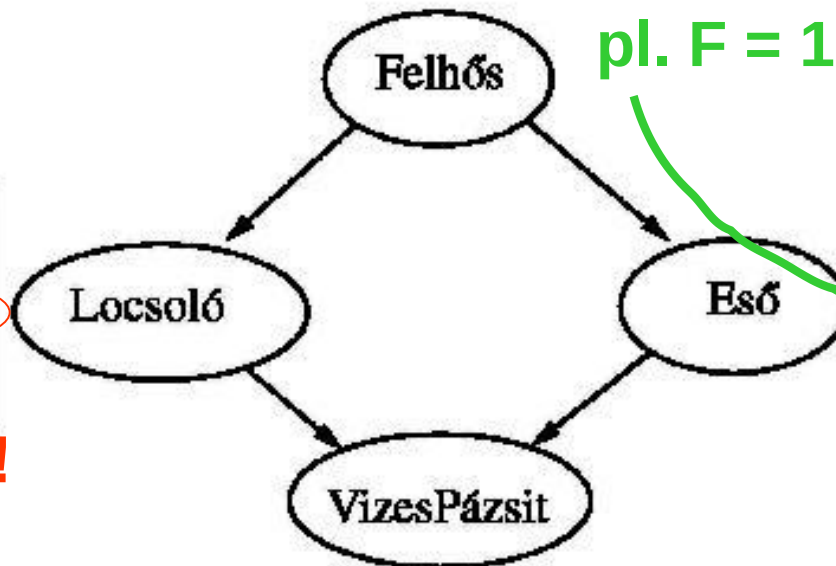
$P(F) = 0,5$

pl. $F = 1$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

Beállítás!

$L = 1$



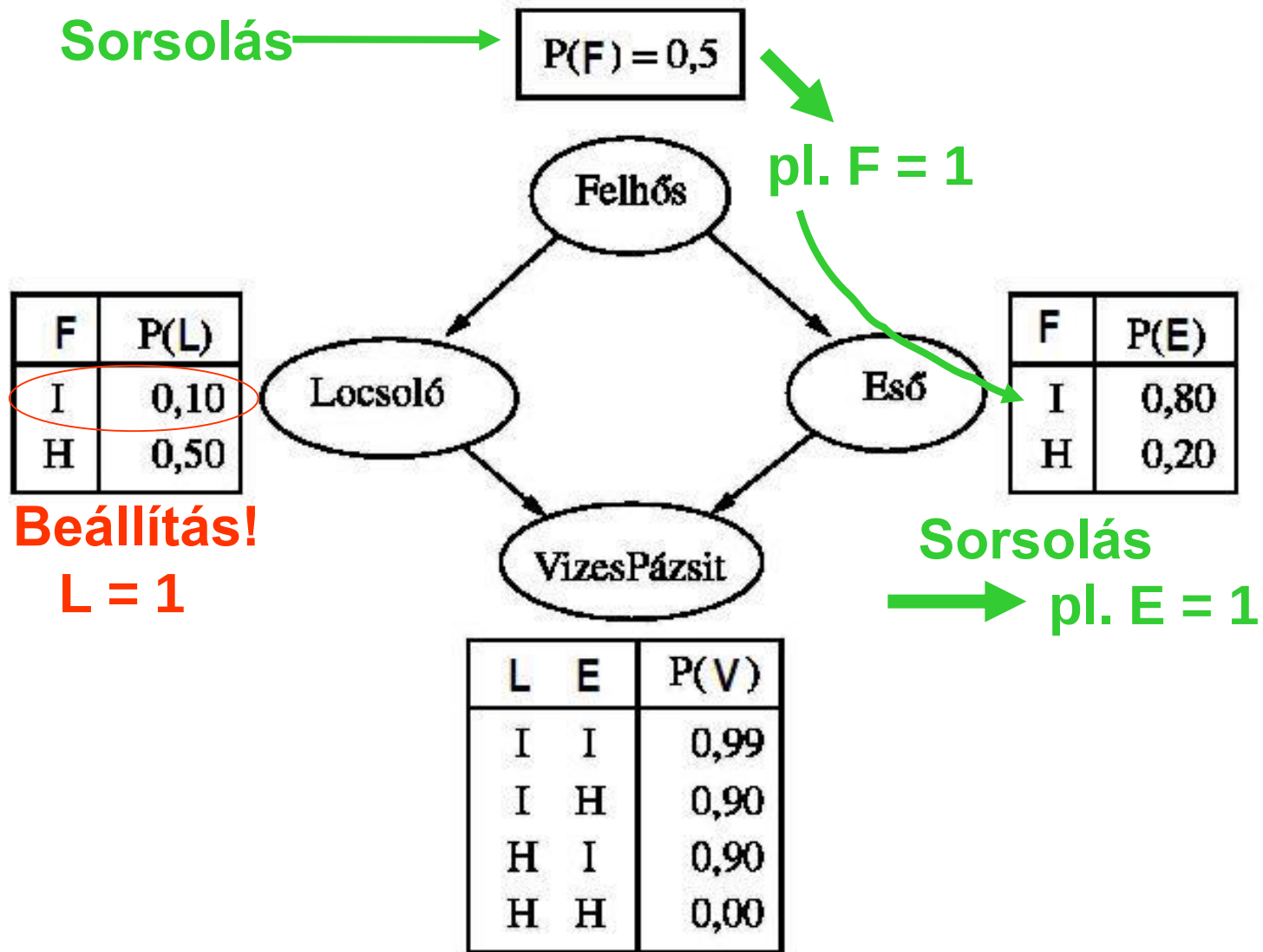
F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

$W \leftarrow W \times P(\text{Locsoló}=\text{igaz} \mid \text{Felhős}=\text{igaz}) = 0,1.$

Példa:

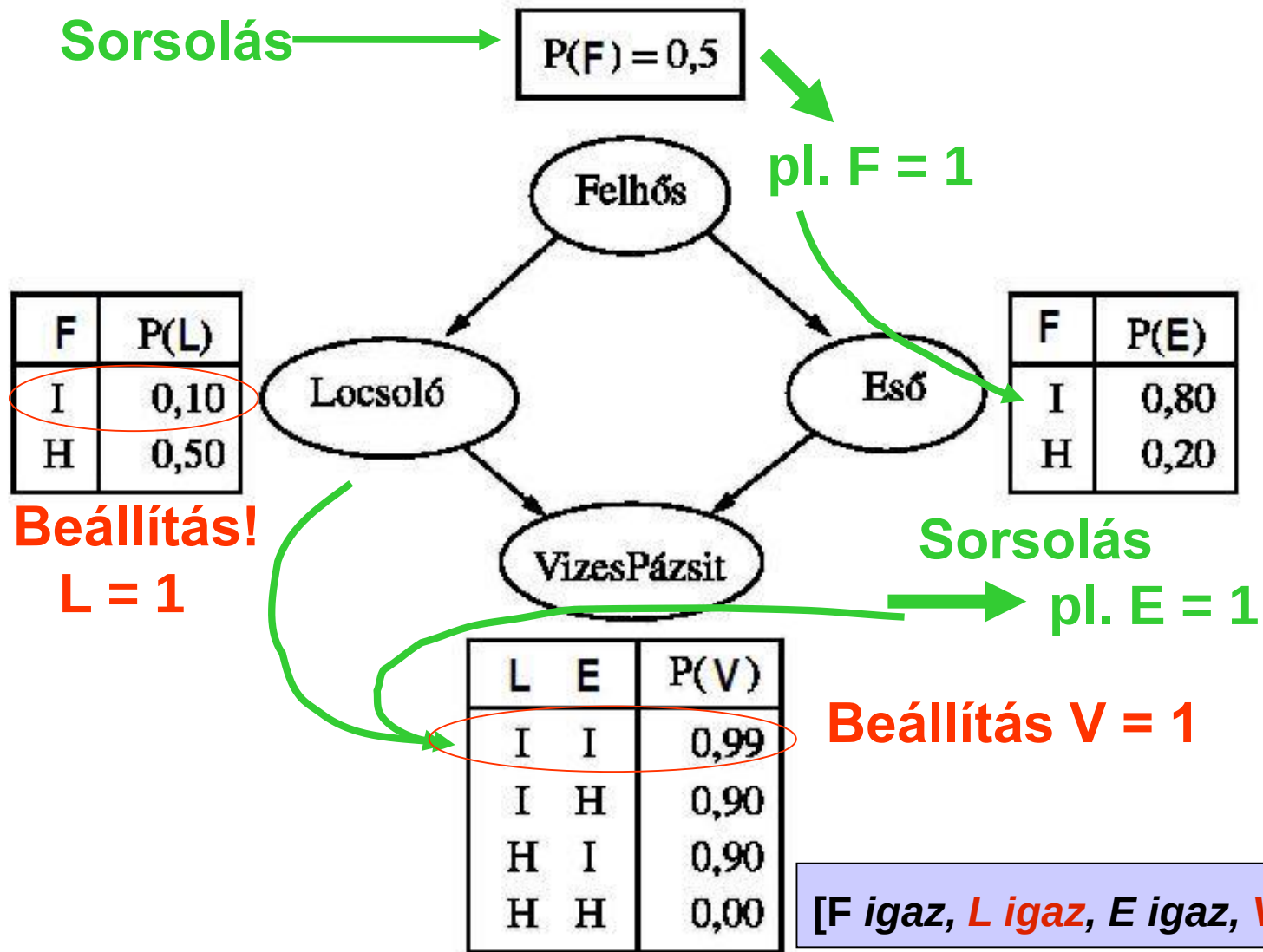
$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$



$$W \leftarrow W \times P(\text{Locsoló}=\text{igaz} \mid \text{Felhős}=\text{igaz}) = 0,1.$$

Példa:

$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$



$$W \leftarrow W \times P(\text{VizesPázsit}=\text{igaz} \mid \text{Locsoló}=\text{igaz}, \text{Esős}=\text{igaz}) = 0,099.$$

Valószínűségi súlyozás

- valószínűségi súlyozás az összes generált mintát felhasználja
- a teljesítménye leromlik, amint a bizonyíték változók száma növekszik (a legtöbb mintának nagyon kis súlya lesz és így a súlyozott becslést főként a minták azon töredéke határozza meg, amelyek egy elenyésző valószínűségnél jobban illeszkednek a bizonyítékokhoz)
- **gyorsabban konvergál**, mint a logikai mintavételezés
- **igen nagy méretű** valószínűségi hálókat is képes kezelni
- probléma: pontos valószínűség kis valószínűségű eseményekre
= **hosszú idő**
- egy adott pontossághoz szükséges futási idő **fordítottan arányos** az esemény valószínűségével

Kritikus események: ... egy nukleáris reaktor leolvadása egy adott napon $P \cong 0$, de nagy különbség van 10^{-5} és 10^{-10} között, így ekkor is pontos értékeket kell kapnunk