ANALÍZIS (2), A kurzus **ÖSSZEVONT VIZSGADOLGOZAT** **2001. június 18.**
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc

I. rész

1) Feladat (20 pont).

a) Cserélje fel az integrálás sorrendjét és számolja ki:

$$\int_0^1 \int_{2x}^1 \frac{x \sin y}{y} dy dx$$

b) Mutassa meg, hogy konvergens és a gömbi koordináták bevezetésével számolja ki:

$$\int\int\int_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2)}} dV = ?$$

ahol $V: x^2+y^2+z^2 \geq R^2$
Jacobi det: $\rho^2 \sin(\vartheta)$

2) Feladat (12 pont).
Számolja ki a

$$w = (\overline{z})^2 z$$

valós és képzetes részét!
Hol differenciálható ez a függvény?

3) Feladat (10 pont).
Bizonyítsa be, hogy

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

II. rész

1) Feladat (15 pont).

a) Hogyan dönthetjük el az egyenletes konvergenciát az uniform norma segítségével?

b) Legyen

$$f_n(x) = \frac{\arctan(n^2 x)}{nx^2 + \sqrt(n)}, x \in \mathbf{R}$$

$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$ Egyenletesen konvergál-e az f_n az f-hez a $(0, \infty)$-on?

2) Feladat (20 pont).
Bizonyítsa be a binomiális sorra vonatkozó tételt!

3) Feladat (15 pont).
Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \in [-\pi/2,\ \pi/2), \\ 0, \text{ ha } x \in [-\pi,\ -\pi/2) \text{ vagy } x \in [\pi/2,\ \pi), \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$$

függvény Fourier-sorát és annak összegfüggvényét!
Egyenletesen konvergál-e ez a Fourier-sor?

4) Feladat (18 pont).
Írja le a totális differenciálhatóság, gradiens és az iránymenti derivált definíciókat és az utóbbi kiszámítási módját! (Állítását bizonyítsa be!) Mi a gradiens jelentése? (Indokoljon!)

5) Feladat (15 pont).
Írja le az e^z és az $\ln z$ $,z \in \mathbf{C}$ definícióit, kiszámítási módjait és tulajdonságait!

6) Feladat (17 pont).
Mondja ki a komplex integrálokra vonatkozó Cauchy integrál formulát (elsőt) és bizonyítsa be!

(pdf by Zizi)