**ANALÍZIS 1.** | **II. ZH MEGOLDÁS** | **2013. november 21.**
Mérnök informatikus szak | A csoport | Munkaidő: 90 perc

**1. feladat (16 pont)**

Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x(x-1)^2}$ függvénynek?

---

$f$ folytonos függvények hányadosainak kompozíciója, illetve szorzata, így a nevező zérushelyeinek kivételével folytonos. (**2p**)

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{-1}{4} \lim_{x\to -1\pm} \frac{1}{x+1} = \mp\infty,$$

vagyis az $x = -1$ pontban a függvénynek másodfajú szakadása van (**4p**).

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1\pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

vagyis az $x = 1$ pontban a függvénynek megszüntethető, vagyis elsőfajú szakadása van. (**4p**)

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2},$$

vagyis az $x = 0$ pontban a függvénynek véges ugrása, vagyis elsőfajú szakadása van (**4p**).

---

**2. feladat (15 pont)**

Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \sin(4x)\cos\frac{1}{3x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin(4x^2)\cos\frac{1}{3x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvények deriváltját, ahol létezik.

---

Ha $x \neq 0$, akkor

$$f'(x) = 4\cos(4x)\cos\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\sin(4x)\sin\frac{1}{3x}, \qquad \textbf{(3p)}$$

$$g'(x) = 8x\cos(4x^2)\cos\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\sin(4x^2)\sin\frac{1}{3x},. \qquad \textbf{(4p)}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(4h)\cos\frac{1}{3h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(4h)}{4h} \cdot 4\cos\frac{1}{3h} = \lim_{h\to 0} 4\cos\frac{1}{3h} \quad \nexists \quad \textbf{(3p)}$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(4h^2)\cos\frac{1}{3h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(4h^2)}{4h^2} \cdot 4h\cos\frac{1}{3h} = \lim_{h\to 0} 4h\cos\frac{1}{3h} = 0.$$

**(5p)**

**3. feladat (14 pont)**
a) Adja meg $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$ definícióját.
b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{x \to 1+} \ln(x^2 - 1) = -\infty$
c) Mennyi $\lim\limits_{x \to 1-} \ln(x^2 - 1)$?

---

a) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$, ha minden $M < 0$ számhoz létezik olyan $\delta(M) > 0$, hogy $x \in (x_0, x_0 + \delta(M))$ esetén $f(x) < M$. (**4p**)
b) Legyen $M < 0$ és $x > 1$.

$$\ln(x^2 - 1) < M \Leftrightarrow (x+1)(x-1) < e^M \Leftrightarrow (x - 1) < \frac{e^M}{1 + x} < \frac{e^M}{2}, \quad \textbf{(5p)}$$

vagyis $\delta(M) = \frac{1}{2} e^M$. (**2p**)
c) $x \in (-1, 1)$ esetén a függvény nincs értelmezve, így nincs baloldali határértéke. (**3p**)

---

**4. feladat (18 pont)**
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a) \quad \lim_{x \to 0+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{sh} x} \qquad\qquad b) \quad \lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{arch}(1 - \mathrm{x})}$$

---

a) $\infty^0$ típusú határérték, határozatlan alak, (**1p**) de

$$\lim_{x \to 0+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{sh} x} = \lim_{x \to 0+} e^{\operatorname{sh} x \ln\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \textbf{(2p)}$$

és

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sh} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sh} x}} \overset{\textbf{2p}}{=}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}} \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x \operatorname{ch} x} \overset{\textbf{2p}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x} \overset{\textbf{1p}}{=} 0,$$

így

$$\lim_{x \to 0+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x} = e^0 = 1. \qquad \textbf{(1p)}$$

b) $\frac{0}{0}$ típusú határérték, határozatlan alak (**2p**), de

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{arch}(1-\mathrm{x})} \overset{\mathbf{3p}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{\frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2-1}}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{-\sqrt{-2x+x^2}}{\operatorname{ch}^2 x} \overset{\mathbf{1p}}{=} 0.$$

---

**5. feladat (17 pont)**
Legyen $f(x) = 4\pi + 8\arcsin(6-2x)$.
a) Adja meg $f$ értelmezési tartományát, értékkészletét, illetve deriváltját.
b) Bizonyítsa be, hogy $f$ invertálható, és határozza meg inverzét, annak értelmezési tartományát, értékkészletét, illetve deriváltját.

---

a) $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$, így

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \le 6-2x \le 1 \Leftrightarrow -7 \le -2x \le -5 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \le x \le \frac{7}{2},$$

vagyis $D_f = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ (**2p**). $R_{\text{arcsin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, így

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(6-2x) \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -4\pi \le 8\arcsin(6-2x) \le 4\pi \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 8\pi,$$

vagyis $R_f = [0, 8\pi]$. (**2p**)

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{-2}{\sqrt{1-(6-2x)^2}}. \qquad \textbf{(3p)}$$

b) $f'(x) < 0$, ha $x \in D_f$, vagyis a függvény a teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható (**3p**), és

$$\begin{aligned} y = 4\pi + 8\arcsin(6-2x) \quad &\Leftrightarrow \frac{y-4\pi}{8} = \arcsin(6-2x) \\ &\Leftrightarrow \sin\frac{y-4\pi}{8} = 6-2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(6-\sin\frac{y-4\pi}{8}\right) = x, \end{aligned}$$

vagyis $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(6-\sin\frac{x-4\pi}{8}\right)$ (**2p**).
$D_{f^{-1}} = R_f = [0, 8\pi]$, $R_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ (**2p**), és

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{x-4\pi}{8}\right) \cdot \frac{1}{8}. \qquad \textbf{(3p)}$$

---

**6. feladat (20 pont)**
Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen ($D_f$, szimmetriák,

zérushelyek, határértékek, monotonitás, konvexitás), majd ábrázolja a függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}.$$

---

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (**1p**). $f$ nem páratlan, nem páros ($D_f$ nem szimmetrikus az origóra), nem periodikus ($D_f$ sem az) (**2p**). Zérushelyei az $x^2 + x = 0$ egyenlet megoldásai: $0, -1$ (**2p**).

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty. \qquad \textbf{(2p)}$$

$$\lim_{x \to 1\pm} f(x) = \lim_{x \to 1\pm} \frac{2}{x - 1} = \pm\infty. \qquad \textbf{(2p)}$$

A monotonitási intervallumok vizsgálatához:

$$f'(x) = \left( x + 2 + \frac{2}{x - 1} \right)' = 1 - \frac{2}{(x - 1)^2} = 0, \qquad \textbf{(2p)}$$

ha $(x - 1)^2 = 2$, vagyis $x = 1 \pm \sqrt{2}$, így

| | $(-\infty,1-\sqrt{2})$ | $1-\sqrt{2}$ | $(1-\sqrt{2},1)$ | $(1,1+\sqrt{2})$ | $1+\sqrt{2}$ | $(1+\sqrt{2},\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ |

(**4p**)

A konvexitáshoz:

$$f''(x) = \left( 1 - \frac{2}{(x - 1)^2} \right)' = \frac{4}{(x - 1)^3} \begin{cases} > 0, & \text{ha } x > 1 \\ < 0 & \text{ha } x < 1, \end{cases} \qquad \textbf{(2p)}$$

így

| | $(-\infty, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | $\cap$ | $\cup$ |

(**1p**)

Ábra (**2p**).