Valószínűségszámítás vizsga dolgozat

Műszaki informatika szak

2012. május 31.

1. Legyen $X \in N(0,1)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 3\right) \leq \frac{1}{3}$!

   Megoldás: A Csebisev-egyenlőtlenségből:
   $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 3\right) = \mathbf{P}\left(|X-0| \geq \sqrt{3}\right) \leq \frac{1}{3}$.

2. Legyenek $X, Y \in B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ paraméterű független binomiális eloszlású valószínűségű változók. Mutassuk meg, hogy $X+Y$ és $|X-Y|$ bár korrelálatlanok, de nem függetlenek!

   Megoldás: Az együtteseloszlás-táblázat:

$X+Y \setminus |X-Y|$	0	1	$X+Y$ perem
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$|X-Y|$ perem	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

   Nem függetlenek, mert:
   $0 = \mathbf{P}(X+Y=0, |X-Y|=1) \neq \mathbf{P}(X+Y=0) \cdot \mathbf{P}(|X-Y|=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$.
   $\mathbf{E}(X+Y) = 1, \mathbf{E}(|X-Y|) = \frac{1}{2}, \mathbf{E}[(X+Y)|X-Y|] = \frac{1}{2} \Longrightarrow$
   $\operatorname{cov}((X+Y), |X-Y|) = 0$.

3. Legyenek $X \in Po(0,2)$ és $Y \in Po(0,3)$ függetlenek!
   Mennyi $\mathbf{P}(X+Y=2)$?

   Megoldás: $X+Y \in Po(0,3+0,2) \Longrightarrow \mathbf{P}(X+Y=2) = \frac{1}{8}e^{-0,5}$.

4. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 1000 pénzfeldobásnál a fejek száma 480 és 520 közé esik.

   Megoldás: Legyen X a pénzzel fejet dobunk esemény indikátor változója. Ekkor $\mathbf{E}X = \frac{1}{2}$ és $\boldsymbol{\sigma}X = \frac{1}{2}$.
   Jelöljük S-sel a fej-dobások összegét, ekkor

$$\mathbf{P}(480 \leq S \leq 520) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{480 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{S - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{520 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}}\right) \approx$$

$$\approx \mathbf{P}\left(-1,27 \leq \frac{S-500}{\sqrt{250}} \leq 1,27\right) \approx 2\cdot\Phi\left(1,27\right)-1 \approx 0,796.$$

5. Tekintsük a $\{0,1,2\}$ állapotterű,

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség-mátrixszal adott Markov-láncot!
Mi az X_2 eloszlása, ha $\mathbf{P}\left(X_0 = i\right) = \frac{1}{3}, i = 0,1,2$?

Megoldás: $\underline{\underline{\Pi}}^2 = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{18},\frac{5}{18},\frac{6}{18}\right).$

6. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenségeket!

Megoldás: Ha $A_1, A_2, ..., A_n \in \Im$ tetszőleges események, akkor
a.) $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i\right)$ b.) $\mathbf{P}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\bar{A}_i\right).$