

Valószínűségszámítás pótzárthelyi
2015. május 18.

1. Legyenek A és B események, melyekre $\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B | A) = \frac{3}{4}$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be?

Megoldás: A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(A\bar{B} + \bar{A}B) = \mathbf{P}(A\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{3}\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}(A\bar{B} + \bar{A}B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

2. Legyen az X valószínűségi változó $\lambda = 3$ paraméterű Poisson eloszlású. $V = 2X^2 + 5$. Adja meg V eloszlását és várható értékét!

Megoldás: $R_V = \{5, 7, 13, \dots, 2n^2 + 5, \dots\}$ és $\mathbf{P}(V = 2n^2 + 5) = \mathbf{P}(X = n) = \frac{3^n}{n!}e^{-3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}V = 2\mathbf{E}X^2 + 5 = 2(3 + 3^2) + 5 = 29$$

3. Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = \alpha \cdot x \cdot y$, $0 < x < 2$, $0 < y < 2$. Mennyi α ? Adja meg Y perem sűrűségfüggvényét és várható értékét!

$$\text{Megoldás: } 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \alpha \int_0^2 \int_0^2 xy dx dy = \alpha \int_0^2 2y dy =$$

$$\alpha \cdot 4 \implies \alpha = \frac{1}{4}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4} \int_0^2 xy dx = \frac{y}{2}, 0 < y < 2, \mathbf{E}Y = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{4}{3}$$

4. Legyen $X \in N(8, 3)$. Fejezze ki a $\mathbf{P}(11 \leq X \leq 17)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével, $\Phi(t)$ -vel!

Megoldás: $\mathbf{P}(11 \leq X \leq 17) = F_X(17) - F_X(11) = \Phi\left(\frac{17-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{11-8}{3}\right) = \Phi(3) - \Phi(1)$

5. Három kockával dobunk. Legyen X a dobott 1-esek, Y a dobott páratlan dobások száma. Ekkor adja meg X és Y eloszlását és az együttes eloszlás táblázatát!

Megoldás: $X \in B(3, \frac{1}{6})$, $Y \in B(3, \frac{1}{2})$.

\backslash	X					
Y	\backslash	0	1	2	3	Y perem
	0	$\frac{27}{216}$	0	0	0	$\frac{27}{216}$
	1	$\frac{54}{216}$	$\frac{27}{216}$	0	0	$\frac{81}{216}$
	2	$\frac{36}{216}$	$\frac{216}{36}$	$\frac{9}{216}$	0	$\frac{81}{216}$
	3	$\frac{216}{8}$	$\frac{216}{12}$	$\frac{216}{6}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{216}{27}$
X perem		$\frac{125}{216}$	$\frac{216}{75}$	$\frac{216}{15}$	$\frac{216}{1}$	1