

ELEKTROMÁGNESES TEREK

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \mu \tau \{ \textbf{Órai jegyzet} \}$$

A VIDEO.BME.HU-N TALÁLHATÓ VIDEÓK ALAPJÁN

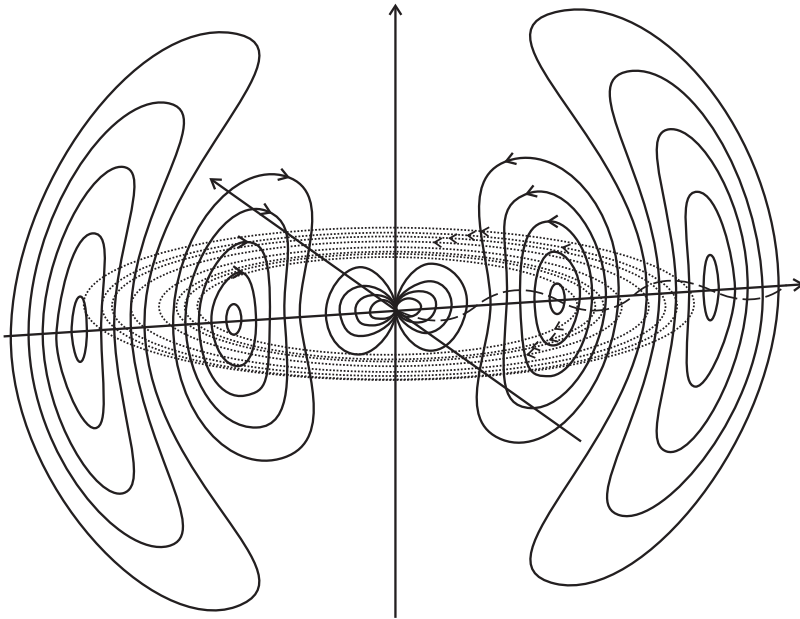
Készítette:

Ecker Tibor Ádám

e-mail:

phantox@tvn.hu

2011. március 13.



TARTALOMJEGYZÉK

1. Forrásmennyiségek	4
1.1. Töltés	4
1.2. Áram	5
1.3. Töltés-Áram kapcsolat	6
1.4. Mozgó töltések árama	7
2. Térintenzitások	8
2.1. Villamos térerősség	8
2.2. Mágneses indukció	8
2.3. Intenzitásvektorok integráljai	9
2.4. Faraday-féle indukció törvény	12
2.5. B vonalintegrálja és E felületi integrálja	13
2.6. Gerjesztettségi vektorok	13
3. Folytonossági és Peremfeltételek	15
3.1. Folytonossági feltétel a villamos térerősségre	15
3.2. Folytonossági feltétel a mágneses térerősségre	16
3.3. Folytonossági feltétel az indukcióvektorra	16
3.4. Folytonossági feltétel az eltolási vektorra	16
3.5. Eltolási áramsűrűség	17
3.6. Beiktatott (idegen) térerősség	18
4. A Maxwell egyenletek	19
4.1. A Maxwell egyenletek differenciális formája	20
4.2. A folytonossági egyenletek levezethetők	20
4.3. EM hullám terjedése	21
5. Energiamérleg	23
5.1. Joule hő	23
5.2. Források	24
5.3. Kisugárzott teljesítmény	24
6. Az elektrodinamika felosztása	26
6.1. Időtől független jelenségek	26
6.2. Időtől függő jelenségek	27

7. Elektrosztatika	27
7.1. Skalárpotenciál	27
7.2. Poisson egyenlet általános megoldása	28
7.3. Kapacitás	29
7.4. Dipólus	31
8. A gyakorlati elektrosztatika	32
8.1. A Laplace egyenlet egyértelmű megoldhatósága	33
8.2. Helyettesítő töltések módszere	34
8.3. Fémgömb homogén villamos térben	35
8.4. A Laplace egyenlet numerikus megoldása	36
9. Stacionárius áramlási tér	41
9.1. Peremfeltételek	42
9.2. Pontforrás	43
9.3. Térbeli áramlási ellenállás	43
9.4. G és C kapcsolata	45
10. Stacionárius áramok mágneses tere	45
10.1. Vektorpotenciál	45
10.2. Fluxus kiszámítása a vektorpotenciálból	47
11. Biot-Savart törvény	48
11.1. Példák	48
11.2. Önindukciós együttható	48
11.3. Kölcsonös indukciós együttható	48
11.4. Mágneses körök	49
12. Kirchhoff egyenletek	51
12.1. Egyenáram	52
12.2. Időben változó áram esetén	52
13. Végeselem módszer	53
14. Távfvezetékek	53
14.1. Távíró egyenletek	53
14.2. Időtartomány	57
14.3. Szinuszos gerjesztés (Állandósult állapot)	57
14.4. Különböző lezárások vizsgálata	66
14.5. Állóhullám arány	71
14.6. A távfvezeték, mint kétkapu	71

15. Elektromágneses hullámok	75
15.1. A vektoriális hullámegyenlet	75
15.2. Síkhullám veszteséges közegben	78
15.3. Komplex permittivitás	81
15.4. Hullámparaméterek számítása veszteséges közegben (Összefoglalás)	81
15.5. Síkhullám polarizációja	82
15.6. Síkhullám által szállított teljesítmény	83
15.7. Síkhullám jó vezetőben	84
16. Elektromágneses hullámok gerjesztése	87
16.1. Az inhomogén hullámegyenlet megoldása	89
16.2. A hertz dipólus	90
17. Diszperziós összefüggések	100
18. Csőtapvonalak	101
18.1. Alapterek	102
18.2. Peremfeltételek	104
18.3. Diszperziós egyenlet	104
18.4. Határfrekvencia	104
19. Csőtapvonalak a gyakorlatban	106
19.1. Összefoglalás	107
19.2. TE módus komponens egyenletei	108
19.3. A cső által szállított teljesítmény	109
20. Üregrezonátor	111
21. Hírközlési üvegszálak elmélete	114
21.1. Folytonossági feltételek	116
21.2. Normalizált változók	116
22. Matematika	118
22.1. Gradiens	118
22.2. Rotáció	119
22.3. Divergencia	120
22.4. Stokes-tétel	120
22.5. Matematikai Gauss-tétel	120
22.6. Vektoranalitikai azonosságok	121
22.7. Green-tétel	121

1 FORRÁSMENNYISÉGEK

M (MKSA rendszer alapegységei) m, kg, s, A .

1.1 TÖLTÉS

Minden elektromágneses jelenség oka.

$$[Q] = As = C$$

Az elemi részecskék néhány tulajdonsága:

$$q_e = -1.602 \cdot 10^{-19} C$$

$$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} kg$$

$$q_p = 1.602 \cdot 10^{-19} C = -q_e$$

$$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} kg = 1836.153 \cdot m_e$$

1. táblázat. Töltésfaják

Töltéssűrűség	Definíció	Mértékegység
Térbeli	$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$	$\frac{As}{m^3}$
Felületi	$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$	$\frac{As}{m^2}$
Vonalmenti	$q = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$	$\frac{As}{m}$

M ([1.táblázat 4.oldal]) Makroszkópicusan kicsi, mikroszkópicusan nagy térrészt kell választanunk.

T (Coulomb-törvény) Két (Q_1 és Q_2) töltés közt fellépő erő

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2} \quad (1.1)$$

$$\text{Ahol } \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \text{ (Vákuum permittivitása)}$$

M (Vákuum-fluktuáció) A kvantumfizika szerint minden mező (beleértve az elektromágneses mezőket is) fluktuációt mutat, ami azt jelenti, hogy a mező aktuális értéke egy bizonyos átlagérték körül változik. Még egy abszolút nulla fokra lehűtött vákuum is rendelkezik ezekkel a változó terekkel, amit „vákuum-fluktuációnak” neveznek. Ennek átlagos értéke egy foton energiájának a fele¹.

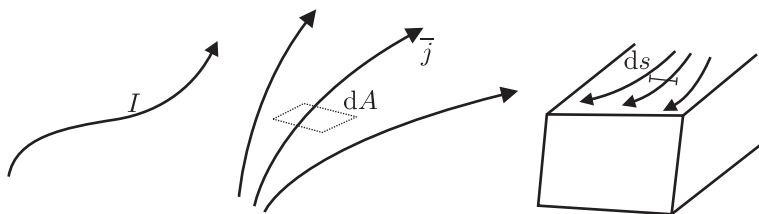
1.2 ÁRAM

A töltések mozgása.

$$[I] = A$$

2. táblázat. Áramfajták

Áramsűrűség	Definíció	Mértékegység
Térbeli	$j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$	$\frac{A}{m^2}$
Felületi	$K = \frac{\Delta I}{\Delta s}$	$\frac{A}{m}$
Vonalszerű	I	A



1.1. ábra. Áramfajták

$$\Delta I = \overline{K} \, ds \, \overline{n}$$

Ahol $\overline{n}$ a normálisvektor.

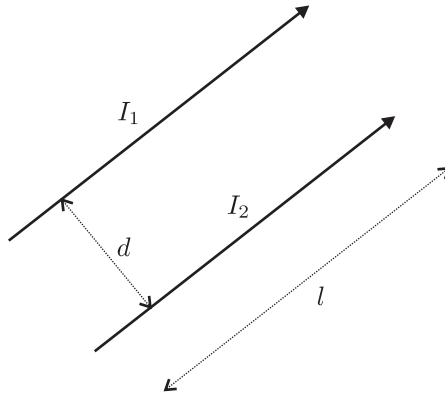
¹ <http://hu.wikipedia.org/wiki/Casimir-effektus>

$$I \triangleq \int_A \vec{j} \, d\vec{A} \quad (1.2)$$

T (Ampere-törvény) Két (I_1 és I_2) áramjárta vezető közt fellépő erő

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|I_1 I_2| l}{d} \quad (1.3)$$

Ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ (Vákuum permeabilitás)



1.2. ábra. Ampere-törvény

1.3 TÖLTÉS-ÁRAM KAPCSOLAT

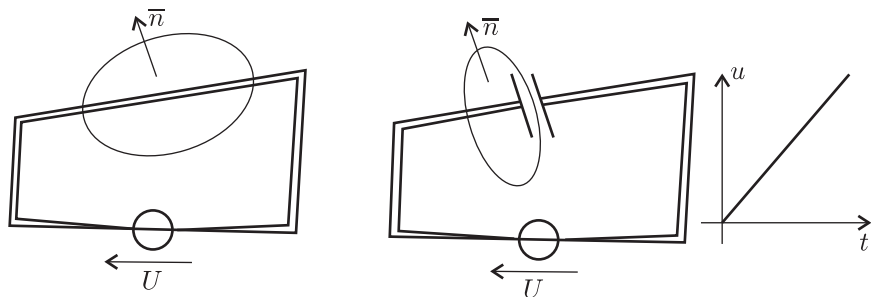
Zárt felületen

$$\oint_A \vec{j} \, d\vec{A} = 0$$

Kondenzátor egyik lapja körül

$$\oint_A \vec{j} \, d\vec{A} = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -I$$

M A kondenzátor esetén töltés a zárt felület belsejében növekszik.



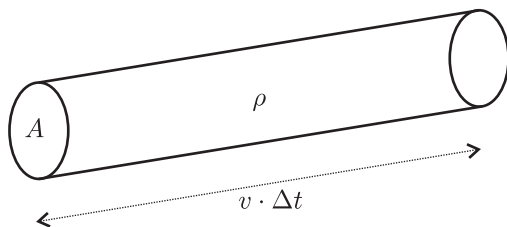
1.3. ábra. Töltés-Áram kapcsolat

T (Folytonossági-tétel)

$$\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (1.4)$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.5)$$

1.4 MOZGÓ TÖLTÉSEK ÁRAMA



1.4. ábra. v sebességgel haladó töltések árama

$$j = \frac{I}{A} = \rho v$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho A v dt}{dt} = A \rho v$$

Ami igaz vektorosan is

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \rho > 0$$

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- \quad (1.6)$$

2 TÉRINTENZITÁSOK

Elektromágneses tér fizikai erőter, töltött részekre erőhatást fejt ki.

T (Lorentz-törvény)

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

Az elektromágneses tér jellemző mennyiségei:

- E és B vektorok;
- olyan anyagra hat, aminek töltése (nyugvó és mozgó) van (töltés: indikátor és forrás);

2.1 VILLAMOS TÉRERŐSÉG

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad [E] = \frac{V}{m} \quad (2.2)$$

(Az egységnyi pozitív töltésekre ható erő)

M A tér szerkesztése pozitív próbatöltéssel történik!

2.2 MÁGNESES INDUKCIÓ

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad [B] = \frac{Vs}{m^2} \quad (2.3)$$

Ebből

$$Q\vec{v} = \rho A d\vec{l}\vec{v} = \vec{j}A d\vec{l} = jA d\vec{l} = I d\vec{l}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

M A mágneses indukció a részecske energiáját nem változtatja meg, csak a mozgásának irányát.

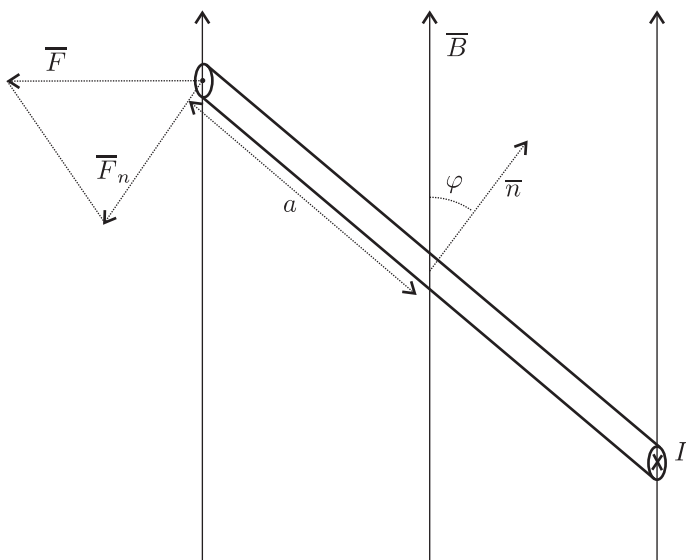
Mérőkeret:

$$T = 2aIlB \sin \varphi$$

Mágneses dipólnyomaték: $\vec{m} = \mu_0 I A \vec{n}$

$$\vec{T} = \frac{1}{\mu_0} \vec{m} \times \vec{B} \quad (2.4)$$

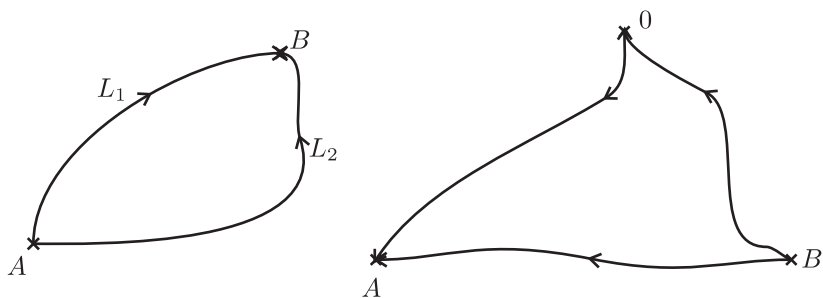
Alkalmazás:



2.1. ábra. Mágneses indukció

- B tér mérése;
- Villamosmotorok;
- Atom körül „keringő” elektron elemi köráramként fogható fel ...

2.3 INTENZITÁSVÉKTOROK INTEGRÁLJAI



2.2. ábra. 'A' és 'B' pontok közti feszültség

FESZÜLTSG

$$U_{AB} = \int_A^B E \, dl \quad (2.5)$$

Ebból az A -ból B -be vitt Q töltésen végzett munka: $W_{AB} = QU_{AB}$. Ez általában függ az AB útvonaltól. Ha nem függ, akkor konzervatív erőterről beszélünk, ekkor igaz a $\oint \vec{E} \, d\vec{l} = 0 \rightarrow \oint \vec{F} \, d\vec{l} = 0$ összefüggés.

M (Következmények) *Integrálás egyszerűsödik (más útvonalat is választhatunk).*

$$\int_{L_1} \vec{E} \, d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E} \, d\vec{l}$$

POTENCIÁL 'P' pont potenciálja: vegyünk fel egy '0' alappontot. Az alappont potenciálja zérus.

$$U_P = \varphi(P) = \int_P^0 \vec{E} \, d\vec{l} \quad (2.6)$$

M Az alappont megváltoztatásával a 'P' potenciálja egy konstanssal változik (bárhon is legyen 'P').

$$\begin{aligned} \int_P^{0'} \vec{E} \, d\vec{l} &= \int_P^0 \vec{E} \, d\vec{l} + \int_0^{0'} \vec{E} \, d\vec{l} \\ U_{AB} &= \varphi(A) - \varphi(B) \end{aligned}$$

Á Az elektromos térerősség a skalárpotenciál negatív gradiense.

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\vec{E} \, d\vec{l} \\ d\varphi &= \text{grad } \varphi \, d\vec{l} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \end{aligned} \quad (2.7)$$

2. ÓRA

MÁGNESES FLUXUS

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad [\Phi] = V_s \quad (2.8)$$

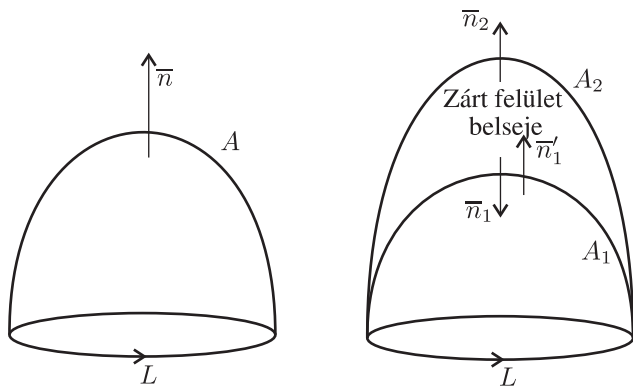
M B fluxussűrűség az angolszász irodalomban.

T (Mágneses Gauss törvény) Zárt felületen vett fluxus 0.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.9)$$

- B vonalak zártak;
- A mágneses tér forrásmentes $\rightarrow$ nincs mágneses „töltés”;

M Zárt görbe és ráfeszített felület: A felület $\vec{n}$ normálisát a zárt görbe körüljárási iránya határozza meg a jobb-csavar szabály szerint.



2.3. ábra. Zárt görbe és ráfeszített felület

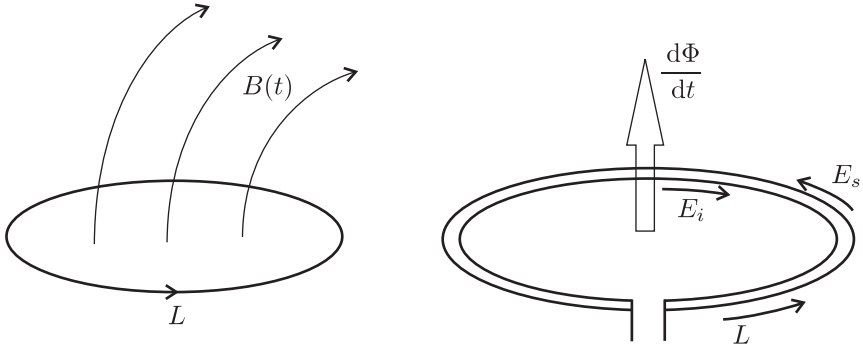
Á Ugyanarra a zárt görbére feszített, különböző zárt felületek fluxusa ugyanakkora.

$$\int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 = \int_{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{A}_2$$

2.4 FARADAY-FÉLE INDUKCIÓ TÖRVÉNY

T A zárt görbébe indukálódott feszültség megegyezik a zárt görbére feszített felületen létrejövő fluxusváltozás sebességének -1 -szeresével. Ez a gerjesztettségi vektorok közti kapcsolat.

$$U_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.10)$$



2.4. ábra. Faraday-féle indukció törvény

Minden időben változó fluxus környezetében villamos tér indukálódik. A vezető hurok „integrálja” a villamos térerősséget.

M Vezetékdarab (nem zárt hurok) esetén megjelenik egy statikus villamos térrész is (E_s).

$$\oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

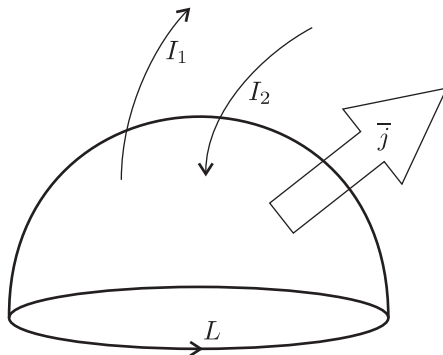
$$U_i = \oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

A görbék és felületek nyugalomban vannak – nem mozgó koordináta-rendszerben az idő szerinti deriválás és a tér (felület) szerinti integrálás felcserélhető.

$$\oint_L \vec{E} \, d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{A} \quad (2.11)$$

Á Ha az indukcióvektor változik, villamos tér keletkezik.

2.5 B VONALINTEGRÁLJA ÉS E FELÜLETI INTEGRÁLJA



2.5. ábra. B vonalintegrálja

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$$

2.6 GERJESZTETTSÉGI VEKTOROK

MÁGNESES TÉRERŐSSÉG

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad [H] = \frac{Vs}{m^2} \frac{Am}{Vs} = \frac{A}{m} \quad (2.12)$$

M Olyan, mint a felületi áramsűrűség (mértékegység).

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_A \vec{j} d\vec{A} \quad (2.13)$$

ELTOLÁSI VEKTOR (VILLAMOS ELTOLÁS)

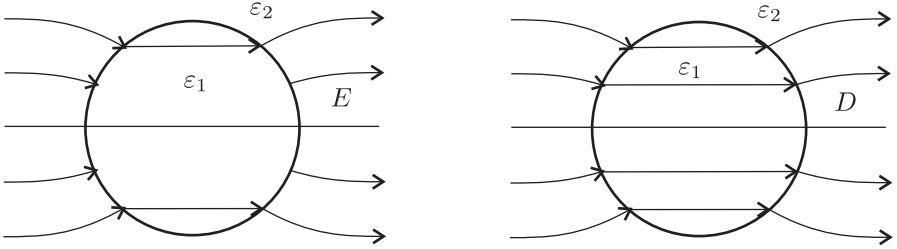
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad [D] = \frac{As}{Vm} \frac{V}{m} = \frac{As}{m^2} \quad (2.14)$$

M Olyan, mint a felületi töltéssűrűség (mértékegység).

$$\oint_A \bar{D} d\bar{A} = \int_V \rho dV \quad (2.15)$$

Térben változó ε és μ esetén csak D és H -val felírt egyenletek érvényesek.

P (E és D különbségére) E -nek ott is forrása van, ahol ε változik (Az anyag polarizációjából fakadóan). Elektrosztatikában E mindig örvénymentes, míg D lehet örvényes is.



2.6. ábra. E és D különbsége

KÖZEGEK HATÁSA Elmondható, hogy D E -nek egy függvénye. Hasonlóan B , H és j -re is igaz ez.

$$\bar{D} = \bar{D}(\bar{E}) \quad \bar{B} = \bar{B}(\bar{H}) \quad \bar{j} = \bar{j}(\bar{E})$$

Legegyszerűbb esetben (lineáris, izotrop²):

$$\boxed{\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad \bar{j} = \sigma \bar{E}} \quad (2.16)$$

σ fajlagos vezetőképesség

Általános esetben:

$$\boxed{\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}} \quad (2.17)$$

$$\boxed{\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})} \quad (2.18)$$

P a villamos polarizáltság, míg M a mágneses polarizáltság (mágnesezettség)

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi \bar{E}$$

χ az elektromos szuszceptibilitás

$$\bar{M} = \kappa \bar{H}$$

κ a mágneses szuszceptibilitás

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$\chi \leq 0$$

$$\mu_r = 1 + \kappa$$

$$\kappa \neq 0$$

² irányfüggetlen

M $\overline{P}$ és $\overline{M}$ is vektor. Például $\overline{E}$ és $\overline{D}$ nem feltétlen egyirányúak.

3 FOLYTONOSSÁGI ÉS PEREMFELTÉTELEK

3.1 FOLYTONOSSÁGI FELTÉTEL A VILLAMOS TÉRERŐSSÉGRE

$$\oint_L \overline{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \overline{B} d\vec{A}$$

$$\lim_{ds \rightarrow 0} \overline{E}_{2t} l + \overline{E}'_t ds - \overline{E}_{1t} l + \overline{E}''_t ds = - ds \cdot l \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

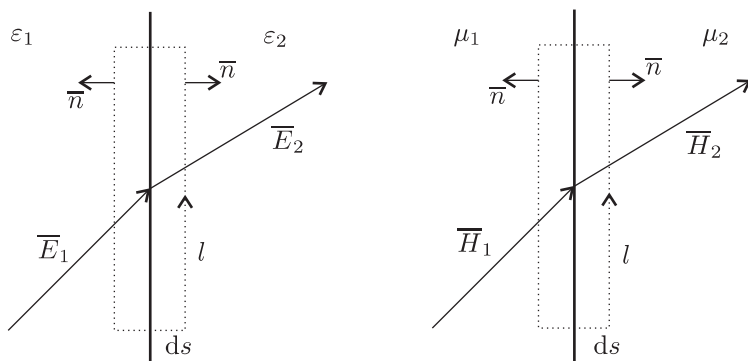
$$\overline{E}_{2t} l - \overline{E}_{1t} l = 0$$

$\overline{E}_{2t} = \overline{E}_{1t}$

(3.1)

A villamos térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át két közeg határán.

PEREMFELTÉTEL (Fém)Elektroda belsejében a villamos térerősség 0. A folytonossági feltétel alapján a perem másik oldalán is 0- nak kell lennie a villamos térerősség tangenciális komponensének. Ebből adódóan a (fém)elektroda felületén a villamos térerősségnek csak a felületre merőleges komponense lehet. Következmény: A (fém)elektroda ekvipotenciális.



3.1. ábra. Folytonossági és Peremfeltételek ($\overline{E}$ és $\overline{H}$)

3.2 FOLYTONOSSÁGI FELTÉTEL A MÁGNESES TÉRERŐSSÉGRE

$$\oint_L \overline{H} d\vec{l} = \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

$$\lim_{ds \rightarrow 0} \overline{H}_{2t} l + \overline{H}'_t ds - \overline{H}_{1t} l + \overline{H}''_t ds = K l$$

$\overline{H}_{2t} - \overline{H}_{1t} = K$

(3.2)

A mágneses térerősség tangenciális komponense ugrik, ha a közeget elválasztó felületen áram folyik.

PEREMFELTÉTEL Ideális fém belsejében $\overline{H} = 0$. Ebből adódóan $\overline{H}_{2t} = K$

M Ismert térből a felületi árameloszlás meghatározható.

3. ÓRA

3.3 FOLYTONOSSÁGI FELTÉTEL AZ INDUKCIÓVEKTORRA

$$\oint \overline{B} d\vec{A} = 0$$

$$\lim_{ds \rightarrow 0} -\overline{B}_{1n} dA + \overline{B}_{2n} dA + \Delta \Phi_{\text{palást}} = 0$$

$B_{1n} = B_{2n}$

Az indukcióvektor normális komponense folytonosan megy át két közeg határán.

P Mágneses körök légrésére – a szórástól eltekintve: $B_{\text{vas}} = B_{\text{levegő}}$

3.4 FOLYTONOSSÁGI FELTÉTEL AZ ELTOLÁSI VEKTORRA

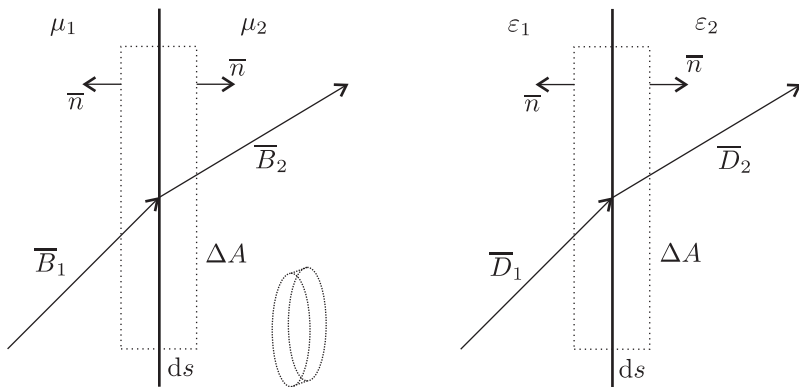
$$\oint \overline{D} d\vec{A} = \int \rho dV$$

$$\lim_{ds \rightarrow 0} -\overline{D}_{1n} dA + \overline{D}_{2n} dA + \Delta \Phi_{\text{palást}}^{\text{elektromos}} = \sigma dA$$

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$

(3.3)

Az eltolási vektor normális komponense ugrik, ha van felületi töltéssűrűség a két közeg határán.



3.2. ábra. Folytonossági és Peremfeltételek ($\vec{B}$ és $\vec{D}$)

P Töltött elektróda felületén. Az elektróda belsejében: $D = 0$. $D_2 = D_{2n} = \sigma$

P Feladat: Mekkora felületi töltéssűrűsége lehet egy R sugarú gömbnek, ha a levegő átütési szilárdsága 30 kV/cm ?

$$3 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \varepsilon 4\pi R^2$$

3.5 ELTOLÁSI ÁRAMSŰRŰSÉG

Kondenzátor töltődése során felületi töltéssűrűség változás következik be a fegyverzeteken. $\sigma(t) \rightarrow D(t)$

$$\vec{j}_{\text{eltolási}} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

A gerjesztési törvény kiegészítése

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_A (\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}) dA \quad (3.4)$$

$\vec{j}$ a vezetési áramsűrűség

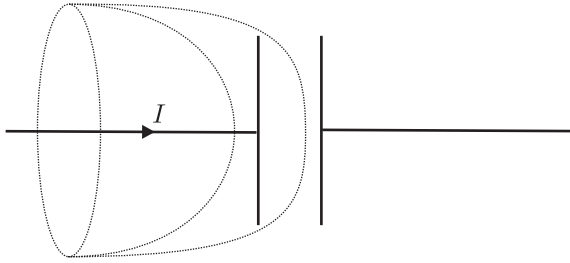
M Vezetési és eltolási áram egyszerre jelentkezik például veszteséges dielektrikumban.

M (Folytonossági feltétel az áramsűrűsére)

$$\vec{j}_{2n} - \vec{j}_{1n} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\vec{j}_{\text{tot}1n} = \vec{j}_{\text{tot}2n}$$

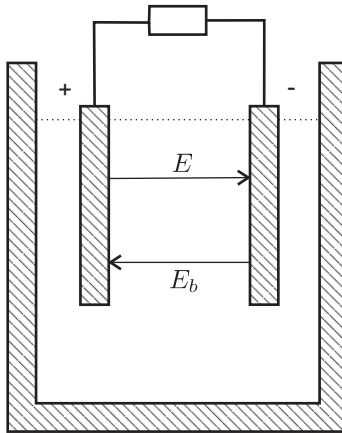
Közeghatáron a totális áramsűrűség normális komponense folytonosan megy át.



3.3. ábra. Eltolási áramsűrűség

3.6 BEIKTATOTT (IDEGEN) TÉRERŐSSÉG

Galván-elem töltésszétválasztása kémiai úton történik a térerősség ellenében. A beiktatott térerősség az elektrodinamikától idegen erőt reprezentálja.



3.4. ábra. Galván-elem

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) \quad [\sigma] = \frac{S}{m} \quad (3.5)$$

Differenciális Ohm-törvény

3. táblázat. Maxwell egyenletek integrális formája

Név	Egyenlet
I Gerjesztési törvény	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_A (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{A}$
II Indukció törvény	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$
III Mágneses Gauss-tétel	$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$
IV Elektrosztatikus Gauss-tétel	$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV$
V Anyagjellemzők	$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b)$
VI Energiasűrűség	$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \quad [w] = \frac{Ws}{m^3}$

4 A MAXWELL EGYENLETEK

Mondanivalójuk:

- I Az áram és az eltolási áram mágneses teret kelt.
- II Az indukció időbeli változása villamos teret kelt.
- III Mágneses töltések nincsenek; a mágneses erővonalak zártak.
- IV Zárt felület villamos fluxusa a belül lévő összes töltéssel egyenlő.
- V Anyagokkal teremt kapcsolatot (félvezető, ferrit, üvegszál).
- VI Kapcsolat a fizika többi ágával.

M (Ferrit) Jó szigetelő, de $\mu > 1$.

M (A Maxwell egyenletek apoteózisa³)

- Az egyenletrendszer teljes és ellentmondás-mentes – bármely elektromágneses probléma elvben megoldható velük;
- Alkalmazhatók a hőhullámokra, az optikára, a röntgen sugárzásra is;

³ Fodor György – Elektromágneses terek

- Statisztikus törvények – határt a kvantumos hatások szabnak;
- Fénysebesség közelében Lorentz transzformáció és relativisztikus elektrodinamika aparátusa alkalmazható;

4.1 A MAXWELL EGYENLETEK DIFFERENCIÁLIS FORMÁJA

I.

$$\begin{aligned}
 \oint_L \overline{H} d\vec{l} &= \int_A \left(\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dA \\
 \int_A \text{rot } \overline{H} d\vec{A} &= \int_A \left(\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dA \\
 \boxed{\text{rot } \overline{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}} & \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

II.

$$\boxed{\text{rot } \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}} \quad (4.2)$$

IV.

$$\begin{aligned}
 \oint_A \overline{D} d\vec{A} &= \int_V \rho dV \\
 \int_V \text{div } \overline{D} d\vec{V} &= \int_V \rho dV \\
 \boxed{\text{div } \overline{D} = \rho} & \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

III.

$$\boxed{\text{div } \overline{B} = 0} \quad (4.4)$$

4.2 A FOLYTONOSSÁGI EGYENLETEK LEVEZETHETŐEK

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \overline{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \\
 0 &= \text{div} (\text{rot } \overline{H}) = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \overline{D} \\
 \boxed{0 = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}} &\rightarrow 0 = \text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

4. táblázat. Maxwell egyenletek differenciális formája

Név	Egyenlet
I Gerjesztési törvény	$\text{rot } \overline{H} = \overline{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$
II Indukció törvény	$\text{rot } \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$
III Mágneses Gauss-tétel	$\text{div } \overline{B} = 0$
IV Elektrosztatikus Gauss-tétel	$\text{div } \overline{D} = \rho$
V Anyagjellemzők	$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \quad \overline{B} = \mu \overline{H} \quad \overline{j} = \sigma(\overline{E} + \overline{E}_b)$
VI Energiasűrűség	$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \quad [w] = \frac{Ws}{m^3}$

Nyugvó koordináta rendszerben az idő szerinti deriválás és a divergencia képzés felcserélhető.

$$\text{rot } \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} (\text{rot } \overline{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \overline{B}$$

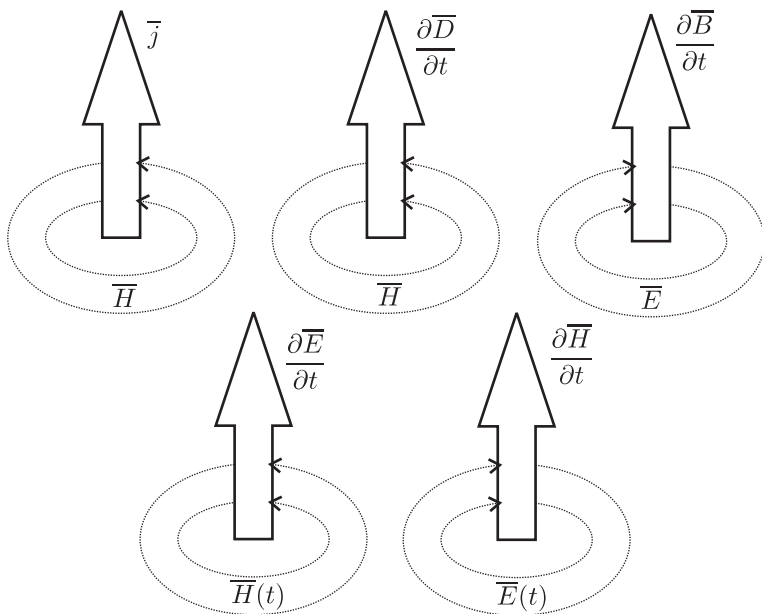
$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \overline{B} \rightarrow \boxed{\text{div } \overline{B} = f(r)}$$

Á B divergenciája időfüggetlen (Majdnem Maxwell III. egyenlete).

M $\overline{F} = Q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B})$ Levezethető a VI. egyenletből.

4.3 EM HULLÁM TERJEDÉSE

$$\overline{E}(t) \rightarrow \overline{H}(t) \rightarrow \overline{E}(t) \rightarrow \overline{H}(t) \rightarrow \overline{E}(t) \rightarrow \overline{H}(t) \dots$$



4.1. ábra. EM hullám

P $\text{rot } \overline{H} = \overline{j}$ henger koordináta rendszerben.

$$H_\varphi = \begin{cases} \frac{j}{2}r & 0 < r < r_0 \\ \frac{j}{2} \frac{r_0^2}{r} & r > r_0 \end{cases} \longrightarrow \text{rot } \overline{H} = \begin{cases} j & 0 < r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

P $\text{rot } \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$ henger koordináta rendszerben.

$$E_\varphi = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon}r & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho}{3\varepsilon} \frac{r_0^3}{r^2} & r > r_0 \end{cases} \longrightarrow \text{div } \overline{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{3} & 0 < r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

5 ENERGIAMÉRLEG

$$\begin{array}{rcl}
 \text{rot } \overline{E} & = & -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot \overline{H} \\
 - \text{rot } \overline{H} & = & \overline{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot \overline{E} \\
 \hline
 \overline{H} \cdot \text{rot } \overline{E} - \overline{E} \cdot \text{rot } \overline{H} & = & -\overline{j} \cdot \overline{E} - \overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} - \overline{H} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}
 \end{array}$$

Mivel

$$\overline{v} \cdot \text{rot } \overline{u} - \overline{u} \cdot \text{rot } \overline{v} = \text{div } \overline{u} \times \overline{v}$$

és μ és ε időfüggetlen, így

$$-\varepsilon \overline{E} \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} - \mu \overline{H} \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = \overline{j} \cdot \overline{E} + \text{div } (\overline{E} \times \overline{H})$$

Integrálva mindkét oldalt V térfogat szerint

$$-\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV}_I = \underbrace{\int_V \frac{j^2}{\sigma} dV}_{II.} - \underbrace{\int_V \overline{j} \cdot \overline{E}_b dV}_{III.} + \underbrace{\oint_A \overline{E} \times \overline{H} dA}_{IV.}$$

I V térfogat EM energiája;

II Joule hő;

III Források;

IV Elsugárzott EM teljesítmény;

4. ÓRA

5.1 JOULEHŐ

l hosszúságú A keresztmetszetű vezető szálra

$$\int_V \frac{j^2}{\sigma} dV = I^2 \frac{l}{\sigma A}$$

5.2 FORRÁSOK

Feszültség és áramforrások. Az előjel a termelő jellegre utal.

M Fizikában a ξ Elektromotoros erő definíció szerint

$$\xi = \int \overline{E}_b \, dl$$

Míg villamosságtanban a feszültség

$$U = \int \overline{E} \, dl$$

Ezért a két mennyiség közt egy előjel különbség lép fel.

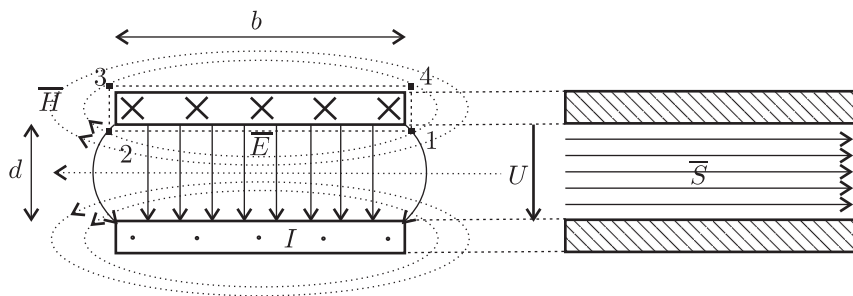
5.3 KISUGÁRZOTT TELJESÍTMÉNY

Az energiamérleg egy adott térfogatrészre adódott, a térrészből kisugárzódó energia fogyasztó jellegű. Ez alapján definiálhatjuk a Poynting vektort.

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} \quad [S] = \frac{V}{m} \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

A Poynting vektor a felületegységen, a felületre merőlegesen áthaladó teljesítményt adja meg. Az egyenletből látszik, hogy a teljesítmény a szigetelő anyagban áramlik.

P b szélességű szalagtápvonal, melynek két vezetőke d távolságra van egymástól. Rákapcsolt U fesz hatására I áram folyik.



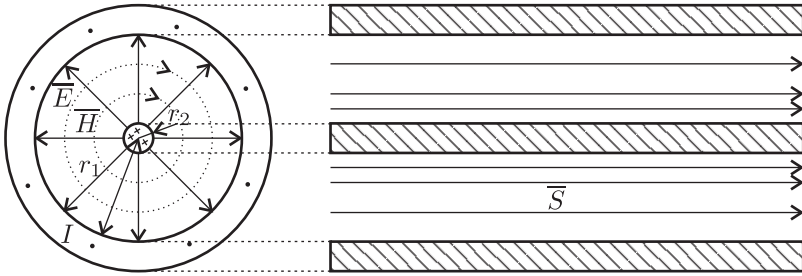
5.1. ábra. Szalagtápvonal

$$E = \frac{U}{d}$$

$$I = \oint_L \vec{H} \, dl = \int_1^2 H \, dl = Hb \rightarrow H = \frac{I}{b}$$

$$P = \int_A \vec{S} \, d\vec{A} = EHbd = UI$$

P Koaxiális kábel, melynek belső ere r_1 sugarú és a köpöny belső sugara r_2 .



5.2. ábra. Koaxiális kábel

$$E = \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}$$

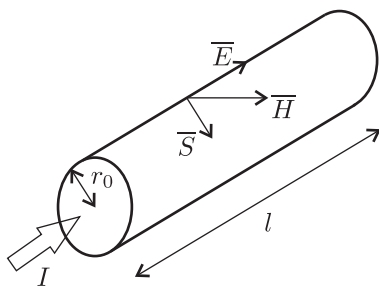
$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$S = E \cdot H \rightarrow S(r) = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r^2}$$

$$P = \int_A \vec{S} \, d\vec{A} = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r \, dr = UI$$

M A teljesítményáramlás irányát a magasabb potenciálú vezetőben folyó áram határozza meg.

P σ fajlagos vezetőképességű r_0 sugarú hengeres vezető.



5.3. ábra. Hengeres vezető

$$E = \frac{j}{\sigma}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$S = EH = \frac{jI}{\sigma 2\pi r_0}$$

$$P = S 2\pi r_0 l = \frac{I^2}{\sigma A} l = I^2 R$$

6 AZ ELEKTRODINAMIKA FELOSZTÁSA

6.1 IDŐTŐL FÜGGETLEN JELENSÉGEK

ELEKTROSZTATIKA

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \overline{D} &= \rho \\ \overline{D} &= \varepsilon \overline{E} \end{aligned} \tag{6.1}$$

STACIONÁRIUS ÁRAMOK MÁGNESES TERE

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{H} &= \vec{j} \\ \operatorname{div} \overline{B} &= 0 \\ \overline{B} &= \mu \overline{H} \end{aligned} \tag{6.2}$$

M Ha $\vec{j} = 0$, akkor magnetosztatikáról beszélünk.

STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \overline{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \overline{j} &= 0 \\ \overline{j} &= \sigma \overline{E}\end{aligned}\tag{6.3}$$

6.2 IDŐTŐL FÜGGŐ JELENSÉGEK

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK A teljes Maxwell egyenletrendszer.

KVÁZISTACIONÁRIUS TÉR (NAGYFESZÜLTÉG)

$$\left| \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right| \ll |\overline{j}|$$

7 ELEKTROSZTATIKA

7.1 SKALÁRPOTENCIÁL

$$\operatorname{rot} \overline{E} = 0 \rightarrow \overline{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$\operatorname{div} \overline{D} = \rho \rightarrow \operatorname{div} \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}\tag{7.1}$$

Poisson egyenlet

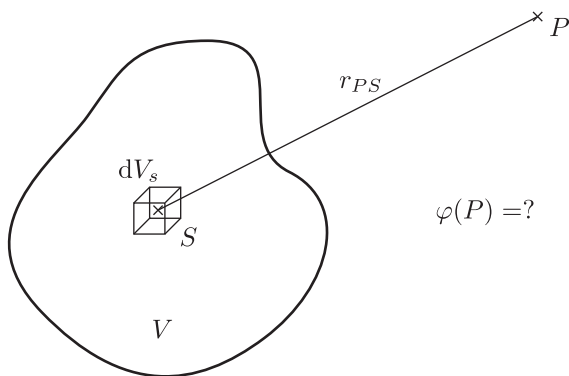
$$\boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}\tag{7.2}$$

Descartes koordináta-rendszerben

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Feladatok megoldása:

$$\begin{array}{ccccc}\text{forrás} & \rightarrow & \text{segédmenyiség} & \rightarrow & \text{tér} \\ \rho & \rightarrow & \varphi & \rightarrow & \overline{E} = -\operatorname{grad} \varphi\end{array}\tag{7.3}$$



7.1. ábra. Poisson egyenlet általános megoldása

7.2 POISSON EGYENLET ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSA

$$d\varphi(P) = \frac{\rho(s) dV}{4\pi\epsilon r_{PS}}$$

$$\boxed{\varphi(P) = \int_V \frac{\rho dV_s}{4\pi\epsilon r_{PS}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(S)}{r_{PS}} dV_S} \quad (7.4)$$

A tértöltésfelhő úgy hozza létre a potenciált, mint pontszerű töltések szuperpozíciója. Ez kibontva koordináták szerint:

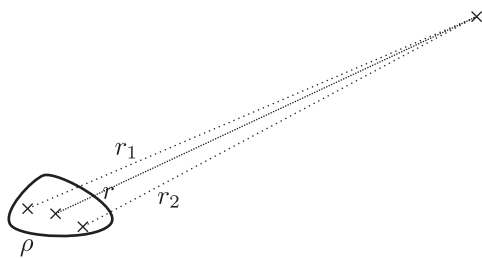
$$\begin{aligned} \varphi(x_P, y_P, z_P) &= \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(x_S, y_S, z_S)}{\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}} dx_S dy_S dz_S \end{aligned}$$

M A töltés

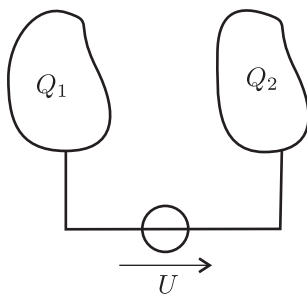
- Villamos teret hoz létre;
- Potenciált hoz létre;

MIKOR TEKINTHETŐ EGY TÖLTÉS PONTSZERŰNEK? Ha $r \gg$ mint a V legnagyobb lineáris mérete. Ekkor

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(S) dV_S}{r_{PS}} = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \int \rho dV_S = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (7.5)$$



7.2. ábra. Pontszerű töltés

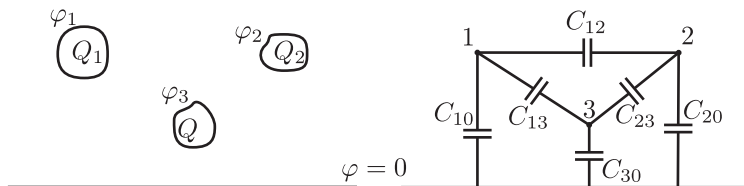


7.3. ábra. Kapacitás

7.3 KAPACITÁS

$$C = \frac{Q}{U}$$

(7.6)



7.4. ábra. Részkapacitás

RÉSZKAPACITÁS

$$\varphi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3$$

$$\varphi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3$$

$$\varphi_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3$$

Ahol a p_{ij} Maxwell-féle együtttható, és

$$p_{12} = \left. \frac{\varphi_1}{Q_2} \right|_{Q_1=Q_3=0}$$

$$p_{ij} = p_{ji}$$

Ezt invertálva

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3$$

$$Q_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + c_{23}\varphi_3$$

$$Q_3 = c_{31}\varphi_1 + c_{32}\varphi_2 + c_{33}\varphi_3$$

Ezek még nem a részkapacitások!

5. ÓRA

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3 + c_{12}\varphi_1 + c_{13}\varphi_1 - c_{12}\varphi_1 - c_{13}\varphi_1$$

$$Q_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + c_{23}\varphi_3 + c_{21}\varphi_2 + c_{23}\varphi_2 - c_{21}\varphi_2 - c_{23}\varphi_2$$

$$Q_3 = c_{31}\varphi_1 + c_{32}\varphi_2 + c_{33}\varphi_3 + c_{31}\varphi_3 + c_{32}\varphi_3 - c_{31}\varphi_3 - c_{32}\varphi_3$$

Bővítés és kiemelés után az első egyenlet

$$Q_1 = \underbrace{(c_{11} + c_{12} + c_{13})}_{C_{10}}\varphi_1 - \underbrace{c_{12}}_{C_{12}}(\varphi_1 - \varphi_2) + \underbrace{c_{13}}_{C_{13}}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

...

A többi hasonló módon kirendezhetjük. Mivel a p tényezőre igaz volt a reciprocitás ($p_{ij} = p_{ji}$), így C részkapacitásokra is igaz.

$$Q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$Q_2 = C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2 + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$Q_3 = C_{13}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) + C_{30}\varphi_3$$

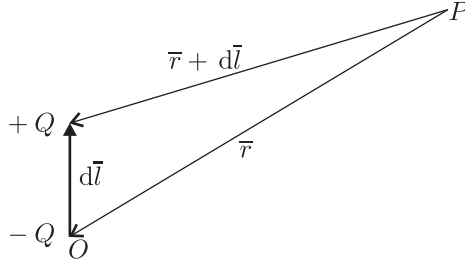
Ahol C_{12} C_{13} C_{23} a főkapacitások és C_{10} C_{20} C_{30} a földkapacitások.

P Fel lehet tölteni egy kondenzátor mindkét lapját pozitívvra, csak ekkor figyelembe kell venni a földkapacitásokat is.

7.4 DIPÓLUS

Egy z tengelyre helyezett két $(+Q$ és $-Q)$ töltés egymástól $d\vec{l}$ távolságra. Bármely P pont potenciálja

$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\vec{r} + d\vec{l}} - \frac{1}{\vec{r}} \right)$$



7.5. ábra. Dipólus levezetése

M A töltés előjele átmegy a potenciálba.

M Matematikai azonosság

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = d \cdot \vec{r} \text{grad } \varphi$$

$$\lim_{d\vec{l} \rightarrow 0} \varphi(P) = \lim_{d\vec{l} \rightarrow 0} \frac{Q d\vec{l}}{4\pi\epsilon} \text{grad } \frac{1}{r}$$

Ahol O a $-Q$ töltés helyén található (A koordinátarendszer kezdőpontja). A fenti határérték 0-hoz tart. Válasszuk meg Q -t úgy, hogy

$$\lim_{\substack{d\vec{l} \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q d\vec{l} = \text{konstans}$$

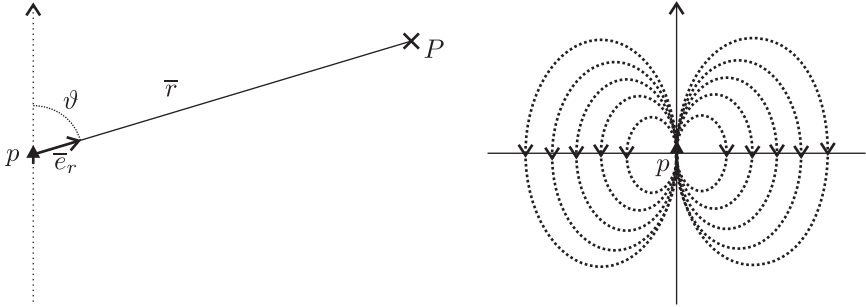
ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon} \text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \vec{e}_r = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \cos \vartheta \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \end{aligned}$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \cos \vartheta \quad (7.7)$$

$$E_\vartheta = \underbrace{\frac{1}{r}}_b \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \sin \vartheta \quad (7.8)$$

Ahol b a metrikus együttható



7.6. ábra. Dipólus és tere

AZ ABSZTRAKCIÓ HASZNA Hasonlóan a Dirac impulzushoz egyszerűbb, zár-
tabb alakú kifejezéshez jutunk ilyen közelítés felhasználásával. Abban az esetben,
ha nem élünk a közelítéssel descartes koordinátákkal

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{x}{(x^2 + (y - dl)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{y - dl}{(x^2 + (y - dl)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

kifejezéshez jutunk.

M Bármely tértöltés felhő felbontható töltéskompozíciókra - hasonlóan a matematikából
ismert Taylor-polinomhoz. (dipólus - quadropólus - oktopólus - stb.)

8 A GYAKORLATI ELEKTROSZTATIKA

Egyik ilyen probléma az elektródák (pl. elektróda pár). Ekkor a felületi töltésel-
oszlás ($\sigma_1(s)$ és $\sigma_2(s)$) változik (véges vezetőképesség) és ismeretlen.

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(s)}{r_{PS}} dV_s + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_A \frac{\sigma(s)}{r_{PS}} dA_s$$

M s paraméter térbeli illetve síkbeli (futó)koordináta.

$\rho = 0$ tértöltésmentes (forrásmentes) esetben a Laplace egyenlet

$$\Delta\varphi = 0$$

A peremérték az elektróda felületén felvett érték (ez a gerjesztés).

8.1 A LAPLACE EGYENLET EGYÉRTELMEŰ MEGOLDHATÓSÁGA

A Green-tétel

$$\operatorname{div} (u \cdot \bar{v}) = u \cdot \operatorname{div} \bar{v} + \bar{v} \cdot \operatorname{grad} u$$

$$u \rightarrow \psi \quad \bar{v} \rightarrow \operatorname{grad} \varphi$$

a behelyettesítést elvégezve, mindkét oldalt integrálva

$$\operatorname{div} (\psi \cdot \operatorname{grad} \varphi) = \psi \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi$$

$$\oint_A \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi \, d\bar{A} = \int_V \psi \cdot \Delta\varphi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \, dV$$

$$\oint_A \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \, dA = \int_V \psi \cdot \Delta\varphi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \, dV$$

Két lehetséges megoldás esetén igaznak kell lennie a φ_1 és φ_2 -re

$$(1) \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$(2) \quad \varphi \Big|_{A_D} = f(s)$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \Big|_{A_N} = g(s)$$

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} \, dA = \int_V \Phi \Delta\Phi + \operatorname{grad}^2 \Phi \, dV$$

$$\oint_{A_D} \underbrace{\Phi}_{I.} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} \, dA + \oint_{A_N} \underbrace{\Phi}_{II.} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} \, dA = \int_V \left(\underbrace{\Phi \Delta\Phi}_{III.} + \underbrace{\operatorname{grad}^2 \Phi}_{IV.} \right) dV$$

I 0 a (2) miatt;

II 0 az (3) miatt;

III 0 az (1) matt;

IV 0-nak kell lennie;

$$\text{grad } (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

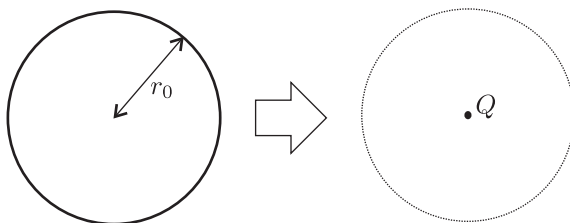
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{konstans}$$

A (2) az úgynevezett Dirichlet peremfeltétel, ezeken a helyeken a felületi potenciál van előírva. A (3) a Neumann peremfeltétel, ezeken a helyeken a normális irányú derivált értéke van megadva. A Laplace egyenletnek a peremfeltételeket kielégítő megoldását kell megtalálni. Ez a nehéz feladat.

8.2 HELYETTESÍTŐ TÖLTÉSEK MÓDSZERE

Az elektródák terét úgy számítjuk (az elektródákon kívül), mintha a helyettesítő töltések hozták volna létre. A kritérium az, hogy a helyettesítő töltések együttes potenciálja ekvipotenciálissá tegye valmennyi elektródát. Így a helyettesítő töltések potenciálja eleget tesz a Laplace egyenletnek. (A helyettesítő töltések potenciálja konstans az elektródák felületén.)

P (Egyedül álló töltött gömb) [8.1.ábra 34.oldal]

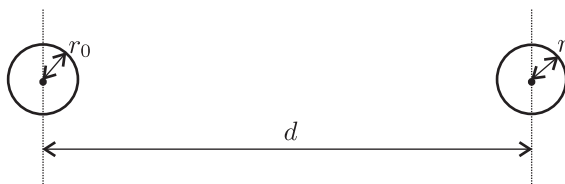


8.1. ábra. Egyedül álló töltött gömb

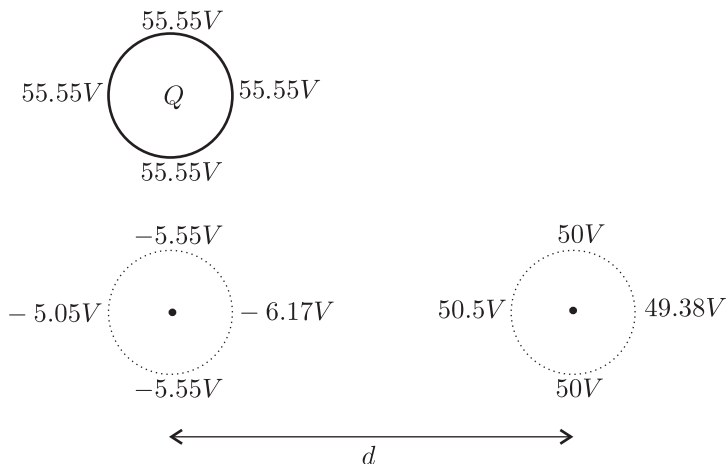
P (Két töltött gömb) [8.2.ábra 35.oldal] $2r = 10\text{cm}$ sugarú gömb közti távolság $d = 1\text{m}$. $U_{12} = 100\text{V}$

$$Q = 6,18 \cdot 10^{-10}\text{C}$$

M Kisméretű elektródák ($r_0 \ll d$) esetén a külső töltések hatását az átlagos távolsággal célszerű számítani.



8.2. ábra. Két töltött gömb



8.3. ábra. Közelítés eredménye

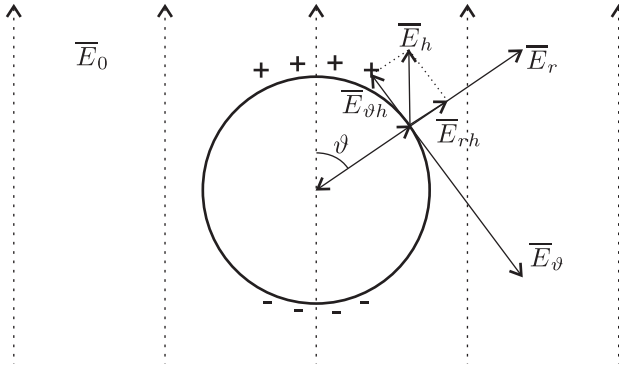
8.3 FÉMGÖMB HOMOGEN VILLAMOS TÉRBEN

Lazán kapcsolódik a helyettesítő töltések módszeréhez. Homogén E_0 térerősségű villamos térbe helyezünk egy r_0 sugarú fémgömböt. A fémgömb „Északi” és „Déli” sarkába rendeződnek a töltések (É - +, D - -). Az így kialakuló töltéselrendezés (gömbön) helyettesíthető egy dipólussal.

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \cos \vartheta \quad E_{rh} = E_0 \cos \vartheta$$

$$E_\vartheta = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \sin \vartheta \quad E_{\vartheta h} = -E_0 \sin \vartheta$$

Ahol E_r A fémgömb (dipólus) által keltett villamos tér sugár irányú komponense, és E_{r0} a homogén villamos tér sugár irányú komponense. Hasonlóan E_ϑ és $E_{\vartheta0}$.



8.4. ábra. Fémgömb homogén villamos térben

A peremfeltétel érvényesülésének feltétele

$$E_{tan} \Big|_{r_0} = 0$$

Ebből számoljuk a helyettesítő dipólus p -jét.

$$\frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \sin \vartheta - E_0 \sin \vartheta = 0$$

↓

$$\boxed{p = 4\pi\epsilon r_0^3 E_0}$$

Majd visszahelyettesítjük $E_r + E_{r0}$ egyenletbe

$$E_r(r_0) = \frac{p}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r_0^3} \cos \vartheta + E_0 \cos \vartheta = 2E_0 \cos \vartheta + E_0 \cos \vartheta = \underline{3E_0 \cos \vartheta}$$

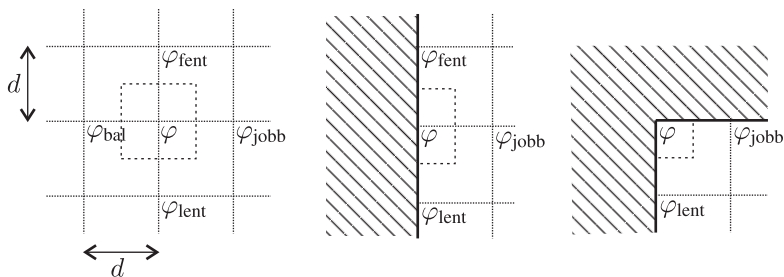
E_r maximuma az „Északi” sarkon van ($\vartheta = 0$).

P Kondenzátor méretezésnél az átütési feszültséget innen származtatják.

8.4 A LAPLACE EGYENLET NUMERIKUS MEGOLDÁSA

VÉGES DIFFERENCIAMÓDSZER (RÁCSMÓDSZER) A megoldáshoz két egyenlet szükséges. Az első az $\oint \bar{E} d\bar{A} = 0$, amely az $\oint \bar{D} d\bar{A} = Q$ egyenletből adódott

$Q = 0$ esetén. A második egyenlet az $\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$, amelyet $E = \frac{\text{pot.különbség}}{\text{távolság}}$



8.5. ábra. Rácsmódszer

kifejezésre egyszerűsítünk. Így belevettük a rotáció mentességét is. Ezek után a rács egyes pontjain az egyenletek megkaphatók.

- φ általános helyen van (van 4 szomszédja)

$$\frac{\varphi - \varphi_{\text{jobb}}}{d}d + \frac{\varphi - \varphi_{\text{fent}}}{d}d + \frac{\varphi - \varphi_{\text{bal}}}{d}d + \frac{\varphi - \varphi_{\text{lent}}}{d}d = 0$$

$$4\varphi - \varphi_{\text{jobb}} - \varphi_{\text{fent}} - \varphi_{\text{bal}} - \varphi_{\text{lent}} = 0$$

- φ rácsszélen van (nincs bal szomszédja)

$$\frac{\varphi - \varphi_{\text{jobb}}}{d}d + \frac{\varphi - \varphi_{\text{fent}}}{d}\frac{d}{2} + \frac{\varphi - \varphi_{\text{lent}}}{d}\frac{d}{2} = 0$$

$$4\varphi - 2\varphi_{\text{jobb}} - \varphi_{\text{fent}} - \varphi_{\text{lent}} = 0$$

- φ rácssarkon van (nincs fenti és bal szomszédja)

$$\frac{\varphi - \varphi_{\text{jobb}}}{d}\frac{d}{2} + \frac{\varphi - \varphi_{\text{lent}}}{d}\frac{d}{2} = 0$$

$$4\varphi - 2\varphi_{\text{jobb}} - 2\varphi_{\text{lent}} = 0$$

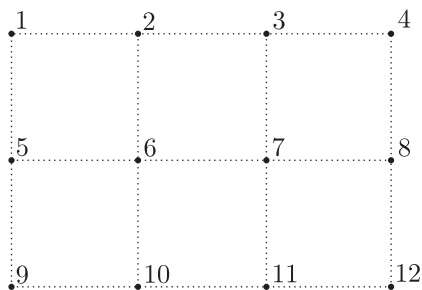
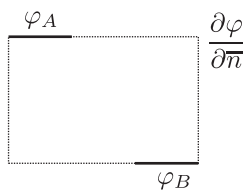
Az [8.5.ábra 37.oldal] sraffozott része zérus Neumann peremfeltétel. Ezeken a helyeken

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} = 0$$

P Ellenállás lapka az ábrán látható módon. A két elektróda potenciálja φ_A és φ_B . Az egyenletek felírása után a Dirichlet peremfeltétel kielégítése miatt behelyettesítjük φ_A -t és φ_B -t.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_A$$

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_B$$



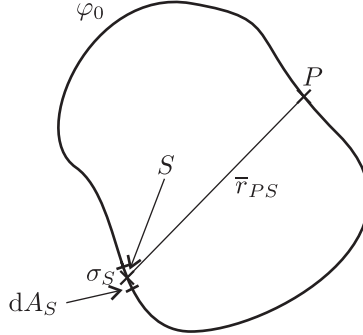
8.6. ábra. Rácsmódszer példa
5. táblázat. Rácsmódszer egyenletmátrix

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
φ_1	4	-2			-2							
φ_2	-1	4	-1			-2						
φ_3		-1	4	-1			-2					
φ_4			-2	4	0			-2				
φ_5	-1			0	4	-2			-1			
φ_6		-1			-1	4	-1			-1		
φ_7			-1			-1	4	-1			-1	
φ_8				-1			-2	4	0			-1
φ_9					-2			0	4	-2		
φ_{10}						-2			-1	4	-1	
φ_{11}							-2			-1	4	-1
φ_{12}								-2			-2	4

M Az egyenletrendszer számítógépes megoldásánál

- Ritka (sparse) mátrix (sávmátrix) – n^2 helyett kb. $5n$ memóriaterület;
- Az egyenletrendszer generálás néhány sornyi programkód;
- Megoldásához speciális (optimalizált) rutinok léteznek (pl. inkomplett LU dekompozíció);

INTEGRÁLEGYENLET A FELÜLETI TÖLTÉSSŰRŰSÉGRE Másnéven kolokáció. Egyedül álló elektróda (φ potenciálú) felületének egy S pontja σ_S töltéssűrűségű.



8.7. ábra. Kolokáció

Ennek az S pontnak egy környezete dA_S . Az elektróda egy másik P pontja és az S pont közti távolság r_{SP} . Ekkor a Poisson egyenlet általános megoldásából adódik, hogy

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_A \frac{\sigma_S}{r_{PS}} dA_S$$

Ahol σ_S ismeretlen az integrálban szerepel. Ezért ez integrálegyenlet. Numerikus megoldása

- I N felületdarabra osztjuk az elektróda teljes felületét. ezeken a felületdarabokon σ konstansnak vehető. Az ismeretlenek

$$\sigma_i, \quad i = 1 \dots N$$

- II Az egyenlet teljesülését N pontban követeljük meg.

Az így nyert egyenletrendszer megoldása a feladat közelítő megoldását adja. Két elektróda esetén

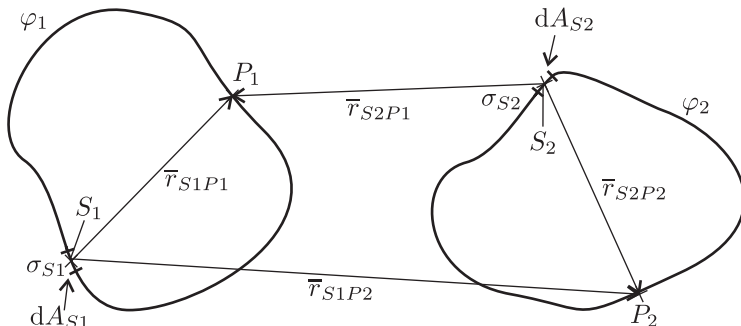
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint \frac{\sigma_{S1}}{r_{S1P1}} dA_{S1} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint \frac{\sigma_{S2}}{r_{S2P1}} dA_{S2} \quad (8.1)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint \frac{\sigma_{S1}}{r_{S1P2}} dA_{S1} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint \frac{\sigma_{S2}}{r_{S2P2}} dA_{S2} \quad (8.2)$$

Numerikusan

- N_1 db σ_{S_1}
- N_2 db σ_{S_2}

ismeretlen van. Első egyenletnek N_1 pontban, a második egyenletnek N_2 pontban kell teljesülnie. Így $N_1 + N_2$ egyenletünk lesz az $N_1 + N_2$ ismeretlenhez. Ha ismerjük



8.8. ábra. Kolokáció két elektródás esetben

a felületi töltéssűrűséget, akkor a feladat megoldása adott (Poisson egyenlet).

A LAPLACE EGYENLET MEGOLDÁSA FUNKCIONÁL MINIMALIZÁLÁSÁVAL

M (Funkcionál) Függvényhez számot rendel (olyan, mint az integrál).

Funkcionálunk az

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_V \text{grad}^2 \varphi \, dV$$

egyenlet. A funkcionálunk olyan φ függvény minimalizálja, amely eleget tesz a Laplace egyenletnek és a peremfeltételeknek. Minimum ott van, ahol

$$I(\varphi + \delta\varphi) - I(\varphi) = 0$$

Az asszimmetrikus Green-tétel alapján

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \text{grad}^2(\varphi + \delta\varphi) \, dV - \frac{1}{2} \int_V \text{grad}^2 \varphi \, dV = \\ &= \int_V \underbrace{\text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \delta\varphi}_a + \underbrace{\text{grad}^2 \delta\varphi}_{\ll a} \, dV = \\ &= - \int_V \delta\varphi \underbrace{\Delta\varphi}_I \, dV + \oint_A \underbrace{\delta\varphi}_{II} \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{III} \, dA = 0 \end{aligned}$$

ahol

I A Laplace egyenlet miatt 0.

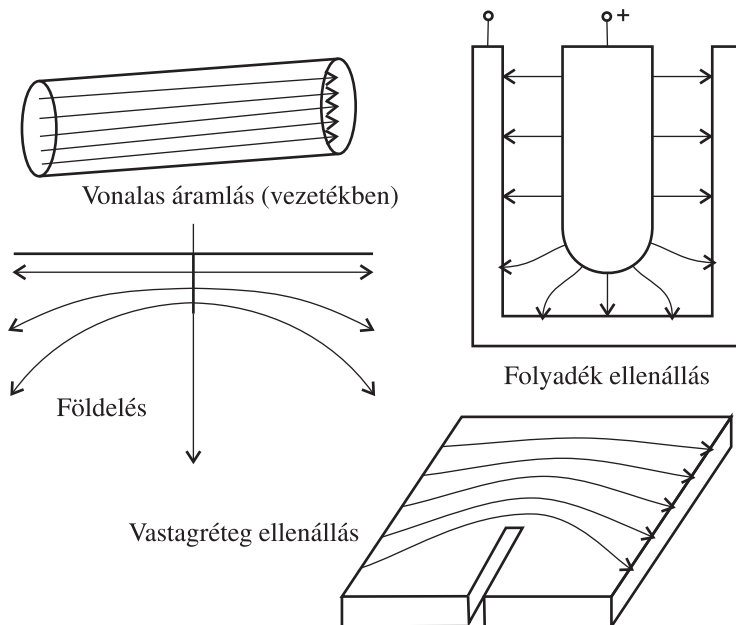
II A perem, ahol a potenciál a megoldás során szabadon változhat (Neumann peremfeltétel). Ilyenkor $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

III A perem, ahol φ előírt (Dirichlet peremfeltétel). Ilyenkor $\delta \varphi = 0$

7. ÓRA

9 STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

A differenciális Ohm-törvény egyik legfontosabb mondanivalója az, hogy ha véges vezetőképességű anyagban áramsűrűség van, ott villamos térerősség is van, és fordítva...



9.1. ábra. Példák

6. táblázat. Analógia a stac. áramlási tér és az elektrosztatika egyenleteiben

	Stac. áramlási tér	Elektrosztatika
Maxwell II.	$\text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
Folyt. egyenlet	$\text{div } \vec{j} = 0$	$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \rho = 0 \text{ (töltésmentes)}$
	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

M (Analógiához szükséges) *Hogy azonos alakúak legyenek a differenciálegyenletek, illetve hogy azonos peremfeltételek teljesüljenek.*

9.1 PEREMFELTÉTELEK

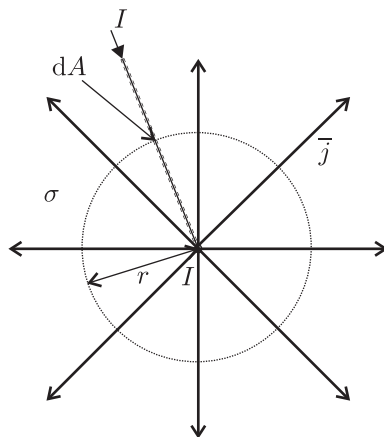
Elektródán:

- Elektrosztatikában az elektróda ekvipotenciális felület, míg stacionárius áramlási térben ez nem mondható ki. A $\sigma_{\text{elektróda}} \gg \sigma_{\text{közeg}}$ esetén viszont közelíthetünk vele (Töréstörvény).
- Térbeli áramlás esetén igaz a $\vec{j}_n = 0$ kifejezés, elektrosztatikában viszont nincs ilyen peremfeltétel.

M *Olyan térbeli áramlási feladatoknál, ahol vezető-szigetelő határ van, nincs elektrosztatikus megfelelő.*

7. táblázat. Analógia a stac. áramlási tér és az elektrosztatika változóiban

Elektrosztatika	Térbeli áramlás
$\vec{E}$	$\vec{E}$
$\vec{D}$	$\vec{j}$
ε	σ
Q	I
C	G



9.2. ábra. Pontforrás

9.2 PONTFORRÁS

Realizálásban benne van a befojő áram, modell alkotásban nem vesszük figyelembe.

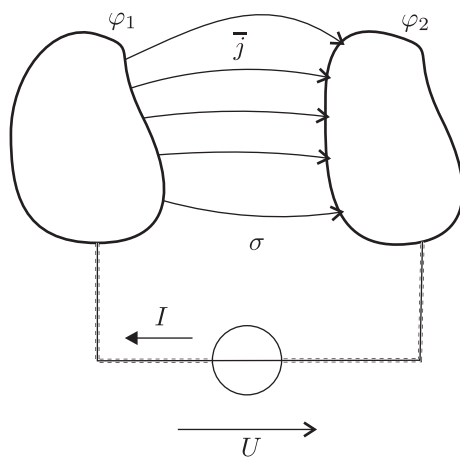
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{j} &= 0 \\ \int_V \operatorname{div} \bar{j} dV &= 0 \\ \oint_A \bar{j} dA &= 0 \\ \bar{j}(r) &= \frac{I}{4\pi r^2} \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$E(r) = \frac{\bar{j}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \tag{9.2}$$

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r} \tag{9.3}$$

9.3 TÉRBELI ÁRAMLÁSI ELLENÁLLÁS

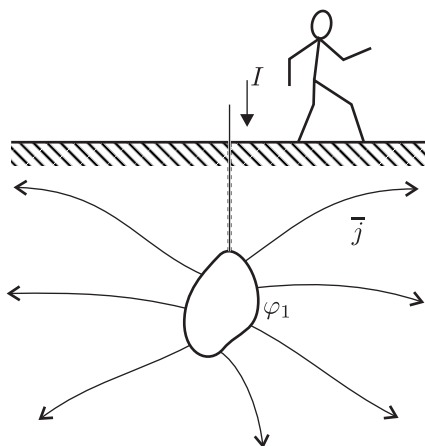
$$R = \frac{U}{I} \rightarrow G = \frac{1}{R}$$



9.3. ábra. Térbeli áramlási ellenállás

P (Földelési ellenállás)

$$R_{fold} = \frac{U_{1\infty}}{I} = \frac{\varphi_1}{I} \quad (9.4)$$



9.4. ábra. Földelési ellenállás

9.4 G ÉS C KAPCSOLATA

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \bar{D} d\bar{A}}{\int \bar{E} d\bar{l}} = \boxed{\varepsilon \frac{\oint \bar{E} d\bar{A}}{\int \bar{E} d\bar{l}}} \quad (9.5)$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint \bar{j} d\bar{A}}{\int \bar{E} d\bar{l}} = \boxed{\sigma \frac{\oint \bar{E} d\bar{A}}{\int \bar{E} d\bar{l}}} \quad (9.6)$$

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \rightarrow \boxed{G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C} \quad (9.7)$$

10 STACIONÁRIUS ÁRAMOK MÁGNESES TERE

$$\boxed{\text{rot } \bar{H} = \bar{j}} \quad (10.1)$$

$$\boxed{\text{div } \bar{B} = 0} \quad (10.2)$$

$$\boxed{\bar{B} = \mu \bar{H}} \quad (10.3)$$

Ha $j = 0$, akkor magnetosztatika

- permanens anyagok ($\bar{B} = \mu(\bar{H} + \bar{M})$);
- A vizsgálatból kizárjuk a gerjesztést;

10.1 VEKTORPOTENCIÁL

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \text{rot } \bar{A} \quad (\text{div } (\text{rot } \bar{v}) = 0) \\ \text{rot } \bar{H} &= \bar{j} \\ \text{rot } \bar{B} &= \mu \bar{j} \\ \text{rot rot } \bar{A} &= \mu \bar{j} \end{aligned}$$

A vektorra alkalmazott Laplace egyenlet:

$$\Delta \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \text{rot rot } \bar{A}$$

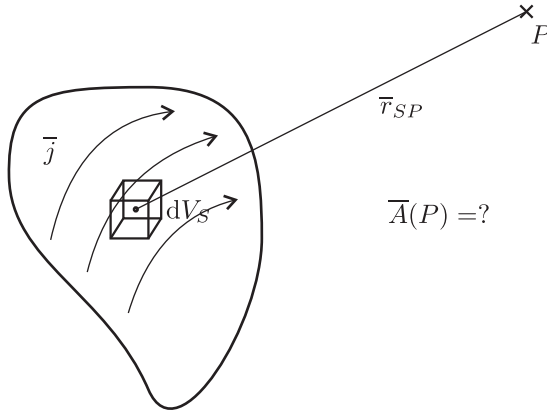
Descartes rendszerben 3 skalár egyenlet (A_x, A_y, A_z). $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$ A vektor rotációját határozza meg, azonban egy vektorteret a divergenciája és a rotációja együtt határoz meg. $\text{div } \bar{A}$ megválasztható, ezt nevezzük mértékválasztásnak. $\text{div } \bar{A} = 0$ a Coulomb mérték.

$$\Delta \bar{A} = \mu \bar{j} \quad \left(\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \right) \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_x &= -\mu \bar{j}_x \rightarrow \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu j_x \\ \Delta \bar{A}_y &= -\mu \bar{j}_y \rightarrow \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu j_y \\ \Delta \bar{A}_z &= -\mu \bar{j}_z \rightarrow \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu j_z \end{aligned}$$

Mivel a $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ egyenletnek a $\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(s)}{r_{SP}} dV_s$ az általános megoldása, így a fent egyenletrendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} \bar{i} \quad A_x(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_x(s)}{r_{SP}} dV_s \\ \bar{j} \quad A_y(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_y(s)}{r_{SP}} dV_s \rightarrow \boxed{\bar{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}(s)}{r_{SP}} dV_s} \\ \bar{k} \quad A_z(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_z(s)}{r_{SP}} dV_s \end{aligned} \quad (10.5)$$



10.1. ábra. Vektorpotenciál

Általános út, amit feladat megoldás során követünk:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{forrás} & \rightarrow & \text{segédmenyiség} & \rightarrow & \text{tér} \\
 \rho & \rightarrow & \varphi & \rightarrow & \vec{E} = -\text{grad } \varphi \\
 \vec{j} & \rightarrow & \vec{A} & \rightarrow & \vec{B} = \text{rot } \vec{A}
 \end{array} \quad (10.6)$$

10.2 FLUXUS KISZÁMÍTÁSA A VEKTORPOTENCIÁLBÓL

$$\Phi = \int_a \vec{B} \, d\vec{a} = \int_a \text{rot } \vec{A} \, d\vec{a} = \boxed{\oint_l \vec{A} \, d\vec{l}} \quad (10.7)$$

A vonalszerű vezető vektorpotenciálja

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(s)}{r_{PS}} \, dV_s = \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(s)a}{r_{PS}} \, dl_s = \frac{I\mu}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}_s}{r_{PS}}
 \end{aligned}$$

8. ÓRA

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \varphi \vec{v} &= \varphi \cdot \text{rot } \vec{v} + (\text{grad } \varphi) \times \vec{v} \\
 \vec{B}(P) - \text{rot }_P \vec{A}(P) &= \text{rot }_P \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_s}{r_{PS}} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \text{rot }_P \frac{d\vec{l}_s}{r_{PS}} \\
 \text{rot }_P \frac{1}{r_{PS}} d\vec{l}_s &= \underbrace{\frac{1}{r_{PS}} \text{rot }_P d\vec{l}_s}_I + \left(\underbrace{\text{grad }_P \frac{1}{r_{PS}}}_{II.} \right) \times d\vec{l}_s = \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}
 \end{aligned}$$

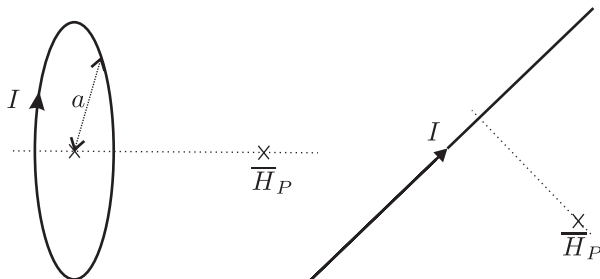
I A P szerinti deriválás miatt lesz $\frac{1}{r_{PS}} \text{rot }_P d\vec{l}_s = 0$, hiszen l S függvénye.

II $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{r}_0$ Ahol $\vec{r}_0$ az r irányú egységvektor ($\vec{e}_r$)

11 BIOT-SAVART TÖRVÉNY

$$H = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

11.1 PÉLDÁK



11.1. ábra. Példák

11.2 ÖNINDUKCIÓS EGYÜTTHATÓ

$$L \triangleq \frac{\Phi}{I}$$

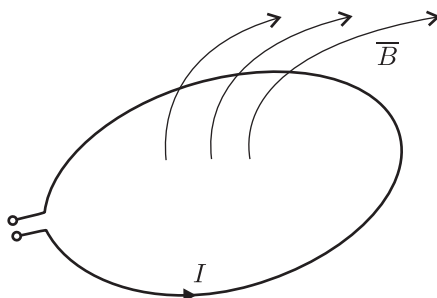
Sok menet esetén $\Psi = \sum_i \Phi_i$ (Fluxuskapcsolódás).

11.3 KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓS EGYÜTTHATÓ

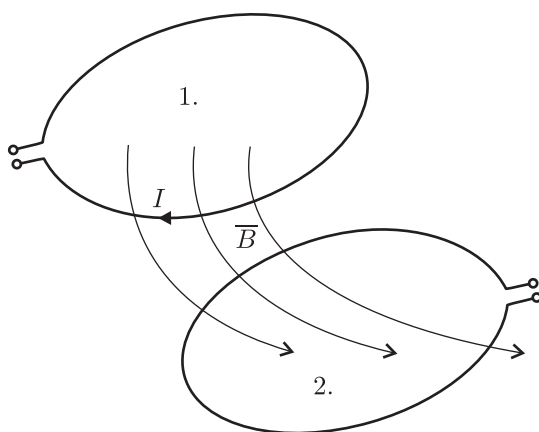
$$L_{21} \triangleq \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

M 2-es hurokban nem folyik áram.

M Ha nincsenek ferromágneses anyagok, akkor bizonyítható, hogy $L_{12} = L_{21}$



11.2. ábra. Önindukciós együttható



11.3. ábra. Kölcsönös indukciós együttható

11.4 MÁGNESES KÖRÖK

Az alábbi elrendezés transzformátor lemezből készült. Mekkora a gerjesztés, ha a légrésben $B_0 = 0,8T$ lép fel? A feladat megoldása során fontos elvek:

- H-ra referencia irányok meghatározása.
- Független hurkok, és azok irányainak kijelölése.
- Független csomópontok kijelölése

A szórás elhanyagolásával, és azzal a ténnyel, hogy az indukció normális komponense folytonosan megy át közeghatáron kijelenthető, hogy

$$B_1 = B_0 = 0,8T$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{0,8}{4\pi 10^{-7}} = 6370 \frac{A}{cm}$$

I „Hurokegyenlet” $\left(\oint H \, dl = \int j \, dA \right)$

$$H_0 l_0 + H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0$$

$$H_2 = \frac{H_0 l_0 + H_1 l_1}{l_2} = \frac{637 + 34}{26} = 25,8 \frac{A}{cm}$$

II „Csomóponti egyenlet” $\left(\oint B \, dA = 0 \right)$

$$A_2 = 2cm^2$$

$$A_1 = 4cm^2$$

$$A_3 = 4cm^2$$

$$-B_2 A_2 - B_1 A_1 + B_3 A_3 = 0$$

$$B_3 = \frac{B_2 A_2 + B_1 A_1}{A_3} = 1,46T$$

III Gerjesztés meghatározása ($[\Theta] = A \cdot menet$)

$$H_3 l_3 + H_2 l_2 = NI = \Theta = \underline{2090A}$$

12 KIRCHOFF EGYENLETEK

Levezetése a Maxwell egyenletekből

12.1 EGYENÁRAM

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) \quad (\text{rot } \vec{E} = 0)$$

$$\vec{E} + \vec{E}_b = \frac{\vec{j}}{\sigma}$$

$$\underbrace{\oint_0 \vec{E} d\vec{l}} + \underbrace{\oint_{U_V} \vec{E}_b d\vec{l}} = \oint \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \oint \frac{\vec{j}A}{\sigma A} d\vec{l} = I \frac{l}{\sigma A} = IR$$

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \boxed{\oint \vec{j} dA = 0}$$

12.2 IDŐBEN VÁLTOZÓ ÁRAM ESETÉN

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\Phi}{dt}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}_b$$

$$\underbrace{\int_I \vec{E} d\vec{l}} + \underbrace{\int_{II.} \vec{E} d\vec{l}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

I Feszültség források és Ellenállások;

II Kondenzátorok;

$$\int \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} - \int \vec{E}_b d\vec{l} + \int \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$IR - U_V + U_C = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$IR + U_C + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = U_V$$

$$\Phi = LI$$

$$\oint \vec{j} dA + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

14 TÁVVEZETÉKEK

Az objektum feszültséggel és árammal leírható, de figyelembe vesszük a véges terjedési sebességet is (az objektumok nem pontszerűek). Ebben az esetben a feszültség és áram nem csak az időtől, hanem egy térbeli koordinátától is függ, ezért ezeket az objektumokat Elosztott paraméterű hálózatoknak nevezzük.

$$u(x, t) \quad i(x, t)$$

A legfontosabb elosztott paraméterű hálózat a távvezeték.

14.1 TÁVÍRÓ EGYENLETEK

Másnéven távvezeték differenciálegyenletek.

M (Differenciális egységek) Az egyenletekben szereplő értékek – az eddigiektől eltérően – differenciálisan jelennek meg.

- R_1 a felső, míg R_2 az alsó hosszegységre eső ellenállása, míg G a hosszegységre eső átvezetés a két vezeték közt:

$$[R] = \frac{\Omega}{m}$$

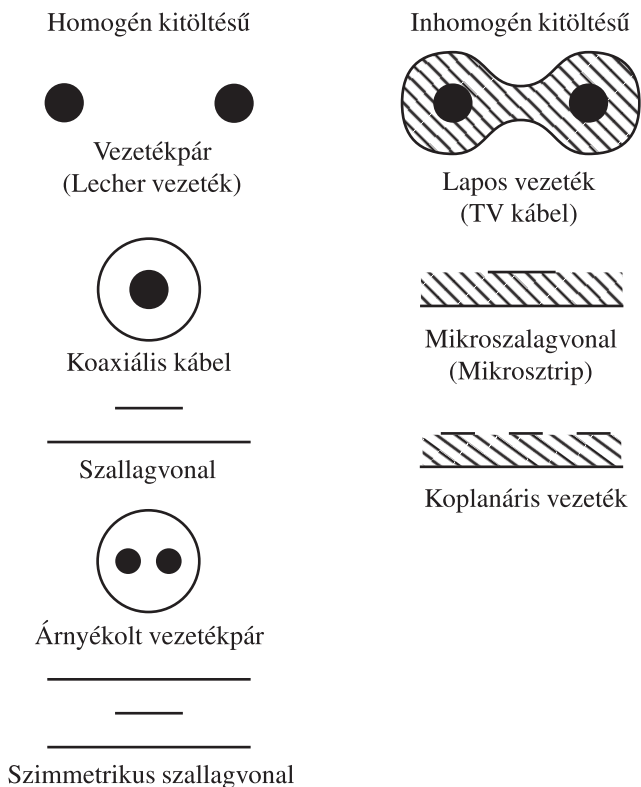
$$[G] = \frac{S}{m}$$

- Hasonlóan C és L :

$$\Phi = L \, dx_i$$

$$Q = C \, dx_u$$

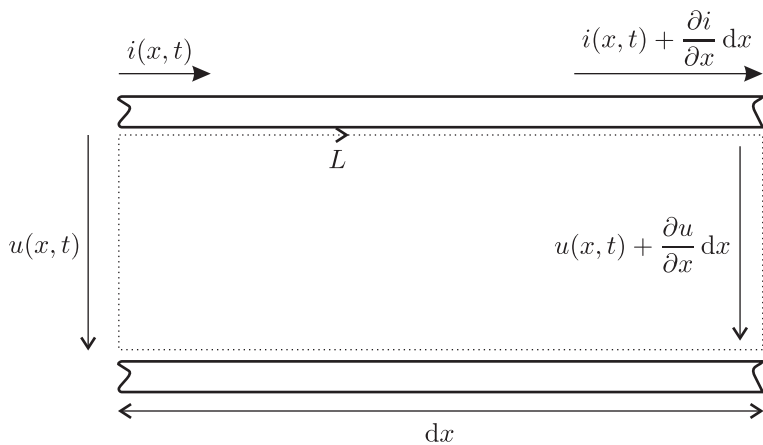
I. TÁVÍRÓ EGYENLET II. Maxwell egyenlet értelmezése L zárt görbén.



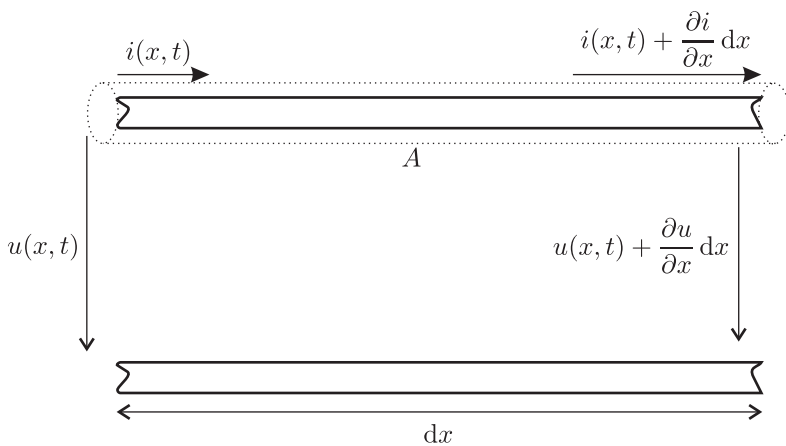
14.1. ábra. Távvezeték típusok

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{E} \, d\vec{l} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
 R_1 \, dx \underbrace{i(x, t)}_{I.} + \cancel{u(x, t)} + \frac{\partial u}{\partial x} \, dx + R_2 \, dx \underbrace{i(x, t)}_{I.} - \cancel{u(x, t)} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \\
 (R_1 + R_2) \, dx \underbrace{i}_{II.} + \frac{\partial u}{\partial x} \, dx &= -L \, dx \frac{\partial i}{\partial t} \\
 -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}
 \end{aligned}$$

II. TÁVÍRÓ EGYENLET Folytonossági egyenlet értelmezése A zárt hengerfelületen.



14.2. ábra. I. Távító egyenlet



14.3. ábra. II. Távító egyenlet

$$\oint_A \vec{j} \, d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

$$-i(x, t) + i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx + G \underbrace{u}_{III.} dx = -C dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

M A fenti egyenletekben megjelölt tagoknál:

I $i(x, t)$ vagy $i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx$? A deriválás után dx^2 -es tag lesz ami már elegendően kicsi, hogy elhanyagoljuk.

II az írásmódban elhagyjuk x és t -től való függést.

III hasonlóan az első és második ponthoz.

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + l \frac{\partial i}{\partial t} \quad (14.1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14.2)$$

Az első egyenlet szerint a feszültség csökken, mert az R -en és az L -en feszültség esik. A második egyenlet szerint az áram csökken, mert az átvezetésen (G) és a C -n áram folyik át.

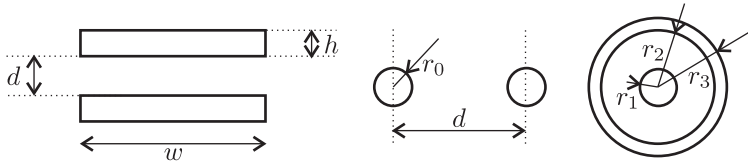
M Szokás R' , G' , L' , C' jelölés is a hosszegységre jutó paramétereknél, azok megkülönböztetése miatt (a koncentrált paraméterektől).

P (Koaxiális kábel) Legtöbb esetben elegendő a hossz paramétert elhagyni, hogy hosszegységre jutó paramétert kapjunk

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \rightarrow C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

8. táblázat. Távvezetékek

	Szallag	Lecher	Koaxiális
R	$\frac{2}{wh\sigma_v}$	$\frac{2}{r_0^2\pi\sigma_v}$	$\frac{1}{\pi\sigma_v} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_3^2 - r_2^2} \right)$
R_{skin}	$\frac{2}{w\delta\sigma_v}$	$\frac{1}{r_0\pi\sigma_v\delta}$	$\frac{1}{2\pi\sigma\delta_v} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
L	$\mu_0 \frac{d}{w}$	$\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$	$\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$
G	$\sigma_{sz} \frac{d}{w}$	$\frac{\pi\sigma_{sz}}{\ln \frac{d}{r_0}}$	$\frac{2\pi\sigma_{sz}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$
C	$\epsilon_0\epsilon_{sz} \frac{d}{w}$	$\frac{\pi\epsilon_0\epsilon_{sz}}{\ln \frac{d}{r_0}}$	$\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{sz}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$



14.4. ábra. Távvezetékek

14.2 IDŐTARTOMÁNY

Á (Ideális távvezeték)

$$R = 0 \quad G = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (I.)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (II.)$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{I.} = L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial t} = L \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial i}{\partial x}}_{II.} = -LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$-LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A fenti egyenlet egy általános hullámegyenlet, ennek megoldása minden $u = f(x - vt)$ alakú egyenlet, ahol $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

M $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ kifejezést nem lehet a végtelenségig növelni. Az induktivitás csökkentése a vezetékék közelítésével érhető el, amittől a kapacitás növekszik.

14.3 SZINUSZOS GERJESZTÉS (ÁLLANDÓSÚLT ÁLLAPOT)

Helyfüggő komplex csúcsérték:

$$i(x, t) = \Re \{ \overline{U}(x) e^{j\omega t} \}$$

$$i(x, t) = \Re \{ \overline{I}(x) e^{j\omega t} \}$$

M A komplex tartomány csak számítási segédlet, az eredmények értelmezését már a valós tartományban végezzük.

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\
-\frac{\partial}{\partial x} \Re \{ \bar{U}(x) e^{j\omega t} \} &= R \cdot \Re \{ \bar{I}(x) e^{j\omega t} \} + L \frac{\partial}{\partial t} \Re \{ \bar{I}(x) e^{j\omega t} \} \\
\Re \{ [R \cdot \bar{I}(x) + j\omega L \cdot \bar{I}(x)] e^{j\omega t} \} &= \Re \left\{ \frac{d\bar{U}}{dx} e^{j\omega t} \right\}
\end{aligned}$$

Ha $\Re \{c_1\} = \Re \{c_2\} \nrightarrow c_1 = c_2$, de ennek ebben az esetben mindig ($t = 0 \dots T$) igaznak kell lennie $\rightarrow c_1 = c_2$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \quad & -\frac{d\bar{U}(x)}{dx} = (R + j\omega L) \bar{I}(x) \quad (I.) \\
& -\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = (G + j\omega C) \bar{U}(x) \quad (II.) \\
\hline
& -\underbrace{\frac{d^2 \bar{U}(x)}{dx^2}}_{I.} = (R + j\omega L) \underbrace{\frac{d\bar{I}(x)}{dx}}_{II.} = \underbrace{-(R + j\omega L)(G + j\omega C)}_{\bar{\gamma}^2} \bar{U}(x)
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \bar{U}(x)}{dx^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{U}(x) \quad [\bar{\gamma}] = \frac{1}{m}$$

Kell egy függvény, ami arányos önmaga kétszeres deriváltjával. Ilyen függvények az $e^{\bar{\gamma}x}$, a $e^{-\bar{\gamma}x}$ és ezek lineáris kombinációi.

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_0^+ e^{-\bar{\gamma}x} + \bar{U}_0^- e^{\bar{\gamma}x}$$

$$\bar{I}(x) = \frac{1}{R + j\omega L} \frac{d\bar{U}(x)}{dx} = \frac{\bar{\gamma}}{R + j\omega L} \bar{U}_0^+ e^{-\bar{\gamma}x} - \frac{\bar{\gamma}}{R + j\omega L} \bar{U}_0^- e^{\bar{\gamma}x}$$

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_0^+ e^{-\bar{\gamma}x} + \bar{U}_0^- e^{\bar{\gamma}x} = \bar{U}^+ + \bar{U}^- \quad (14.3)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{U}_0^+}{\bar{Z}_0} e^{-\bar{\gamma}x} - \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{Z}_0} e^{\bar{\gamma}x} = \bar{I}^+ + \bar{I}^- \quad (14.4)$$

$$\bar{Z}_0 \triangleq \frac{\bar{U}_0^+(x)}{\bar{I}_0^+(x)} \quad [\bar{Z}_0] = \Omega \quad (14.5)$$

Hullámimpedancia számításának módja:

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (14.6)$$

11. ÓRA

Az előző órai megoldások fizikai tartalma.

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \overline{U}_0^+ e^{-\bar{\gamma}x} + \overline{U}_0^- e^{\bar{\gamma}x} = \overline{U}^+ + \overline{U}^- \\ \overline{I}(x) &= \frac{\overline{U}_0^+}{\overline{Z}_0} e^{-\bar{\gamma}x} - \frac{\overline{U}_0^-}{\overline{Z}_0} e^{\bar{\gamma}x} = \overline{I}^+ + \overline{I}^- \\ u(x, t) &= \Re \{ \overline{U}(x) e^{j\omega t} \}\end{aligned}$$

Értelmezése valós hely-idő függvényként és tagonként történik.

AZ EDDIGI MENNYISÉGEK KIBONTÁSA

- Terjedési tényező

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$$

- Hullámimpedancia

$$\overline{Z}_0 = Z_0 e^{j\varphi}$$

- Pozitív irányba haladó feszültség hullám komplex amplitudója

$$\overline{U}_0^+ = U_0^+ e^{j\delta^+}$$

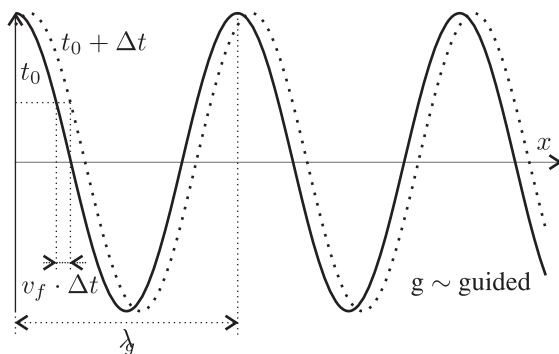
- negatív irányba haladó feszültség hullám komplex amplitudója

$$\overline{U}_0^- = U_0^- e^{j\delta^-}$$

$$\begin{aligned}u^+(x, t) &= \Re \left\{ U_0^+ e^{j\delta^+} e^{-(\alpha + j\beta)x} e^{j\omega t} \right\} \\ &= U_0^+ e^{-\alpha x} \Re \left\{ e^{j(\omega t - \beta x + \delta^+)} \right\} \\ &= \underbrace{U_0^+ e^{-\alpha x}}_{I.} \underbrace{\cos(\omega t - \beta x + \delta^+)}_{II. \quad \delta^+ = 0}\end{aligned}$$

I. $U_0^+ e^{-\alpha x} = U^+(x)$, ahol α a csúcsérték helyfüggése (csillapítási tényező).

II. $\cos \beta(x - \frac{\omega}{\beta}t) = \cos \beta(x - v_f t)$, ahol v_f a fázissebesség.



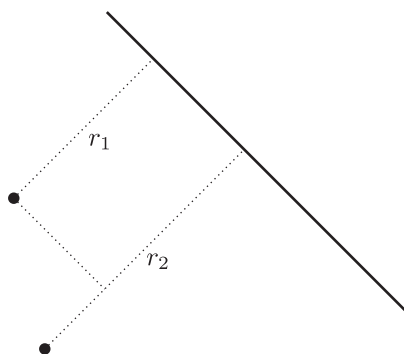
14.5. ábra. Haladó hullám

$$v_f \triangleq \frac{\omega}{\beta} \quad \left[\frac{\omega}{\beta} \right] = \frac{m}{s} \quad (14.7)$$

Minden rögzített x_0 helyen szinuszos időfüggvényt kapunk, de más-más kezdőfázissal. A fázist az x helyen a $-\beta x + \delta^+$ függvény adja meg. Ezek alapján a β értelmezhető hosszegységre jutó kezdőfázis változásként.

$$\beta \lambda_g = 2\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}} \quad (14.8)$$

P *Interferenciaszámítás – Antennák (sugárforrások) eredő tere. Lásd [14.6.ábra 60.oldal]*

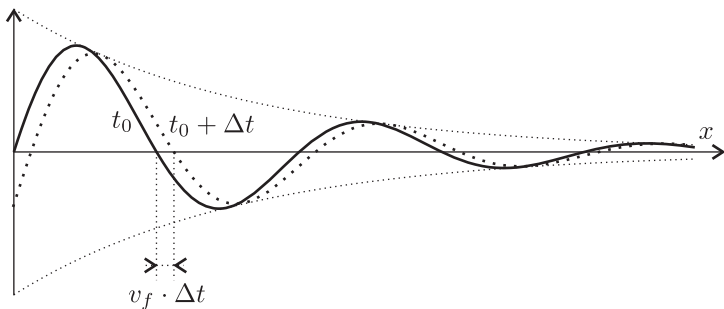


14.6. ábra. Interferenciaszámítás

A TELJES IDŐFÜGGVÉNY

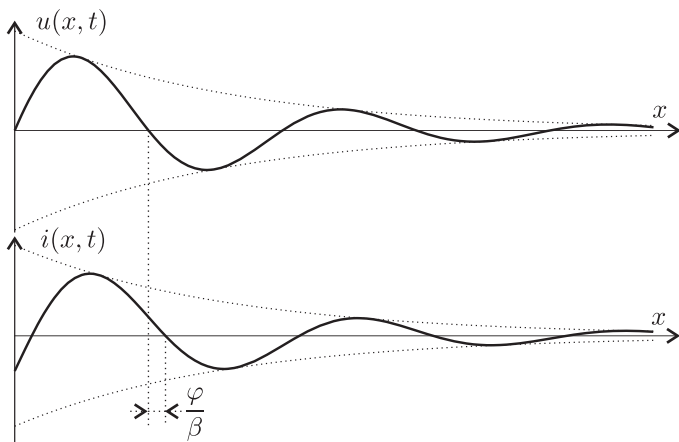
$$u^+(x, t) = U_0^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \delta^+) \quad (14.9)$$

Az áramhullám:



14.7. ábra. Feszültség hullám

$$i^+(x, t) = \Re \left\{ \frac{U_0 e^{j\delta^+}}{Z_0 e^{j\varphi}} e^{(\alpha + j\beta)x} e^{j\omega t} \right\} = \frac{U_0^+}{Z_0} e^{-\alpha x} \underbrace{\cos(\omega t - \beta x + \delta^+ - \varphi)}_{!\delta^+ = 0} \quad (14.10)$$



14.8. ábra. Áram hullám

A HULLÁMIMPEDANCIA SZÖGÉNEK ÉRTELMEZÉSE Hasonlóan a koncentrált paraméterű hálózatoknál megismert komplex impedanciához.

Balra haladó hullámok βx kifejezés előjelet vált – a fázissebesség előjelet vált.

$$u^-(x, t) = U_0^- e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \delta^-) \quad (14.11)$$

A HULLÁMIMPEDANCIA

$$\boxed{\bar{Z}_0 \triangleq \frac{\bar{U}^+(x)}{\bar{I}^+(x)}} = \frac{\text{poz. irányba haladó fesz. komplex csúcértéke}}{\text{neg. irányba haladó áram komplex csúcértéke}} \quad (14.12)$$

M Nem összetévesztendő a bemeneti impedanciával, ami

$$\bar{Z}_{be} \triangleq \frac{\bar{U}(x)}{\bar{I}(x)}$$

Továbbá fenn áll a következő összefüggés is:

$$\boxed{\bar{Z}_0 = -\frac{\bar{U}^-(x)}{\bar{I}^-(x)}}$$

ÖSSZEFOGLALÁS A távvezeték differenciál egyenletének megoldásánál kapott konstansoknak csak akkor lehet egyszerű értelmezést adni, ha a teljes megoldás I. és II. tagját külön-külön vizsgáljuk. A nyert értelmezések csak akkor használhatóak fel távvezeték feladatok megoldására, ha a távvezetéken csak egy irányba haladó hullám van. Ha mérünk, akkor biztosítanunk kell az egyirányú terjedést.

$$U(l) = U_0 e^{-\alpha l}$$

HULLÁMPARAMÉTEREK $\bar{\gamma}$ és $\bar{Z}_0$ együtt!

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{U}_0^+}{\bar{I}_0^+} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

A HULLÁMPARAMÉTEREK FÜGGÉSE A VEZETÉK PARAMÉTEREITŐL

Ideális vezeték $R = 0 \quad G = 0$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(\mathcal{R} + j\omega L)(\mathcal{G} + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad \rightarrow \quad v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{R} + j\omega L}{\mathcal{G} + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

P Koaxiális kábelnél:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

A fázistényező meghatározása:

- o A frekvenciából és
- o a kábelt kitöltő közeg ε_r -jából történik.

M A μ_r -t ilyenkor 1-nek vesszük. Ennek oka, hogy azok az anyagok, amiknek relatív permeabilitása 1-től különböző, azok jó vezetők (kivétel pl. a ferrit). Ezeket nem használjuk szigetelőknél.

Ideális vezeték, de ε_r is van Ekkor a szigetelőben terjedő E és H kíséri a feszültség és áram hullámot.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \varepsilon_r = 1 \quad \rightarrow \quad v = c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Ahol λ a szabadtéri hullámhossz $\lambda = \frac{c}{f}$

Veszteséges vezetők

$$v = \frac{\omega}{\beta} < c$$

$$\begin{aligned}\bar{U}(x) &= \bar{U}_0^+ e^{-\bar{\gamma}x} + \bar{U}_0^- e^{\bar{\gamma}x} = \bar{U}^+ + \bar{U}^- \\ \bar{I}(x) &= \frac{\bar{U}_0^+}{\bar{Z}_0} e^{-\bar{\gamma}x} - \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{Z}_0} e^{\bar{\gamma}x} = \bar{I}^+ + \bar{I}^-\end{aligned}$$

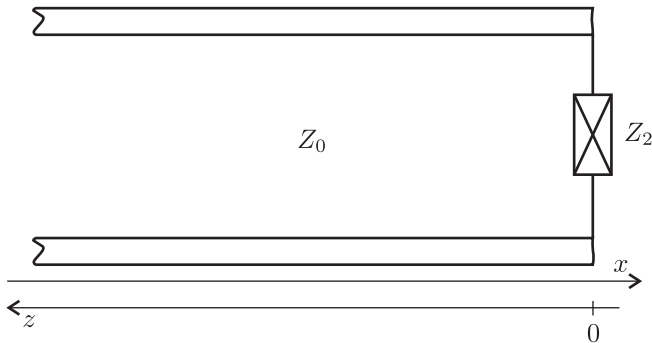
$\bar{U}_0^+$ és $\bar{U}_0^-$ komplex konstans a peremfeltételekből:

- Adott a feszültség a távvezeték két különböző helyén;
- Adott az áram a távvezeték két különböző helyén;
- Adott az áram az egyik a feszültség a másik helyén;
- stb.

A REFLEXIÓ TÉNYEZŐ Adott a feszültség és áram hányadosa (impedancia) a vezeték valamely pontján

M mostantól ideális távvezetékkel foglalkozunk. Illetve koordinátatengelyt váltunk:

- Eddig x tengelyünk volt, aminek a 0 pontja a távvezeték „elején” volt.
- Most z tengelyünk lesz, ennek 0 pontja a lezárásnál (A távvezeték „másik végén”) lesz.
- a két irány ellentétes (z tengely pozitív iránya a lezárástól a távvezeték „eleje” felé mutat.)



14.9. ábra. Távvezeték modell

$$\bar{\gamma} = j\beta \quad \bar{Z}_0 = Z_0$$

$$\begin{aligned}\bar{U}(x) &= \bar{U}_0^+ e^{j\beta z} + \bar{U}_0^- e^{-j\beta z} \\ \bar{I}(x) &= \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} e^{j\beta z} - \frac{\bar{U}_0^-}{Z_0} e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

BEMENETI IMPEDANCIA

$$\bar{Z}(z) \triangleq \frac{\bar{U}(z)}{\bar{I}(z)} = \frac{\bar{U}_0^+ e^{j\beta z} + \bar{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} e^{j\beta z} - \frac{\bar{U}_0^-}{Z_0} e^{-j\beta z}} = Z_0 \frac{1 + \frac{\bar{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\bar{U}_0^+ e^{j\beta z}}}{1 - \frac{\bar{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\bar{U}_0^+ e^{j\beta z}}}$$

REFLEXIÓ TÉNYEZŐ

$$\boxed{\bar{r}(z) \triangleq \frac{\bar{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\bar{U}_0^+ e^{j\beta z}}} = \frac{\text{jobbról balra}}{\text{balról jobbra}} \quad (14.13)$$

$$\boxed{\bar{r}(z) = \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+} e^{-j2\beta z} = \bar{r}(0) e^{-j2\beta z}} \quad (14.14)$$

M Mivel $|e^{j\varphi}| = 1$, így

$$|\bar{r}(z)| = |\bar{r}(0)| \quad (14.15)$$

Tehát a reflexió tényezőnek csak a szöge változik a távvezeték mentén.

$$\begin{aligned}\bar{Z}(z) &= Z_0 \frac{1 + \bar{r}(z)}{1 - \bar{r}(z)} \\ \bar{r}(z) &= \frac{\bar{Z}(z) - Z_0}{\bar{Z}(z) + Z_0} \\ \bar{r}(0) &= \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0}\end{aligned}$$

Kapcsolat van a két irányú feszültség komplex csúcértékei közt, az alábbi módon:

$$\begin{aligned}\bar{r}(0) &= \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+} \\ U_0^- e^{j\delta^-} &= |\bar{r}(0)| e^{j\varphi} U_0^+ e^{j\delta^+} \\ &\swarrow \searrow \\ U_0^- &= |\bar{r}(0)| U_0^+ \quad \delta^- = \delta^+ + \varphi\end{aligned}$$

A $z = 0$ helyen lévő kötés meghatározza a két szembehaldó hullám amplitudó és fázisviszonyát tetszőleges z helyen. Ez a mondanivalója [14.14.egyenlet 65.oldal]-nek. Ez a reflexió tényező nem tranzienszt ír le, hanem két végtelen hosszú szinuszos hullám amplitudó és kezdőfázis viszonyát rögzíti.

D (Reflexió Tényező) Szembe haladó hullámok komplex csúcsértékeinek arányát meghatározó mennyiség.

14.4 KÜLÖNBÖZŐ LEZÁRÁSOK VIZSGÁLATA

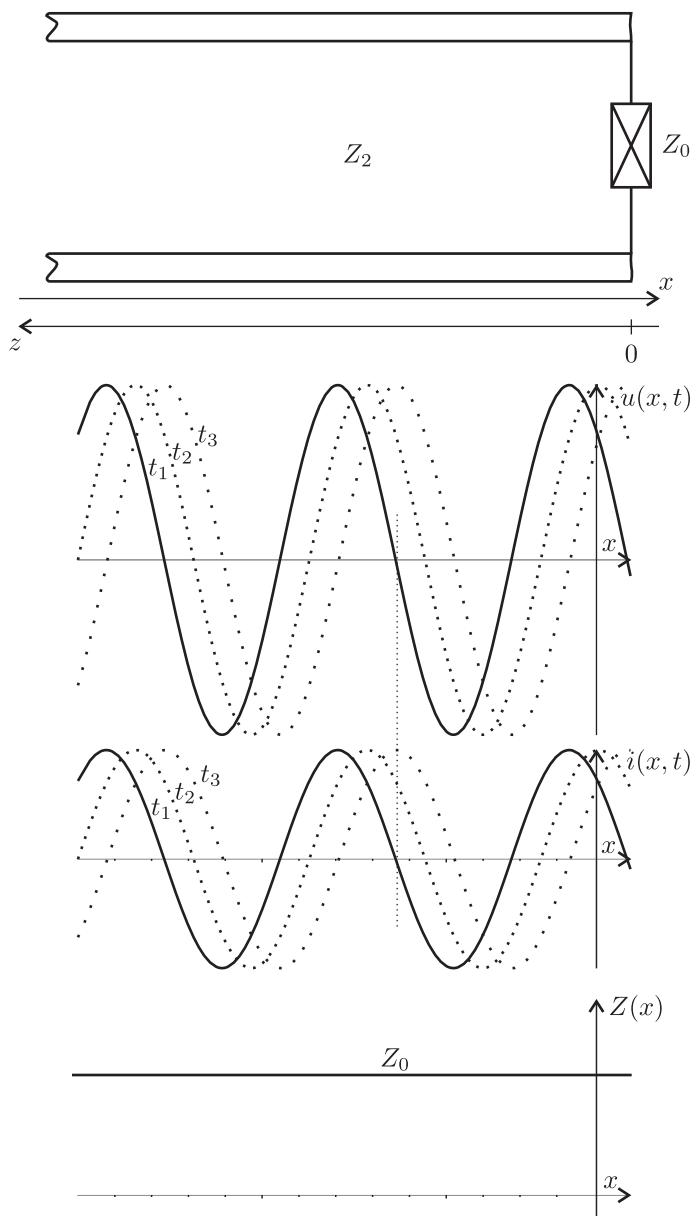
ILLESZTETT VEZETÉK

$$\begin{aligned}\bar{U}(x) &= \bar{U}_0^+ (e^{j\beta x} + r(0)e^{-j\beta x}) \\ \bar{I}(x) &= \frac{\bar{U}_0^+}{\bar{Z}_0} (e^{j\beta x} - r(0)e^{-j\beta x}) \\ r(0) &= \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = 0 \\ \bar{Z}(x) &= \frac{\bar{U}(x)}{\bar{I}(x)} = \frac{\bar{U}_0^+ e^{-j\beta x} + \cancel{\bar{U}_0^- e^{j\beta x}}}{\frac{\bar{U}_0^+}{\bar{Z}_0} e^{-j\beta x} - \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{Z}_0} e^{j\beta x}} \\ Z_0 &\triangleq \frac{U_0^+ e^{-j\beta x}}{\frac{U_0^+}{Z_0} e^{-j\beta x}}\end{aligned}$$

Ha csak balról jobbra terjedő hullám van,akkor a hullámimpedancia és a bemeneti impedancia megegyezik. [14.10.ábra 67.oldal] Ilyen esetben a csúcsértéket a vezeték minden pontjára „elszállítja” a hullám.

M A hullámhossz változás nem okoz impedancia változást.

D (Illesztés) A lezáró ellenállást és a hullámmellenállást azonos méretűre választjuk.
 $\bar{Z}_2 = Z_0$



14.10. ábra. Illesztett vezeték

VÉGÉN RÖVIDRE ZÁRT TÁVVEZETÉK Vezetékcsonk – reaktanciát tud előállítani.

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(z) &= \bar{U}_0^+ (e^{j\beta z} + r(0)e^{-j\beta z}) \\
 \bar{I}(z) &= \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} (e^{j\beta z} - r(0)e^{-j\beta z}) \\
 r(0) &= \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = -1 \\
 \bar{U}(z) &= \bar{U}_0^+ (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}) = j2\bar{U}_0^+ \sin \beta z \\
 \bar{I}(z) &= \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}) = 2\frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} \cos \beta z \\
 u(z, t) &= \Re \{ U(z)e^{j\omega t} \} = \Re \{ j2\bar{U}_0^+ \sin(\beta z)e^{j\omega t} \} = \\
 &= 2U_0^+ \sin(\beta z) \cos(\omega t + 90^\circ) = -2U_0^+ \sin(\beta z) \sin(\omega t) \\
 i(z, t) &= 2\frac{U_0^+}{Z_0} \cos(\beta z) \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

Az állóhullám úgy zajlik le, hogy a feszültség és az áram közt 90° fáziskülönbség van. [14.11.ábra 69.oldal]

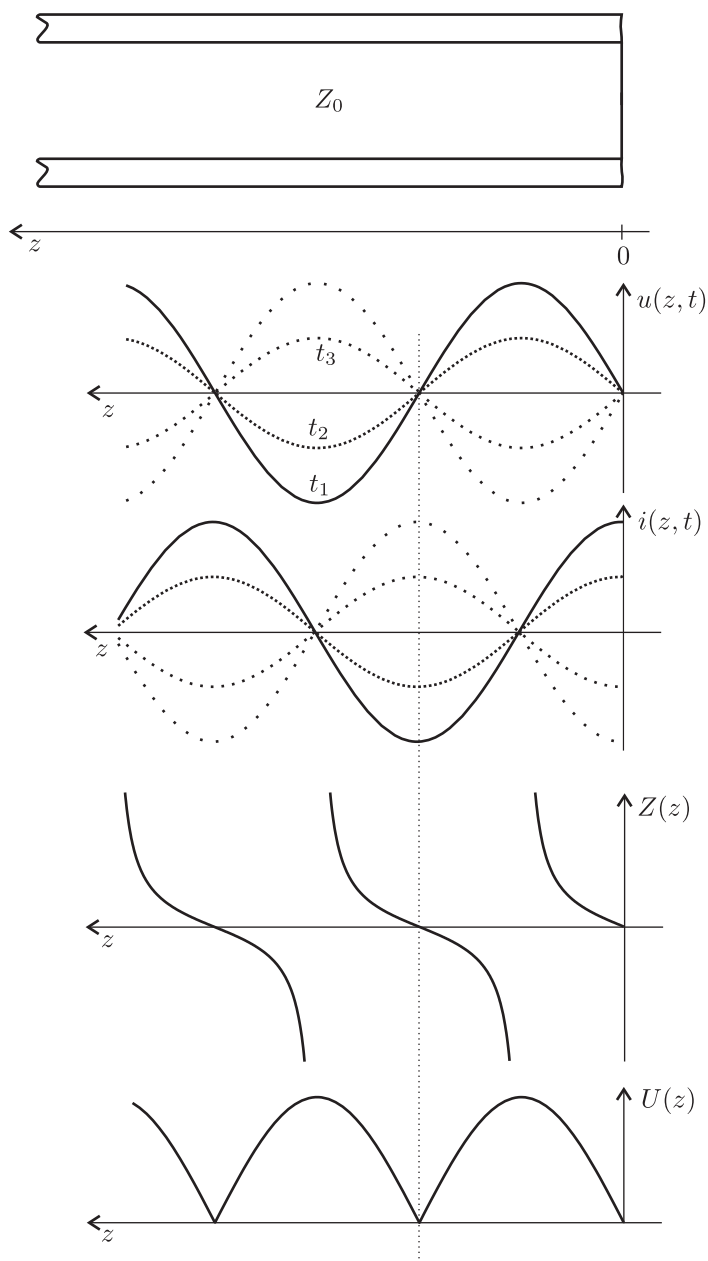
D (Állóhullám)

$$\underbrace{f(z)}_{\text{helyf. függ.}} \overbrace{\cos \omega t}^{\text{időf. függ.}}$$

$f(z)$ -t „lélegezteti” a $\cos$ függvény. Persze nem csak szinusz/koszinusz állóhullám van, hanem például exponenciális helyfüggésű állóhullám is elképzelhető.

$$Z(z) = \frac{\bar{U}(z)}{\bar{I}(z)} = \frac{-2U_0^+ \sin(\beta z)}{2\frac{U_0^+}{Z_0} \cos(\beta z)} = \underbrace{j}_{I.} \underbrace{Z_0 \tan(\beta z)}_{II.} \quad \text{tisztá képzetes}$$

Energetikailag a lezárás tiszta képzetes, a terhelés nem vesz fel hatásos teljesítményt. A vezeték ideális, tehát nem vehet fel teljesítményt, ezáltal a bemenet sem vehet fel teljesítményt. A bemenet tiszta képzetes.



14.11. ábra. Végén rövidre zárt távvezeték

OHM-OS LEZÁRÁS

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \overline{U}_0^+ (e^{j\beta z} + \bar{r}(0)e^{-j\beta z}) = \\
 &= \cos(\beta z) + j \sin(\beta z) + r(0) \cos(\beta z) - jr(0) \sin(\beta z) = \\
 &= \overline{U}_0^+ (1 + r(0)) \cos(\beta z) + j(1 - r(0)) \sin(\beta z) = \\
 &= U_0^+ \sqrt{(1 + r(0))^2 \cos^2(\beta z) + j(1 - r(0))^2 \sin^2(\beta z)} = \\
 &= U_0^+ \sqrt{1 + r^2(0) + 2r(0) (\cos^2(\beta z) - \sin^2(\beta z))} = \\
 &= U_0^+ \sqrt{1 + r^2(0) + 2r(0) \cos(2\beta z)}
 \end{aligned}$$

A csúcsérték maximuma, ahol $\cos(2\beta z) = 0$

$$U(z)|_{max} = U_0^+ (1 + |r(0)|)$$

$$U(z)|_{min} = U_0^+ (1 - |r(0)|)$$

13. ÓRA

$$U(z) = U_0^+ \sqrt{1 + r^2(0) + 2r(0) \cos(2\beta z)} \quad (14.16)$$

$U(z)$ konstansra szuperponált $\cos$.

- ha $r(0) > 0$ azaz $R_2 > Z_0$, akkor a $z = 0, \frac{\lambda_g}{2}, \frac{2\lambda_g}{2} \dots$ helyeken maximum csúcsérték van.

$$U_{max} = U_0^+ (1 + r(0)) \quad (14.17)$$

- ha $r(0) < 0$ azaz $R_2 < Z_0$, akkor a $\frac{\lambda_g}{4}, \frac{3\lambda_g}{4}, \frac{5\lambda_g}{4} \dots$ helyeken maximum csúcsérték van.

$$U_{max} = U_0^+ (1 + |r(0)|) \quad (14.18)$$

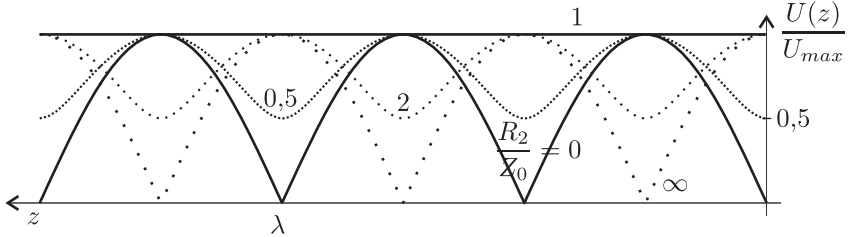
M Ez $r(0) > 0$ -ra is igaz.

- $U_{min} r(0) > 0$, ahol $\cos(2\beta z) = -1$
- $U_{min} r(0) < 0$, ahol $\cos(2\beta z) = 1$

$$U_{min} = U_0^+ (1 - |r(0)|) \quad (14.19)$$

M $r(0)$ helyett írhatunk r -t is, mert ideális távvezetéken a reflexió tényezőnek csak a szöge változik – abszolút értéke helyfüggetlen.

$$r(z) = r(0)e^{-j\beta z} \quad (14.20)$$



14.12. ábra. Ohm-os lezárás

14.5 ÁLLÓHULLÁM ARÁNY

Voltage Standing Wave Ratio – VSWR

$$\text{VSWR} \triangleq \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1 + |\bar{r}|}{1 - |\bar{r}|} \quad (14.21)$$

Az illesztettség jellemzője

$$\text{illesztett} \leftarrow 1 \leq \text{VSWR} \leq \infty \rightarrow \text{rövidzár} \quad (14.22)$$

M U_{min} és U_{max} értelmezése:

- U_{max} a csúcsértékek közül a legnagyobb.
- U_{min} a csúcsértékek közül a legkisebb.

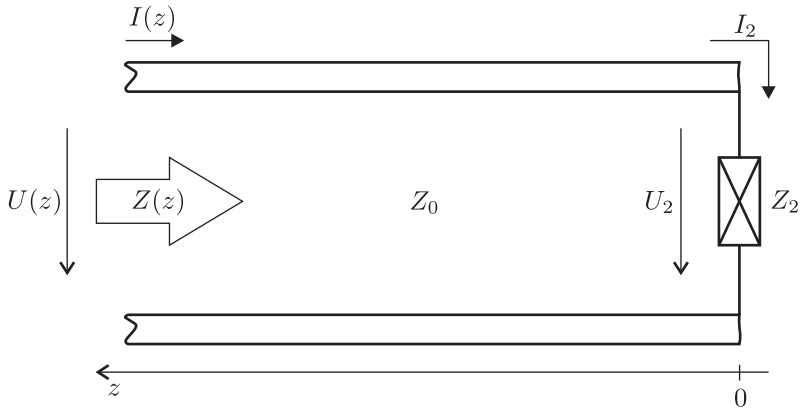
14.6 A TÁVVEZETÉK, MINT KÉTKAPU

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_0^+ e^{j\beta x} + \bar{U}_0^- e^{-j\beta x} \quad (14.23)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} e^{j\beta x} - \frac{\bar{U}_0^-}{Z_0} e^{-j\beta x} \quad (14.24)$$

U_0^+ és U_0^- a peremfeltételekből határozható meg.

$$\begin{aligned} \bar{U}(z=0) = \bar{U}_2 & \rightarrow \bar{U}_2 = \bar{U}_0^+ + \bar{U}_0^- & U_0^+ = \frac{1}{2} (\bar{U}_2 + Z_0 \bar{I}_2) \\ \bar{I}(z=0) = \bar{I}_2 & \rightarrow \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0} - \frac{\bar{U}_0^-}{Z_0} & U_0^- = \frac{1}{2} (\bar{U}_2 - Z_0 \bar{I}_2) \end{aligned} \quad (14.25)$$



14.13. ábra. A távvezeték, mint kétkapu

M Az U_0^+ és U_0^- meghatározására ritkán van szükség, kivéve egyirányú terjedés esetén.

$$\begin{aligned} U(z) &= U_2 \frac{e^{j\beta z}}{2} + Z_0 I_2 \frac{e^{j\beta z}}{2} + U_2 \frac{e^{-j\beta z}}{2} - Z_0 I_2 \frac{e^{-j\beta z}}{2} = \\ &= U_2 \cos(\beta z) + j I_2 Z_0 \sin(\beta z) \end{aligned} \quad (14.26)$$

$$I(z) = j \frac{U_2}{Z_0} \sin(\beta z) + I_2 \cos(\beta z) \quad (14.27)$$

Lánc referenciáirányok – lánc karakterisztika mátrix.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos \beta z & j Z_0 \sin \beta z \\ \frac{j}{Z_0} \sin \beta z & \cos \beta z \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \det \underline{\underline{A}} = 1 & A_{22} = A_{11} \\ \text{reciprocitás} & \text{szimmetria} \end{array} \quad (14.28)$$

A BEMENETI IMPEDANCIA

$$\begin{aligned} \bar{Z}(z) &\triangleq \frac{\bar{U}(z)}{\bar{I}(z)} = \frac{\bar{U}_2 \cos(\beta z) + j \bar{I}_2 Z_0 \sin(\beta z)}{\bar{I}_2 \cos(\beta z) + j \frac{\bar{U}_2}{Z_0} \sin(\beta z)} \\ &= \boxed{Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tan \beta z}{Z_0 + j Z_2 \tan \beta z}} \end{aligned} \quad (14.29)$$

$$\bar{Z}(z_2) = Z_0 \frac{\bar{Z}(z_1) + j Z_0 \tan \beta(z_2 - z_1)}{Z_0 + j \bar{Z}(z_1) \tan \beta(z_2 - z_1)} \quad (14.30)$$

A BEMENETI IMPEDANCIA KIFEJEZÉSÉNEK A TULAJDONSÁGAI

Speciális hosszak

○

$$z \ll \lambda_g \rightarrow \beta z = \frac{2\pi}{\lambda_g} z \quad (14.31)$$

$$\tan \dots \approx 0 \quad \boxed{Z(z) \approx Z_2} \quad (14.32)$$

M Mikor kell távvezetéként foglalkozni egy vezetékpárral?

○

$$z = k \frac{\lambda_g}{2} \rightarrow \beta z = k\pi \quad (14.33)$$

$$\tan \dots \approx 0 \quad \boxed{Z\left(\frac{\lambda_g}{2}\right) = Z_2} \quad (14.34)$$

○

$$z = (2k+1) \frac{\lambda_g}{4} \quad (14.35)$$

$$\boxed{\overline{Z}\left(\frac{\lambda_g}{4}\right) = \frac{Z_0^2}{\overline{Z}_2}} \quad (14.36)$$

Speciális lezárások

○

$$\overline{Z}_2 = Z_0 \rightarrow \overline{Z}(z) = Z_0 \quad (14.37)$$

○

$$\overline{Z}_2 = jX_2 \rightarrow \overline{Z}(z) = jX_z \quad (14.38)$$

○

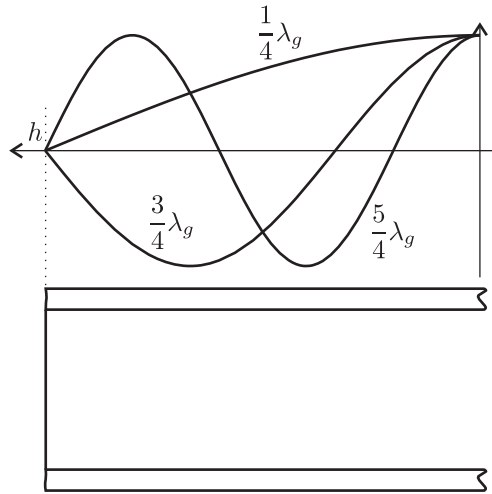
$$\overline{Z}_2 = 0 \rightarrow \overline{Z}(z) = jZ_0 \tan \beta z \quad (14.39)$$

A TÁVVEZETÉK, MINT REZGŐKÖR

P (Egyszerű áramköri feltétel)

$$I(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2) = 0 \quad (14.40)$$

$$I \neq 0 \quad (14.41)$$



14.14. ábra. Távvezeték, mint rezgőkör

A triviálistól különböző megoldás a sajátrezgésre:

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = 0 \quad (14.42)$$

Általánosabban $\det \underline{\underline{M}} = 0$.

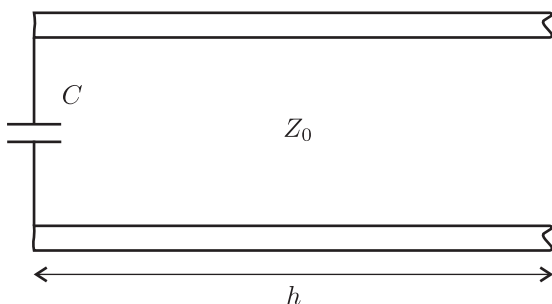
P (Egyszerű rezgőkör)

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \quad (14.43)$$

P (Távvezetékre) A rezonancia feltétele:

$$\frac{1}{j\omega C} + jZ_0 \tan \beta h = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{v_f} \quad (14.44)$$

- $\omega = ?$ esetén un. transzcendens egyenlethez jutunk, aminek megoldása csak közelítő, ill grafikus módszerrel kapható meg.
- $h = ?$ egyszerű matematikai probléma.



14.15. ábra. Távfűzeték rezonanciája

15 ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

15.1 A VEKTORIÁLIS HULLÁMEGYENLET

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \dots \vec{E}(t) &\rightarrow \vec{H}(t) \rightarrow \vec{E}(t) \rightarrow \vec{H}(t) \dots \end{aligned}$$

M [4.3.ábra 22.oldal]

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \text{rot rot } \vec{E} &= \cancel{\text{grad div } \vec{E}} - \Delta \vec{E} \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \quad (\text{div } \vec{E} = \rho) \end{aligned}$$

Helyfüggetlen, homogén, tértöltés mentes közegét vizsgálunk. Ekkor a vektoriális hullámmegyenlet

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (15.1)$$

M A fenti levezetésben veszteség- $(\vec{j} = \sigma \vec{E})$ és gerjesztésmentes(Antenna) a közeg, így joggal hagyjuk el $\vec{j}$ -t.

Megoldjuk $\overline{E}$ -re a hullámmegyenletet A síkhullámok Descartes derékszögű koordinátarendszerben :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \overline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}_y}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \overline{E}_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \overline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}_z}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \overline{E}_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \overline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{E}_z}{\partial z} &= 0 \quad (\text{div } \overline{E})\end{aligned}$$

A síkhullám esetén a fenti egyenletek egyszerűsödnek, hiszen

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Az egyenletek egyszerűsítés után:

$$\frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial t^2} \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{E}_y}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \overline{E}_y}{\partial t^2} \quad (15.3)$$

$$\frac{\partial \overline{E}_z}{\partial z} = 0 \quad (15.4)$$

- A harmadik kifejezés szerint, ha van E_z , akkor az helyfüggetlen, további vizsgálataink során ! $\overline{E}_z = 0$.
- Egyenlőre csak $\overline{E}_x$ van, ha $\overline{E}_y$ is van az polarizációs kérdés (köv. óra).

$$\frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \overline{E}_x}{\partial t^2} \rightarrow E_x = f(z - vt)$$

↓

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\end{aligned}$$

[M] ! $\mu_r = 1$, mert különben az anyag jó vezető(kivétel pl. a ferrit), vezető anyagokban a EM hullám gyorsan csillapodik.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}} \quad (15.5)$$

Ahol $c = 2.997 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ a fénysebesség.

[M] A fenti kifejezéssel összekapcsolódik az optika és az elektromágneses hullámok témaköre, a kapcsolat:

$$v = \frac{c}{n} \rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (15.6)$$

Természetesen igazolásába beleszól a diszperziós jelenség (a törésmutató függése a hullámhossztól). Például a víz $\varepsilon_r = 80$ kis frekvenciákon, míg optikában $n = 1.33$.

2. Kiszámoljuk $\overline{H}$ -t

$$-\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = \text{rot } \overline{E} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \overline{k} \times \overline{E}$$

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{k} \times \overline{E}) = \\ &= \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{1}{\mu} (\overline{k} \times \overline{E}) + \overline{H}(\text{idofüggetlen}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\overline{k} \times \overline{E}) \end{aligned}$$

$\overline{E}$, $\overline{H}$ és a terjedés iránya egymásra merőleges, tehát transzverzális hullám, ahol az xy sík a transzverzális sík.

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \xrightarrow{\text{vákuum}} Z_0 = 377\Omega \approx 120\pi$$

ÖSSZEFOGLALÁS

I.

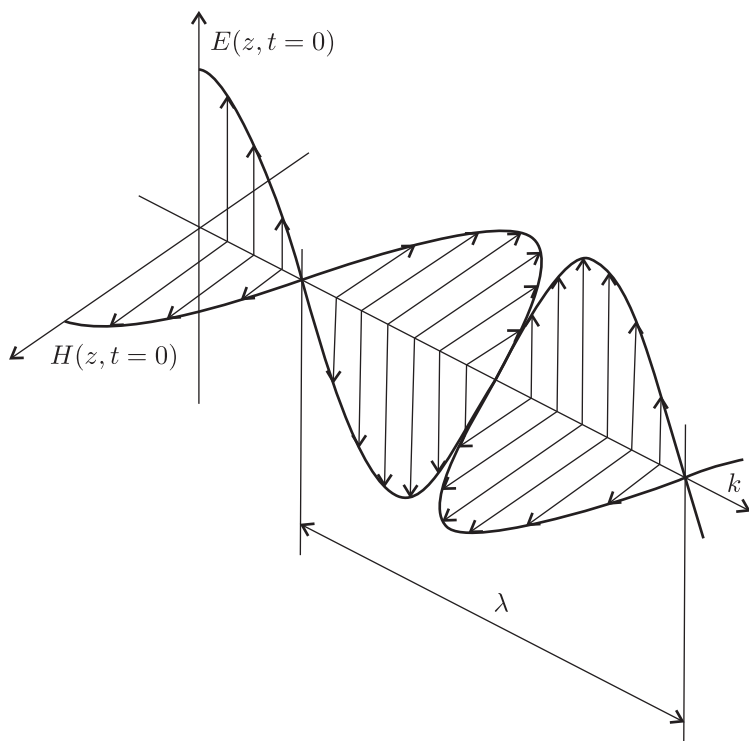
$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (15.7)$$

II.

$$\overline{E} \perp \overline{H} \perp \text{terj. irány} \quad (15.8)$$

III.

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (15.9)$$



15.1. ábra. Elektromágneses síkhullám

15.2 SÍKHULLÁM VESZTESÉGES KÖZEGBEN

Távvezeték analógia alapján.

$$\text{rot } \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad \bar{j} = \sigma \bar{E} \text{ (diff. ohm törv.)}$$

$$\text{rot } \bar{H} = \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

E_x és H_y van csak, akkor analógia lép fel a távvezetékkel, specializálható:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \sigma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

A differenciál egyenletek

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial E_x}{\partial z} &= \mu \frac{\partial H_y}{\partial z} & \Leftrightarrow & -\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\
 -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \sigma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} & & -\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}
 \end{aligned}$$

9. táblázat. Távvvezeték és síkhullám analógia

Távvvezeték		Síkhullám	
V	u	E	$\frac{V}{m}$
A	i	H	$\frac{A}{m}$
Ω	R	0	
$\frac{H}{m}$	L	μ	$\frac{H}{m}$
$\frac{S}{m}$	G	σ	$\frac{S}{m}$
$\frac{F}{m}$	C	ε	$\frac{F}{m}$

PEREMFELTÉTELEK

- rövidzár – ideális fémsík (villamos fal);
- szakadás – (mágneses fal);

Terjedés

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma} &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} & \bar{\gamma} &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \\
 \bar{Z}_0 &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} & \bar{Z}_0 &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = Z_0 e^{j\varphi}
 \end{aligned}$$

$$E_x = E_x(0)e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_x(0)}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi)$$

M Ezek az egyenletek az általánosabbak.

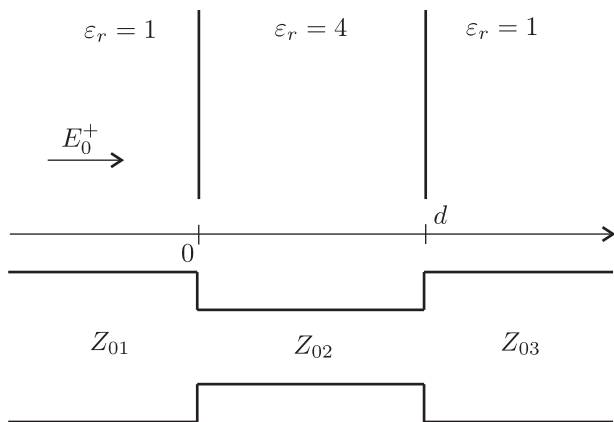
P (Távvezeték analógia) E_0^+ és ω -val jellemzett hullám d vastag szigetelő falon ($\varepsilon_r = 4$) hogyan jut át ($E(d) = ?$; $E_0^- = ?$)?

A fenti elrendezés átírható távvezeték problémára a következőképpen

$$Z_{01} = Z_{03} = 377\Omega$$

$$Z_{02} = \frac{377\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 188.5\Omega \quad \text{ha } \mu_r = 1$$

...



15.2. ábra. Ábra a távvezeték analógia példához

M Végtelen hosszú távvezeték bemeneti impedanciája a hullámimpedancia (csak egyirányú terjedés van).

15.3 KOMPLEX PERMITTIVITÁS

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} \quad \text{Maxwell I. sin-os változásra}$$

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \varepsilon_k \vec{E} \quad \text{Ahol } \varepsilon_k \text{ a komplex permittivitás}$$

$$\text{rot } \vec{H} = j\varepsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}\right) \vec{E}$$

$$\boxed{\varepsilon_k = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)}$$

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \triangleq \frac{\text{vezetési áramsűrűség}}{\text{eltolási áramsűrűség}}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon(1 - j \tan \delta) = \varepsilon' + \varepsilon''$$

Ezzel az ideális szigetelőre vonatkozó formulák alkalmazhatóvá válnak veszteséges közeg esetében is.

10. táblázat. Komplex permittivitás

	Ideális	Veszteséges
$\bar{\gamma}$	$j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$	$\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$
Z_0	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$

15. ÓRA

15.4 HULLÁMPARAMÉTEREK SZÁMÍTÁSA VESZTESÉGES KÖZEGBEN (ÖSSZEFOGLALÁS)

Távezeték analógia

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

Komplex permittivitás

$$\bar{\gamma} = j\omega\sqrt{\varepsilon_k\mu}$$

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}}$$

Azt a módszert használjuk, amit megkapunk a feladat leírásában, tehát σ és ε esetén távvezeték analógia, és ε_k esetében a komplex permittivitás egyenleteit.

15.5 SÍKHULLÁM POLARIZÁCIÓJA

A villamos térerősség vektorának a viselkedése a hullám terjedése közben.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (15.10)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (15.11)$$

LINEÁRIS POLARIZÁCIÓ Adott egyenes irányában lineárisan polarizált.

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \quad (15.12)$$

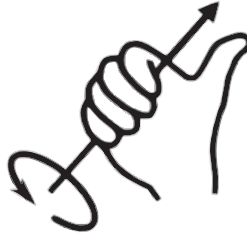
$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta z) \quad (15.13)$$

P x tengely irányában lineárisan polarizált:

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

CIRKULÁRIS (KÖR) POLARIZÁCIÓ

M (Villamos mérnöki definíció az irányra) *Jobbkéz szabály.* Ha a hüvelyk ujj a terjedési irány, akkor a többi ujj a pozitív cirkulációs irányt adja.



15.3. ábra. Jobbkéz szabály

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad (15.14)$$

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - \beta z \pm 90^\circ) = \pm E_0 \sin(\omega t - \beta z) \quad (15.15)$$

Ekkor a vektor végpontja körvonalat jár be.

ÁLTALÁNOS POLARIZÁCIÓ

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \quad (15.16)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta z - \delta) \quad (15.17)$$

Még $E_{x0} = E_{y0}$ esetén is általános helyzetű elipszist jár be a vektor.

M (Elipszometria) Az anyagról visszaverődő elektromágneses hullám polarizáció változásából következtet az anyag tulajdonságaira.

15.6 SÍKHULLÁM ÁLTAL SZÁLLÍTOTT TELJESÍTMÉNY

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (15.18)$$

$$H_y = \frac{E_0}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi) \quad (15.19)$$

φ a fázistolás, mely kifejezhető időként is és távolságként is, attól függően mit emelünk ki a $\cos$ argumentumából.

$$S(z, t) = E_0(z, t)H_y(z, t) = \frac{E_0^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \varphi)$$

Ennek időbeli átlaga:

$$S(z) = \frac{E_0^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z} \cos \varphi \quad (15.20)$$

A csillapodás úgy jön létre (ábrázolásban), hogy az S vektortér vonalsűrűsége csökken – a pynting vektor elnyelődik a veszteséges közegben.

HATÁSOS TELJESÍTMÉNY a z_0 helyen levő A nagyságú felületen.

$$P = \int_A \bar{S} d\bar{A} = \int_A S dA = S(z_0) \cdot A$$

$$P(z_0) = A \frac{E_0^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z_0} \cos \varphi$$

Ugyanez komplex poynting vektorral

$$E_{xk} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$H_{yk} = \frac{E_0}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \frac{E_0}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi}$$

$$S_k(z) \triangleq \frac{1}{2} E_{xk} \cdot H_{yk}^* = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} e^{j\varphi}$$

$$S(z) = \Re \{S_k(z)\} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} \cos \varphi$$

$$\boxed{\bar{S}_k = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^*}$$

(15.21)

15.7 SÍKHULLÁM JÓ VEZETŐBEN

M (Jó vezető)

$$j_{\text{vezetési}} = E\sigma \gg E\omega\varepsilon = j_{\text{eltolási}}$$

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \quad (15.22)$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\varepsilon\sigma} = \frac{1+j}{\cancel{\sqrt{2}}} \sqrt{2\pi f\mu\sigma} = \underbrace{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}_{\alpha} + j \underbrace{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}_{\beta} \quad (15.23)$$

BEHATOLÁSI MÉLYSÉG

M (Emlékeztető) Koncentrált paraméterű hálózatoknál (pl. Kondenzátor tranziens jelenségeknél) megismert $e^{-\frac{t}{\tau}}$ kifejezésekben a τ egyfajta időállandó. Ehhez hasonlóan definiálhatjuk a „hosszállandót”, ez a behatolási mélység.

$$e^{-\alpha z} = e^{-\frac{z}{\delta}}$$

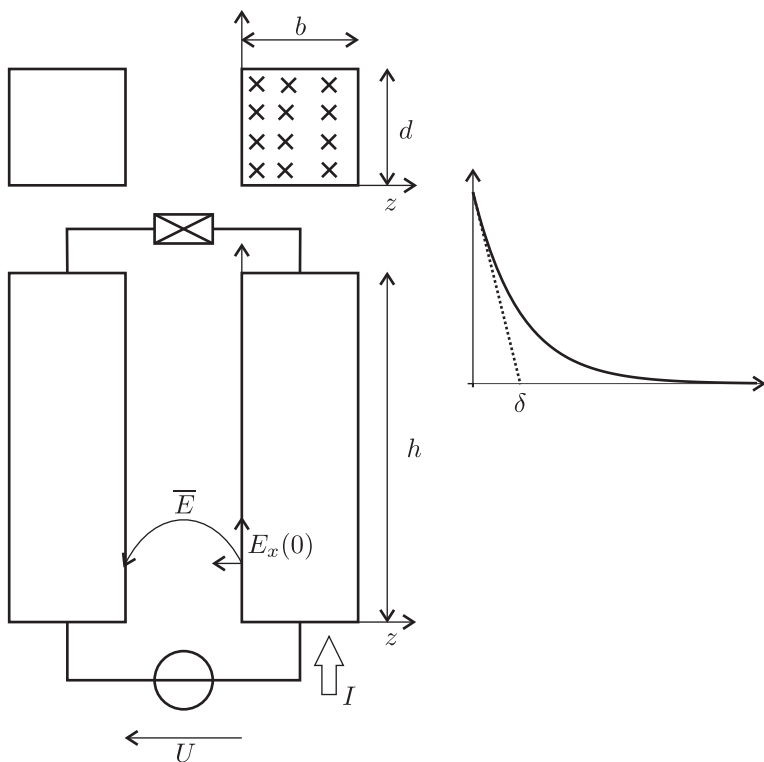
Ahol δ a behatolási mélység.

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\delta} + \frac{j}{\delta} \quad (15.24)$$

$$\frac{\bar{\gamma}}{\delta} = \bar{Z}_0 \quad (15.25)$$

VEZETŐK VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ELLENÁLLÁSA

M (Ismétlés) [5.3.ábra 26.oldal]



15.4. ábra. Vezetők váltakozó áramú ellenállása

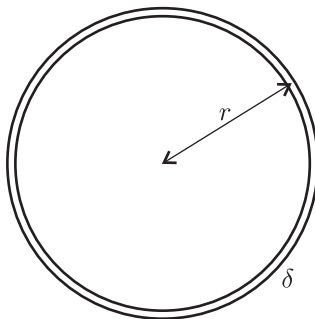
$$\begin{aligned}
 E_x(z) &= E_x(0)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \\
 H_y(z) &= \frac{E_x(0)}{Z_0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \\
 I &= \int_0^\infty \sigma E_x v \, dz = \sigma b \int_0^\infty E_x(0)e^{-\bar{\gamma}z} \, dz \\
 E_x(0) &= \frac{\bar{\gamma}}{\sigma b} \bar{I} \\
 P + jQ &= \frac{1}{2} E_x(0) H_x^*(0) \cdot bh = \frac{1}{2} E_x(0) \frac{E_x^*(0)}{Z_0^*} bh = \frac{1}{2} \frac{|E_x(0)|^2}{Z_0^*} bh = \\
 &= \frac{bh}{2} \frac{|\bar{\gamma}|^2 |\bar{I}|^2}{\sigma b \frac{\bar{\gamma}^*}{\sigma}} = \frac{1}{2} \frac{h \bar{\gamma}}{\sigma b} |\bar{I}|^2 = \frac{1}{2} (1+j) \frac{h}{\sigma q \delta} |\bar{I}|^2 \\
 P &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{h}{\sigma b \delta}}_R I^2
 \end{aligned}$$

A keresztmetszet $b\delta$ az ellenállás kifejezésben. Mintha csak δ mélységig folyna áram, de ott konstans(helyfüggetlen).

[M] (Vigyázat) Ez nem azt jelenti, hogy „mélyebben” nem folya áram. A behatolási mélység rézhuzalra kiszámítható az alábbi összefüggéssel:

$$\delta_{Cu}^{mm} = \sqrt{\frac{2\rho_{Cu}}{\omega\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = \frac{66.6}{\sqrt{fHz}} \quad (15.26)$$

Ha $d \gg \sigma$, akkor egyenáramú ellenállással azonos.



15.5. ábra. Hengeres vezető

Hengeres vezető Ha $\delta \ll r_0$ a gyűrű területe számít (δr_0), ha $\delta \gg r_0$, akkor egyenáramú ellenállással azonos.

[M] „Magányos” hengeres vezetőként kell felfogni, ha nincs a közelben másik vezető, akkor alkalmas az ellenállás számítására a kifejezés.

16 ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK GERJESZTÉSE

$$\text{rot } \overline{H} = \overline{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \overline{B} = 0$$

$$\text{div } \overline{D} = \rho$$

A négy Maxwell egyenletből ρ és $\overline{j}$ adott, ezek a gerjesztés.

- A III. Maxwell egyenlet felhasználásával:

$$\boxed{\overline{B} = \text{rot } \overline{A}} \quad \text{Vektorpotenciál} \quad (16.1)$$

- A II. Maxwell egyenletből:

$$\begin{aligned} \text{rot } \overline{E} &= -\text{rot } \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \\ \text{rot } \left(\overline{E} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \right) &= \overline{A} \\ \overline{E} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} &= -\text{grad } \varphi \\ \boxed{\overline{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}} & \quad (16.2) \end{aligned}$$

- Az I. Maxwell egyenletből:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \overline{A} &= \mu \overline{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \right) \\ \text{grad div } \overline{A} - \Delta \overline{A} &= \mu \overline{j} - \mu \varepsilon \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \overline{A}}{\partial t^2} \\ \text{div } \overline{A} &=? \quad (\text{Mértékválasztás}) \\ \text{grad } \left(\underbrace{\text{div } \overline{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_0 \right) &= 0 \\ \text{div } \overline{A} &= -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{Lorentz mérték}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j}} \quad (16.3)$$

Az így kapott inhomogén hullámegyenlet két speciális esete:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \Delta \bar{A} = \mu \bar{j} \quad \text{Poisson egyenlet}$$

$$\bar{j} = 0 \rightarrow \Delta \bar{A} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \quad \text{Hom. hullám egyenlet}$$

o A IV. Maxwell egyenletből

$$\varepsilon \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

$$-\varepsilon \Delta \varphi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{A} = \rho$$

$$-\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad (16.4)$$

Az így kapott inhomogén hullámegyenlet két speciális esete:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{Poisson egyenlet}$$

$$\bar{j} = 0 \rightarrow \Delta \varphi = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{Hom. hullám egyenlet}$$

M (Amit tudni kell a fentiekből) A fenti levezetésből a következő kapcsolatot kell észrevennünk:

$$I. \quad \Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$II. \quad \Delta \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j}$$

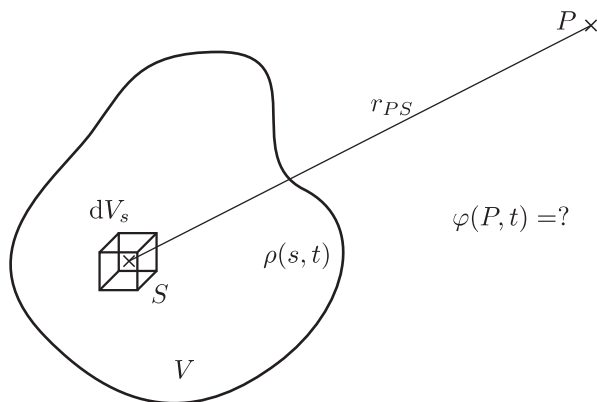
$$III. \quad \bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$IV. \quad \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$$

$$V. \quad \operatorname{div} \bar{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

- I Oldjuk meg a skalárpotenciálra és a
 II vektorpotenciálra vonatkozó inhomogén hullámegyenletet
 III Ha ezek meglesznek, akkor a villamos teret
 IV és az indukciót meg lehet határozni.
 V A két hullámegyenletet a Lorentz mérték köti össze.

16.1 AZ INHOMOGÉN HULLÁMEGYENLET MEGOLDÁSA



16.1. ábra. Retardált potenciál

$$\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(s, t - \frac{r_{PS}}{v})}{r_{PS}} dV_S \quad (16.5)$$

A tértöltésváltozás hatásának(potenciál) idő kell, hogy megtegye az utat(r_{PS}). Ezt nevezzük retardált(késleltetett) potenciál.

$$\bar{A}(P, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}(s, t - \frac{r_{PS}}{v})}{r_{PS}} dV_S \quad (16.6)$$

gerjesztés $\rightarrow$ segédmenység $\rightarrow$ tér

$$\rho \rightarrow \varphi \rightarrow \bar{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{j} \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B} = \text{rot } \bar{A}$$

Teljesül-e a Lorentz mérték? Igen, ha ρ és $\vec{j}$ eleget tett a folytonossági egyenletnek

Lehetőségek

1. ρ és $\vec{j}$ eleget tesz a folytonossági egyenletnek.

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ilyenkor a Lorentz „feltétel” automatikusan teljesül.

- 2.

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\text{Szinuszos eset: } \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + j\omega \varepsilon \mu \varphi = 0$$

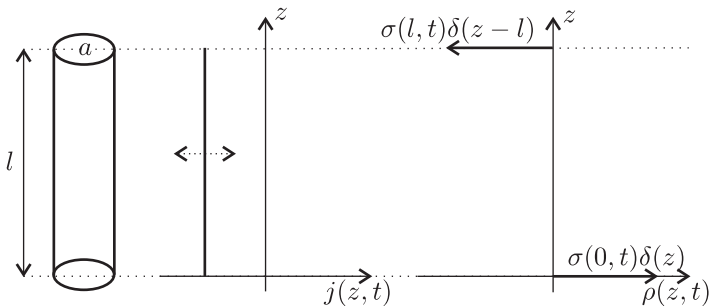
$$\varphi = -\frac{1}{j\omega \varepsilon \mu} \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{j\omega \varepsilon \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - j\omega \vec{A}$$

16.2 A HERTZ DIPÓLUS

l hosszúságú a keresztmetszetű vezetékdarab, amiben szinuszos áram folyik.



16.2. ábra. Hertz-dipólus

ÁRAMSŰRŰSÉG $j(z, t)$ a hely függvényében nem változik, ellenben időben koszinuszos.

$$j(z, t) = \begin{cases} j_0 \cos \omega t & 0 < z < l \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$j(z, t) = j_0 \cos \omega t (\varepsilon(z) - \varepsilon(z - l))$$

M Az időben koszinuszosan változó áramsűrűséget úgy lehet elképzelni, mint szállító közeg, amely átviszi az alsó és felső felületen levő töltéseket.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} j_0 \cos \omega t \cdot (\varepsilon(z) - \varepsilon(z - l)) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -j_0 \cos \omega t \cdot \delta(z) + j_0 \cos \omega t \cdot \delta(z - l) \\ \rho &= -\frac{j_0}{\omega} \sin \omega t \cdot \delta(z) + \frac{j_0}{\omega} \sin \omega t \cdot \delta(z - l) \\ \sigma(0, t) &= -\frac{j_0}{\omega} \sin \omega t \\ \sigma(l, t) &= \frac{j_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

M (Nyitott rezgőkör) így is lehet értelmezni a Hertz-dipólt.

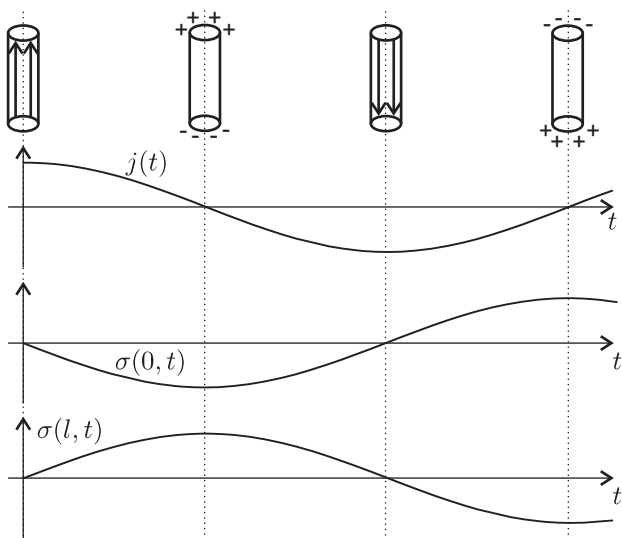
M (Másik értelmezés) Elektromos szempontból egy dipólus, melynek nyomatéka szinuszosan változik.

SKALÁRPOTENCIÁL

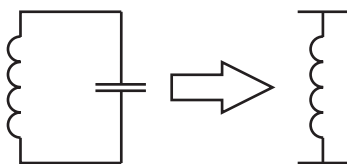
$$\begin{aligned} Q(0, t) &= -\frac{I_0}{\omega} \sin \omega t \\ Q(l, t) &= \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t \\ \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{\frac{I_0}{\omega} \sin \omega(t - \frac{|\bar{r} + \bar{l}|}{v})}{|\bar{r} - \bar{l}|} - \frac{\frac{I_0}{\omega} \sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r} \right] \end{aligned} \quad (16.7)$$

A következőkben absztrakciót alkalmazunk hasonlóan a dipólushoz:

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ I_0 \rightarrow \infty}} l \cdot I_0 = \text{konstans}$$



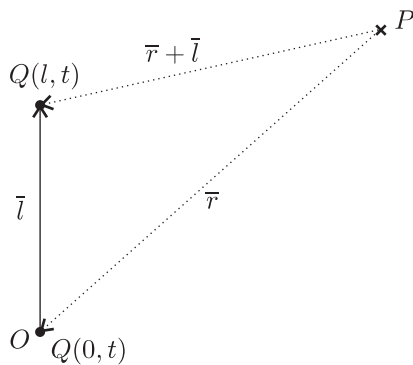
16.3. ábra. Hertz-dipólus időbeli változásai



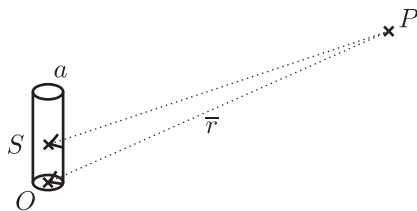
16.4. ábra. Nyitott rezgőkör

Az így kapott konstans az antenna nyomaték.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ I_0 \rightarrow \infty}} \varphi(P) &= \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon\omega} \text{grad}_O \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r} \\ &= -\frac{I_0 l}{4\pi\epsilon\omega} \text{grad}_P \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r} \end{aligned}$$



16.5. ábra. Hertz-dipólus skalárpotenciálja



16.6. ábra. Hertz-dipólus vektorpotenciálja

VEKTORPOTENCIÁL

$$\begin{aligned}
 A(P, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(s, t - \frac{r_{PS}}{v})}{r_{PS}} dV_S = \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^l \frac{j_0 \cos \omega(t - \frac{r_{PS}}{v}) \cdot \vec{e}_z}{r_{PS}} a dz \\
 \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ I_0 \rightarrow \infty}} A(P, t) &= \frac{\mu I_0 \vec{l}}{4\pi} \cdot \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{v})}{r}
 \end{aligned} \tag{16.8}$$

Lorentz-feltétel teljesülése A két térmennyiség kielégíti a Lorentz feltételt.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\mu I_0 \vec{l}}{4\pi} \cdot \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{v})}{r} - \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{I_0 l}{4\pi \varepsilon \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r} &= 0
 \end{aligned}$$

Gömbi koordináta-rendszerben :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (16.9)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (16.10)$$

M A vektorpotenciál felbontása gömbi koordináta-rendszerben :

$$A_r = A \cos \vartheta$$

$$A_{\vartheta} = -A \sin \vartheta$$

17. ÓRA

A Hertz-dipólus pontszerű objektum. Ez az absztrakció akkor lehetséges az l hosszúságú a keresztmetszetű egyenes vezetékdarabra, amiben I_0 csúcsértékű áram folyik, ha

$$\circ l \ll \lambda$$

$$\circ r \gg l$$

A HERTZ-DIPÓLUS TELJES TERE

$$E_r = \frac{I_0 l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{2}{r^2} \left[1 - \frac{j}{\beta r} \right] \cos \vartheta \cdot e^{-j\beta r} \quad (16.11)$$

$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{j\beta}{r} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 r^2 - \frac{j}{\beta r}} \right] \sin \vartheta \cdot e^{-j\beta r} \quad (16.12)$$

$$E_{\varphi} = 0 \quad (16.13)$$

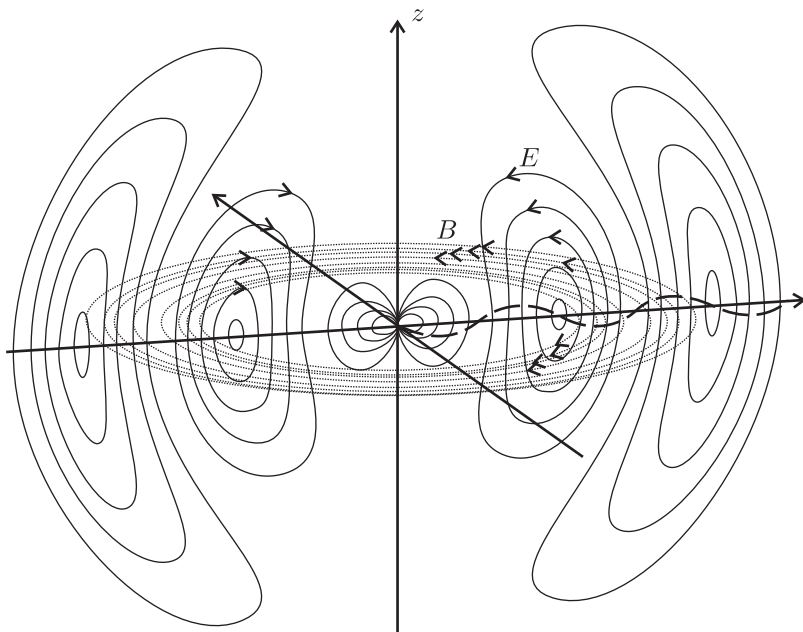
$$H_r = 0 \quad (16.14)$$

$$H_{\vartheta} = 0 \quad (16.15)$$

$$H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi} \frac{j\beta}{r} \left[1 - \frac{j}{\beta r} \right] \sin \vartheta \cdot e^{-j\beta r} \quad (16.16)$$

M (A fenti egyenletekkel kapcsolatban) néhány megjegyzés:

- Feltételezzük, hogy a dipól szabadtérben van $\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)$;
- Jobbsodrású rendszerben a koordináták sorrendje r, ϑ, φ ;
- Az egyenletekből látható, hogy a H vonalak körök és E tere pedig forgásszimmetrikus;
- Ezek a kifejezések komplex csúcsértéket adnak, valós függvényt akkor kapunk belőlük, ha megszorozzuk $e^{j\omega t}$ -vel és az eredmény valós részét képezzük;
- A kifejezések végén lévő $e^{-j\beta r}$ jelentése: r + irányba haladó hullám;
- Az egyes komponensek felbonthatók $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$ részkomponensekre.



16.7. ábra. A Hertz-dipólus erővonalképe

Közel tér Azok a részkomponensek (hatások), amik r hatványozása miatt a távoli tér alakulásában már nem érzékelhetők.

- Sztatikus tér $\frac{1}{r^3}$: Az elektrosztatikus dipólus teréhez hasonlóan;
- Indukciós tér $\frac{1}{r^2}$: Az áram által létrehozott mágneses tér. A villamos tér a II. Maxwell egyenlet miatt jön létre.

Sugárzó tér (Távoltér) Ezek a komponensek $\frac{1}{r}$ -es tényezővel szerepelnek. Az így kialakuló tér nagy távolságokban

$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{j\beta}{r} \sin \vartheta \cdot e^{-j\beta r} \quad (16.17)$$

$$H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi} \frac{j\beta}{r} \sin \vartheta \cdot e^{-j\beta r} \quad (16.18)$$

[M] A j tag a távltér kifejezésében azt jelenti, hogy a gerjesztő áramhoz (I_0) képest $+90^\circ$ fázistolással jelenik meg a villamos és mágneses tér. A továbbiakban ezt elhagyjuk, új kezdőfázist választunk.

$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\beta}{r} \sin \vartheta \cdot \cos(\omega t - \beta r) \quad (16.19)$$

$$H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi} \frac{\beta}{r} \sin \vartheta \cdot \cos(\omega t - \beta r) \quad (16.20)$$

TÁVOLTÉR TULAJDONSÁGAI $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ behelyettesítéssel a csúcscérték

$$E_{\vartheta}(r, \vartheta, t) = \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \vartheta \quad (16.21)$$

$$H_{\varphi}(r, \vartheta, t) = \frac{1}{2} I_0 \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \vartheta \quad (16.22)$$

I. A hullám fázissebessége $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

II. $\overline{E}$, $\overline{H}$ és a terjedés iránya jobbsodrású rendszert alkot $\overline{E} \perp \overline{H} \perp \vec{k}$

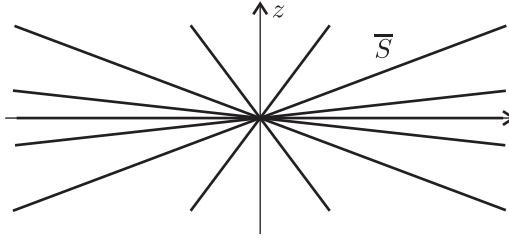
III. $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

Mint látható, a Hertz-dipólus távoltere síkhullám tulajdonságokat mutat.

AZ ANTENNA ÁLTAL ELSUGÁRZOTT TELJESÍTMÉNY

$$\begin{aligned} E_{\vartheta}(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \vartheta \cdot \cos(\omega t - \beta r) \\ H_{\varphi}(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{2} I_0 \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \vartheta \cdot \cos(\omega t - \beta r) \\ S(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{4} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2(\omega t - \beta r) \\ S_{\text{időátlag}}(r, \vartheta) &= \frac{1}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (16.23)$$

A kisugárzott teljesítmény a poynting vektor időbeli átlagának felületi integrálja



16.8. ábra. Poynting vektorok eloszlása

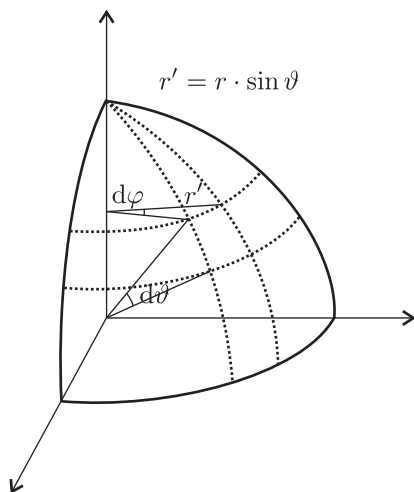
$$\begin{aligned}
 P &= \oint_A \bar{S} \, d\bar{A} = \oint_A S \, dA \quad (\text{Gömb felszínre}) \\
 P &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\
 &= \frac{2\pi}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta}_{\int f'(x) \cdot f(x) \, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} = \dots = \frac{4}{3}} \\
 &= \frac{\pi}{3} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2
 \end{aligned}$$

Látható, hogy a kifejezés hasonlít a szinuszos hálózatoknál ismert ellenállás által felvett teljesítmény számítási módjára. Továbbá igaz, hogy I_0 csúcserő, és a közepső kifejezés mértékegysége Ω .

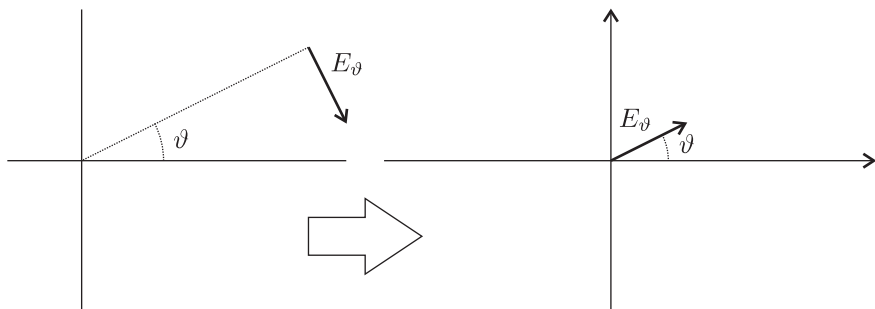
$$\boxed{R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad P = \frac{1}{2} R_s I_0^2} \quad (16.24)$$

Az így definiált R_s a sugárzási ellenállás. Ez egy fiktív ellenállás, ami annyi teljesítményt disszipálna I_0 áram hatására, mint amennyit az antenna elsugároz ugyanekkora áram hatására. Sok esetben „valódi” ellenállásként viselkedik (például az adó által elsugárzott zaj). Használják ezen kívül ugyanezt az értéket (mint valódi ellenállás) az adó bemérésére, tesztelésére.

IRÁNYKARAKTERISZTIKA E_ϑ irányfüggését fejezi ki a távotérben. Adott távolságban (r_0) kell mérni.



16.9. ábra. Integrálás gömb felszínre

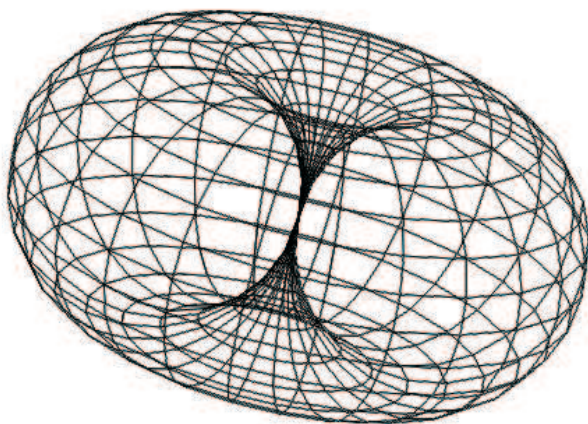


16.10. ábra. Iránykarakterisztika rajzolás

$$E_{\vartheta} = \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \vartheta \quad (16.25)$$

$$E_{\vartheta}(\vartheta = 90^\circ) = E_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \quad (16.26)$$

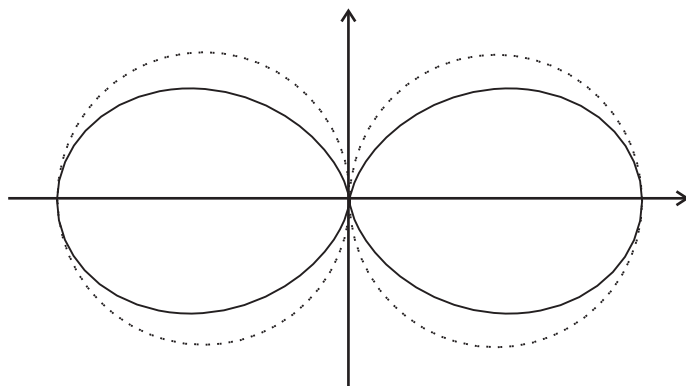
$$E_{\vartheta} = E_{\max} \sin \vartheta \quad (16.27)$$



16.11. ábra. Hertz-dipólus iránykarakterisztikája

TELJESÍTMÉNY IRÁNYKARAKTERISZTIKA A poynting vektor alapján

$$S_{\vartheta} = S_{\max} \sin^2 \vartheta \quad (16.28)$$



16.12. ábra. A Hertz-dipólus teljesítmény iránykarakterisztikája

IRÁNYHATÁS

$$D \triangleq \frac{S_{\max}}{S_{\text{átlag}}} = \frac{S_{\max}(r)}{\frac{P_{\text{elsugázzott}}}{4\pi r^2}} = \frac{\text{irány szerinti maximális } S}{\text{átlagos } S} \quad (16.29)$$

Izotrop sugárzó esetén az irányhatás $D = 1$. A Hertz-dipólra

$$D = \frac{\frac{1}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2}}{\frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2} 4\pi r^2 \approx 1,5$$

18. ÓRA

NYERESÉG

$$G \triangleq \frac{S_{\max}}{\frac{P_{\text{össz}}}{4\pi r^2}} = \frac{\text{irány szerinti maximális } S}{\frac{\text{összes felvett teljesítmény}}{\text{gömb felszíne}}} \quad (16.30)$$

Antennák jellemzői

- Sugárzási ellenállás;
- Iránykarakterisztika;
- Teljesítmény iránykarakterisztika;
- Irányhatás;
- Nyereség;

17 DISZPERZIÓS ÖSSZEFÜGGÉSEK

Terjedési együttható (γ) és a frekvencia kapcsolata. Szűkebb értelemben a fázis-tényező (β) és a frekvencia kapcsolata. (diszperzió $\sim$ szétfolyás)

Távvezetéseknél

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \rightarrow \beta(\omega) \quad (17.1)$$

Síkhullám veszteséges közegben

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \rightarrow \beta(\omega) \quad (17.2)$$

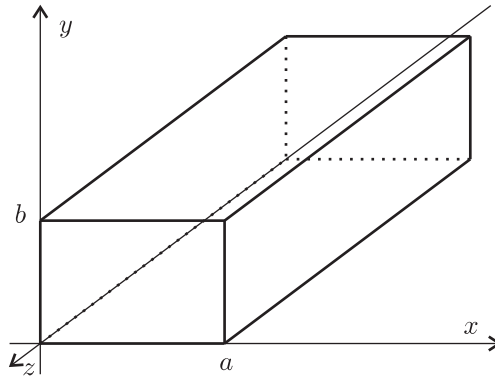
Síkhullám ideális közegben

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \rightarrow \beta(\omega) = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (17.3)$$

Ha a fázissebesség (v_f) frekvenciafüggetlen, azaz a fázistényező arányos a frekvenciával, akkor a hullámvezetés diszperziómentes.

M (Szétfolyás értelmezése) Az átmenő jel Fourier-sorba fejthető, melynek egyes komponensei a frekvenciafüggő fázissebességnek megfelelően haladnak át a közegen. Ennek eredményeként az összetevők nem fázisban érkeznek meg (egymáshoz képest).

18 CSŐTÁPVONALAK



18.1. ábra. Csőtépvonal

A Maxwell egyenleteken descartes derékszögű koordináta-rendszerben, szinuszos esetben és z irányba terjedő hullám esetén a következő egyszerűsítések végezhetők el:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \\ \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\gamma & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \gamma^2 \end{array}$$

Az egyszerűsítések elvégzése után a komponensek:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y &= j\omega\varepsilon E_x & (4) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y &= -j\omega\mu H_x \\
 (2) \quad -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon E_y & (5) \quad -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\
 (3) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon E_z & (6) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z
 \end{aligned}$$

Az (1), (2), (4), (5) egyenleteket átrendezve

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \left[j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \\
 H_y &= \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \left[-j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \\
 E_x &= \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \left[-j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \\
 E_y &= \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \left[j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]
 \end{aligned}$$

M Az egyenletekből látszik, hogy

- Mindegyik komponens kiszámítható ismert E_z és H_z mellett;
- Szuperpozíció módon jelenik meg E_z és H_z hatása. Mintha lenne olyan tér, ami csak E_z -t, és egy olyan része, ami csak H_z -t tartalmazza (Ezt még nem bizonyítottuk, csak sejtjük);

18.1 ALAPTEREK

TE MÓDUS

$$E_z = 0$$

A villamos térnek nincs terjedés irányú (longitudinális) komponense. Ez az úgynevezett transzverzális elektromos módus. Ekkor a villamos tér benne van a transzverzális síkban.

TM MÓDUS

$$H_z = 0$$

A longitudinális mágneses komponens zérus, ekkor a mágneses tér benne van a transzverzális síkban

$$\Delta \bar{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta E_z = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

M (3) és (6) egyenletből is kijön a vektoriális hullámeqyenlet.

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega \varepsilon \mu) E_z = 0$$

Ezt a parciális differenciál egyenletet szorzat szeparálással oldjuk meg, tehát keresünk egy $E_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ alakot.

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) XY = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{-k_y^2} + \underbrace{(\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu)}_{\text{konstans}} = 0$$

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = k_x^2 + k_y^2$$

A harmadik tag konstans. Mivel az első tag csak x -től a második tag pedig csak y -től függ, így azok nem képesek egymást úgy kompenzálni, hogy az egyenlet mindig zérus legyen, kivéve ha mindkét tag konstans. k_x és k_y a peremfeltételekből jön ki, vagyis a hullám vezetettsége határozza meg a diszperziót.

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 X \rightarrow X(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x \quad (18.1)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 Y \rightarrow Y(y) = D \sin k_y y + F \cos k_y y \quad (18.2)$$

$$E_z = C \sin k_x x \cdot \sin k_y y \quad (18.3)$$

M Később látni fogjuk, hogy a kihúzott tagok nem tesznek eleget a peremfeltételeknek.

18.2 PEREMFELTÉTELEK

$$E_z(x, y = 0) = 0 \quad (\text{cos nem jó!})$$

$$E_z(x, y = b) = 0$$

↓

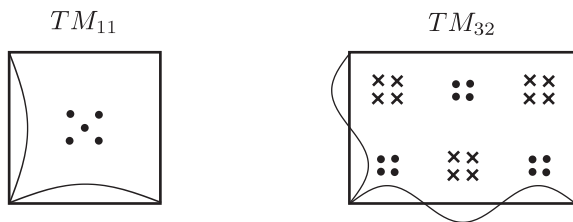
$$k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad n = 1, 2, 3 \dots \quad (18.4)$$

$$E_z(x = 0, y) = 0 \quad (\text{cos nem jó!})$$

$$E_z(x = a, y) = 0$$

↓

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad m = 1, 2, 3 \dots \quad (18.5)$$



18.2. ábra. TM_{11} és TM_{32} módusok E erővonalképe

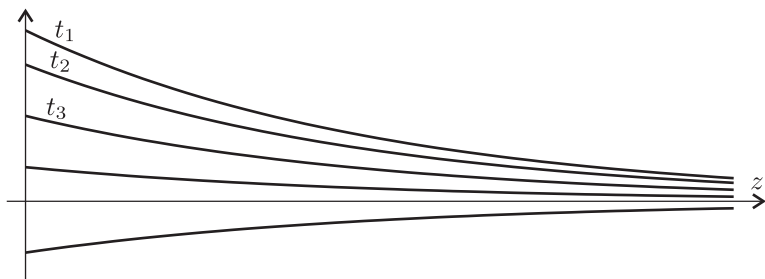
18.3 DISZPERZIÓS EGYENLET

A TE_{mn} és a TM_{mn} módus diszperziós egyenlete is:

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ \gamma &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \varepsilon \mu} \end{aligned} \quad (18.6)$$

18.4 HATÁRFREKVENCIA

$$\omega^2 \varepsilon \mu \ll \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \rightarrow \gamma = \alpha \quad \Re \{ e^{j\omega t} e^{-\alpha z} \} = e^{-\alpha z} \quad (18.7)$$



18.3. ábra. Teljes visszaverődés

$E_{\text{transzverzális}}$ és $H_{\text{transzverzális}}$ között 90° a fáziskülönbség, ilyenkor nincs hatásos teljesítményszállítás, teljes visszaverődés.

$$\omega^2 \varepsilon \mu \gg \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \rightarrow \gamma = j\beta \quad \Re \{ e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \} = \cos \omega t - \beta z \quad (18.8)$$

Csillapítatlan terjedés jön létre (ideális vezető esetén).

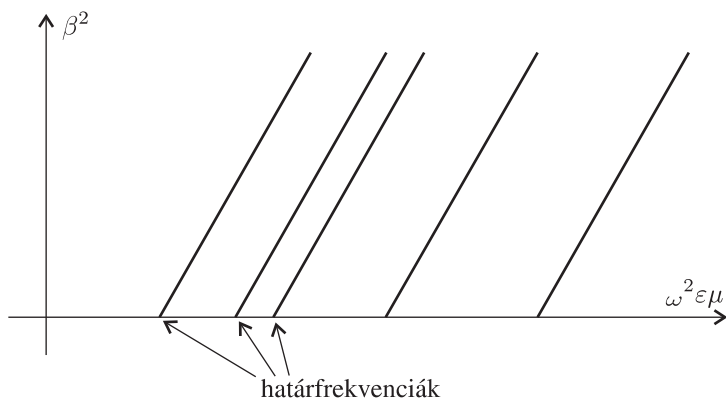
Határesetben $\gamma = 0$

$$\omega_c^2 \varepsilon \mu = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (18.9)$$

A meghatározott frekvencia a határfrekvencia (*critical, cut-off*). Egy módus akkor terjed, ha az üzemi (gerjesztés) frekvencia nagyobb, mint a módus határfrekvenciája. Ezen kívül a módusnak megfelelő antenna is szükséges.

P (Csőtápvonal) Csőtápvonal adatai: $a = 2b$; $a = 6\text{cm}$; $\varepsilon_r = 1$. Számítsuk ki néhány módus határhullámhosszát és határfrekvenciáját!

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2 &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \varepsilon_r \mu_r \Big|_{\mu_r=1} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ \lambda_c &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}} \\ \lambda_c^{mn} \Big|_{\text{Adatok}} &= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n}{a} \right)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{m^2 + 4n^2}} \end{aligned} \quad (18.10)$$



18.4. ábra. Diszperzió
11. táblázat. Csőtápvonal példa megoldásai

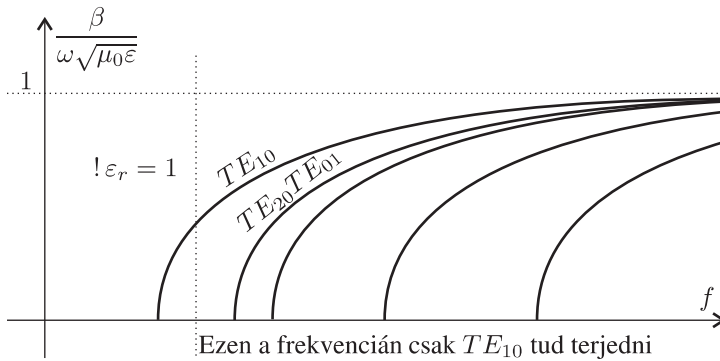
Módus	λ_c	f_c
TE_{10}	$2a$	2.5GHz
TE_{20}, TE_{01}	a	5GHz
TE_{30}	$0.66a$	7.58GHz
TE_{11}, TM_{11}	$0.89a$	5.62GHz
TE_{12}, TM_{12}	$0.49a$	10.2GHz
TE_{21}, TM_{21}	$0.71a$	7.04GHz

M Szinte mindig az alaplómódust akarjuk gerjeszteni !

19. ÓRA

19 CSŐTÁPVONALAK A GYAKORLATBAN

Benkő Péter



18.5. ábra. Diszperzió

20. ÓRA

19.1 ÖSSZEFOGLALÁS

- E_x, E_y, H_x, H_y kifejezhetők E_z -vel és H_z -vel;
- TE módus, ha $E_z = 0$ és TM módus, ha $H_z = 0$;
- E_z és H_z a vektoriális hullámegyenletből adódik;
- A diszperziós kifejezés

$$\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2 = k_x^2 + k_y^2$$

k_x és k_y a peremfeltételekből adódnak: A villamos térerősség érintő irányú komponense a fém falnál zérus.

○

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n, m = 1, 2, 3 \dots$$

- Terjedés esetén γ tiszta képzetes ($\mu_r = 1$);

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \epsilon_r \mu_r \bigg|_{\mu_r=1} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

Ahol λ_g a csőben mérhető hullámhossz és λ a szabadtéri hullámhossz.

- Ha $\epsilon_r = 1$, akkor a vezetett hullámhossznak nagyobbak kell lennie, mint a szabadtéri hullámhossz (dielektrikumban mindig kisebb volt λ_g);

19.2 TE MÓDUS KOMPONENS EGYENLETEI

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-j\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} & H_x &= \frac{-\gamma}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} & H_y &= \frac{-\gamma}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

A vektoriális hullámegyenletből

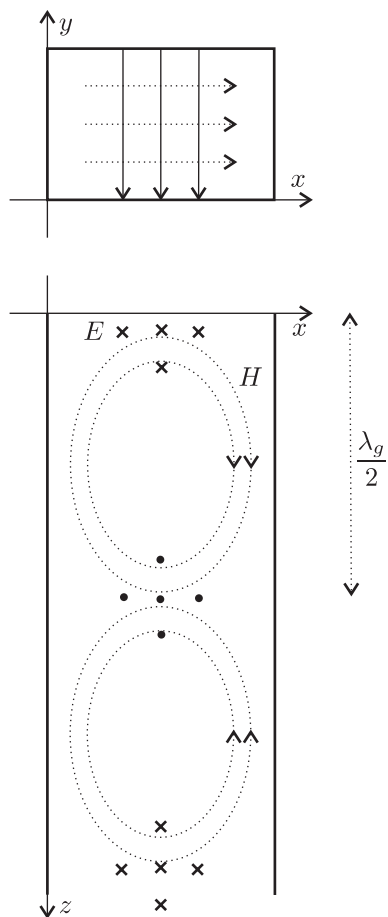
$$\begin{aligned} E_x &= C \cdot \frac{j\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{n\pi}{b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \\ E_y &= -C \cdot \frac{j\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{m\pi}{a} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \\ E_z &= 0 \\ H_x &= C \cdot \frac{\gamma}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{m\pi}{a} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \\ H_y &= C \cdot \frac{\gamma}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \frac{n\pi}{b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \\ H_z &= C \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

Az egyenletekre a peremfeltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} E_x(x, y = 0) &= 0 \\ E_x(x, y = b) &= 0 \\ E_x(x = 0, y) &= 0 \\ E_x(x = a, y) &= 0 \end{aligned}$$

A diszperziós egyenletből levezethető, hogy valós γ esetén nincs teljesítményszállítás, mivel $(E_x$ és $E_y)$ 90° fáziskülönbségben van $(H_x$ és $H_y)$ -al. Képzetes γ esetén van teljesítményszállítás. A fenti egyenletek TE_{10} módus esetén ($\gamma = j\beta$)

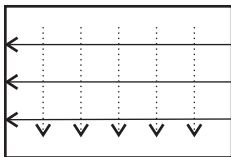
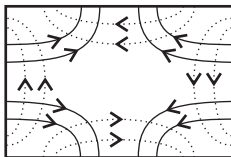
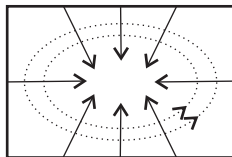
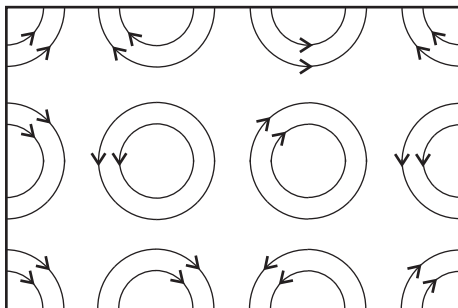
$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= -C \cdot \frac{j\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu + \beta^2} \frac{\pi}{a} \cdot \sin \frac{\pi}{a} x \\ E_z &= 0 \\ H_x &= C \cdot \frac{j\beta}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \frac{\pi}{a} \cdot \sin \frac{\pi}{a} x \\ H_y &= 0 \\ H_z &= C \cdot \cos \frac{\pi}{a} x \end{aligned}$$



19.1. ábra. TE_{10} módus erővonalképe

19.3 A CSŐ ÁLTAL SZÁLLÍTOTT TELJESÍTMÉNY

M A számítások TE_{10} módusra végeztük.

TE_{01}  TE_{11}  TM_{11}  TM_{32} 

19.2. ábra. További módusok

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{\text{komplex}} &= \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x^* & H_y^* & H_z^* \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{(E_y H_z^* i - E_x H_z^* j)}_{\text{Meddő telj.}} + \underbrace{(E_x H_y^* - E_y H_x^*) k}_{0, \text{ ha } n = 0}
 \end{aligned}$$

A meddő teljesítmény elhagyása után:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{\text{komplex}} &= -\frac{1}{2} E_y H_x^* = \\
 &= \frac{1}{2} C \frac{j\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-j\beta z} \cdot C \frac{-j\beta}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \cdot e^{j\beta z} = \\
 &= \frac{1}{2} C^2 \frac{\beta\omega\mu}{(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \int_A \Re \{ \bar{S}_{\text{komplex}} \} d\bar{A} = \\
&= \int_0^a \frac{1}{2} C^2 \frac{\beta \omega \mu}{(\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2)^2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cdot b dx = \\
&= \frac{1}{2} C^2 \frac{\beta \omega \mu}{(\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2)^2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{ab}{2} \\
E_{\max} &= \left| E_y \left(x = \frac{a}{2} \right) \right| = C \frac{\omega \mu}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \frac{\pi}{a} \\
\frac{E_{\max}^2}{(\omega \mu)^2} &= \left(\frac{C}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \frac{\pi}{a} \right)^2 \\
P &= \frac{1}{4} E_{\max}^2 \frac{\beta \omega \mu}{(\omega \mu)^2} \cdot ab = \frac{1}{4} E_{\max}^2 \frac{\beta}{\omega \mu} \cdot ab
\end{aligned}$$

P R-100-as csőátvonal adatai: $a = 22.86 \text{ mm}$, $b = 10.16 \text{ mm}$ Mekkora az átvihető teljesítmény $1.5 f_c$ -n?

$$\begin{aligned}
f_c^{10} &= 6.56 \text{ GHz} \\
1.5 f_c &= 9.84 \text{ GHz} \\
\beta &= 153 \text{ m}^{-1} \\
E_{\max} &= 30 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (\text{Átütési szilárdság}) \\
P &= 1.029 \text{ MW}
\end{aligned}$$

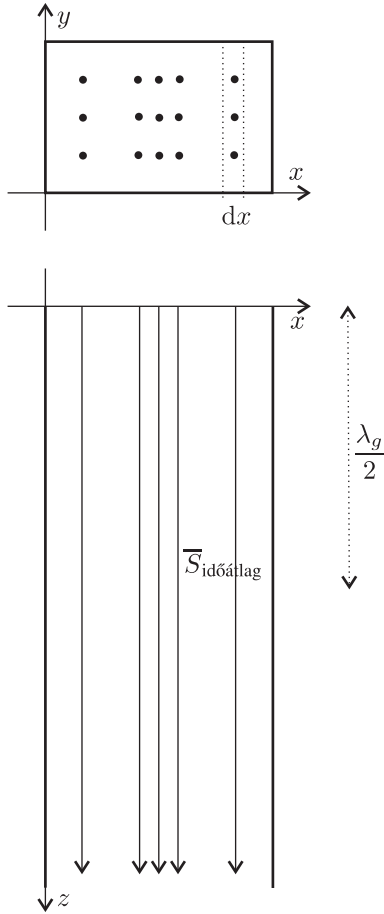
4-es biztonsági tényező miatt ez 250 kW-ra csökken. Továbbá a fal melegedése is korlátoz minket.

$$\begin{aligned}
P_{T_{max}=42^\circ \text{C}} &= 1 \text{ kW} \\
P_{T_{max}=110^\circ \text{C}} &= 5 \text{ kW}
\end{aligned}$$

21. ÓRA

20 ÜREGREZONÁTOR

Ha fémlapokat teszünk a csőátvonalba olyan helyre, ahol a villamos térnek nem lesz ezáltal érintőleges komponense és utána a mágneses teret $\frac{\lambda_g}{4}$ -el eltoljuk (hogyan a mágneses tér erővonalai záródjanak), akkor megkapjuk az üregrezonátor módus erővonalképét. A térbeli 90° -os fázistolás miatt időbeli 90° fázistolás is megjelenik.



19.3. ábra. Teljesítmény áramlása a csőtápvonalban

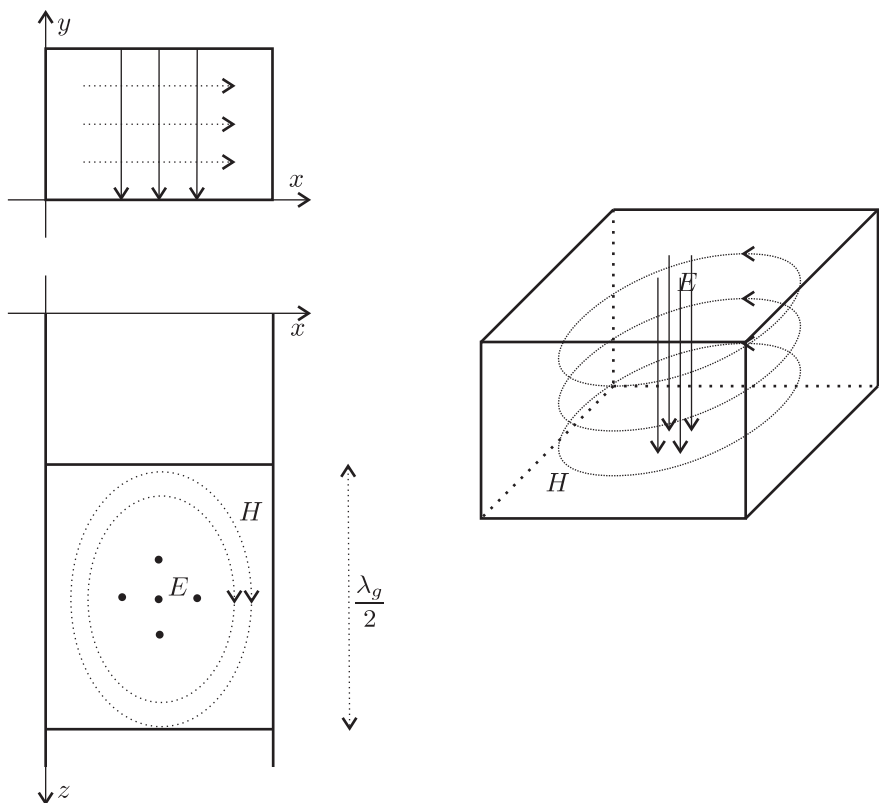
Jelölése

$$TE/TM_{mnp} \quad (20.1)$$

Ahol p a $\frac{\lambda_g}{2}$ szorzótényezője, a rezonátor hossza. Ezen betűhármasokra a következő összefüggések igazak:

$$TM_{mnp} \quad m \cdot n \neq 0 \quad \exists p = 0 \quad (20.2)$$

$$TE_{mnp} \quad m + n \neq 0 \quad \nexists p = 0 \quad (20.3)$$



20.1. ábra. TE_{101} üregrezonátor erővonalképe

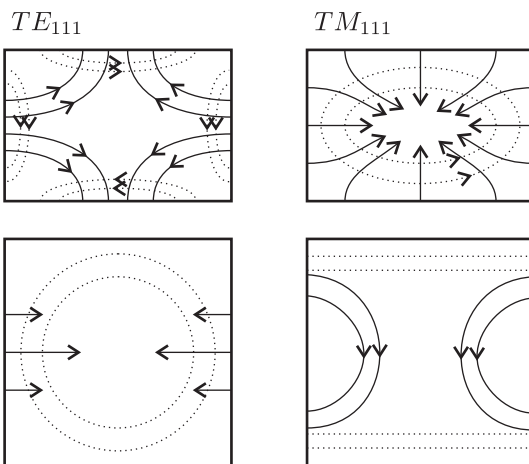
SAJÁTHULLÁMHOSSZ

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_r - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

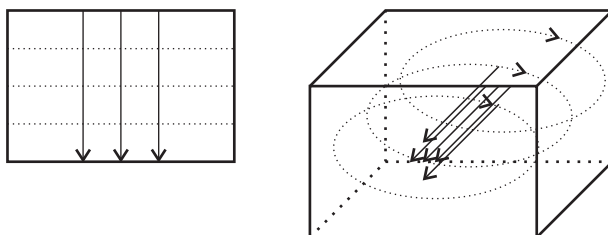
$$L = p \frac{\lambda_g}{2} \longrightarrow \frac{2}{\lambda_g} = \frac{p}{L}$$

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_r - \left(\frac{p}{L}\right)^2 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2$$

$$\lambda^{\text{mnp}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}}$$



20.2. ábra. További erővonalképek

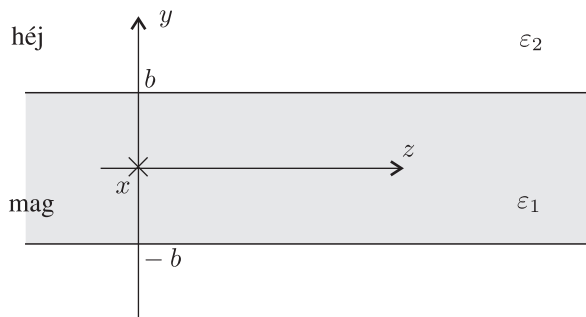


20.3. ábra. TM_{110} üregrezonátor erővonalképe

21 HÍRKÖZLÉSI ÜVEGSZÁLAK ELMÉLETE

Az egyenleteket a [21.1.ábra 115.oldal]-n feltüntetett elrendezésre írjuk fel. Maxwell első és második egyenlete alapján.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y &= j\omega\epsilon_0\epsilon_i E_x & (4) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y &= -j\omega\mu_0 H_x \\
 (2) \quad -j\beta H_x &= j\omega\epsilon_0\epsilon_i E_y & (5) \quad -j\beta E_x &= -j\omega\mu_0 H_y \\
 (3) \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_i E_z & (6) \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z
 \end{aligned}$$



21.1. ábra. Hírközlési üvegszálak elmélete

Kijelenthető, hogy az (1), (5), (6) független rendszert alkot a (2), (3), (4)-től. Mivel ezekben nincs E_z komponens, így ez TE . (1)-ből kiküszöböljük (5), (6) segítségével H_y, H_z -t.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (k_0^2 \varepsilon_i - \beta^2) E_x = 0 \quad (21.1)$$

$$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon \mu (= \beta^2) \quad (21.2)$$

Ami tulajdonképpen a vektoriális hullámgyenlet.

$$k_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1 - \beta^2 \quad (21.3)$$

$$\kappa_2^2 = \beta^2 - k_0^2 \varepsilon_2 \quad (21.4)$$

Valós k_1 és κ_2 esetén van fizikailag értelmezhető megoldás.

$$k_0^2 \varepsilon_2 < \beta^2 < k_0^2 \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \quad (21.5)$$

1-es közeg (mag) A differenciál egyenlet megoldásakor a $\cos$ -t választjuk (páros TE módusok)

$$\frac{d^2 E_x}{dy^2} + k_1^2 E_x = 0$$

$$E_x = A \cdot \cos k_1 y$$

$$H_y = A \frac{\beta}{\omega \mu_0} \cdot \cos k_1 y \quad (5)$$

$$H_z = -A \frac{k_1}{j \omega \mu_0} \cdot \sin k_1 y \quad (6)$$

2-es közeg (hély)

$$\frac{d^2 E_x}{dy^2} - \kappa_2^2 E_x = 0$$

$$E_x = B \cdot e^{-\kappa_2 |y|}$$

$$H_y = B \frac{\beta}{\omega \mu_0} \cdot e^{-\kappa_2 |y|}$$

$$H_z = \mp B \frac{\kappa_2}{j\omega \mu_0} \cdot e^{-\kappa_2 |y|}$$

21.1 FOLYTONOSSÁGI FELTÉTELEK

A csőátpvonalak peremfeltételei helyett alkalmazzuk. Belátható, hogy $y = \pm b$ helyen az E_x és H_z folytonos.

$$A \cdot \cos k_1 b = B \cdot e^{-\kappa_2 b} \quad (21.6)$$

$$-A \frac{k_1}{j\omega \mu_0} \cdot \sin k_1 b = -B \frac{\kappa_2}{j\omega \mu_0} \cdot e^{-\kappa_2 b} \quad (21.7)$$

A fenti két egyenlet homogén lineáris egyenletrendszer alkot, melyre akkor létezik a triviálistól különböző megoldás, ha a determinánsa zérus. A megoldása

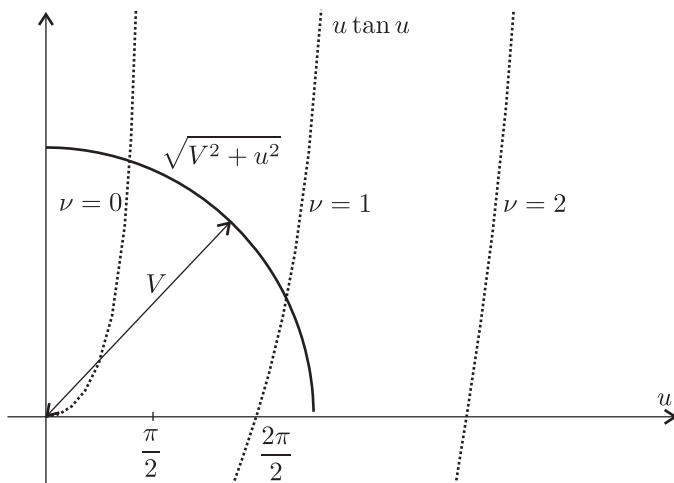
$$\begin{aligned} \tan k_1 b &= \frac{\kappa_2}{k_1} \\ k_1^2 + \kappa_2^2 &= k_0^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ k_1 \tan k_1 b &= \sqrt{k_0^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - k_1^2} \end{aligned}$$

Ez a megoldás adja a diszperziós egyenletet, hiszen $k_1(\beta)$ és $k_0(\omega)$.

21.2 NORMALIZÁLT VÁLTOZÓK

$$\begin{aligned} u &= k_1 b \\ V &= k_0 b \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \\ w &= \kappa_2 b \end{aligned}$$

V változót V -paraméternek, normalizált frekvenciának, normalizált szélességnek nevezzük, míg w a behatolási mélységre normalizált vastagság.



21.2. ábra. Diszperziós görbék

DISZPERZIÓS ÖSSZEFÜGGÉSEK

$$u^2 + w^2 = V^2$$

vagy

$$u - \tan u = \sqrt{V^2 - u^2}$$

Minden metszésponthoz [21.2.ábra 117.oldal] tartozik

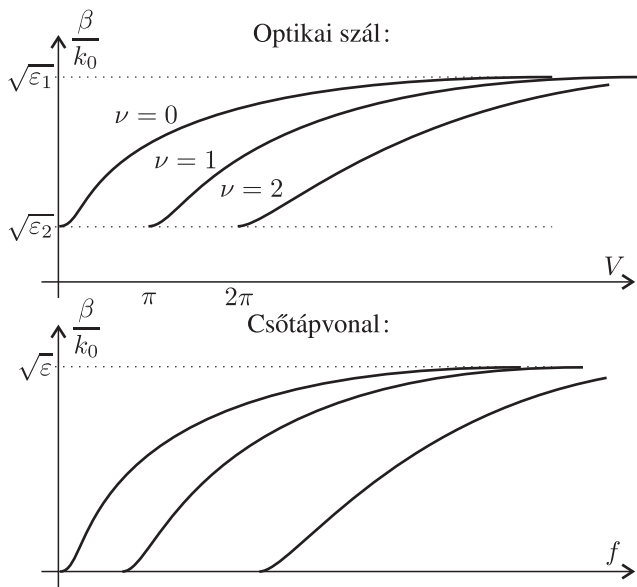
- egy u érték $\rightarrow$ fázistényező;
- egy tér $\rightarrow$ módus (ν index)

Új módus belépése:

- ha az $u = \nu \cdot \pi$;
- ilyenkor $u = V \rightarrow w = 0 \rightarrow \kappa_2 = 0$

$$\beta = k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \quad (21.8)$$

Amikor a fázistényező megegyezik a helybeli síkhullám fázistényezőjével (cső-



21.3. ábra. Diszperziós görbék összehasonlítása

tápvonalaknál határfrekvencia).

$$\beta^2 = k_0^2 \epsilon_1 - k_1^2$$

$$\left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 = \epsilon_1 - \left(\frac{u}{k_1 b} \right)^2, \text{ ha } k \rightarrow \infty$$

$$\beta_c = k_0 \sqrt{\epsilon_1}$$

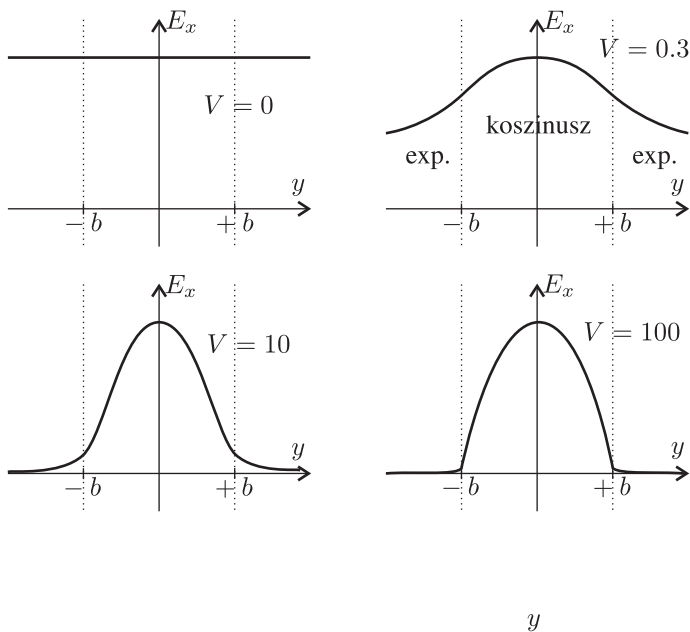
A határfrekvencia alatt a tér a hélyba sugárzódik.

M Az ábrákból kitűnik, hogy frekvenciától függ, mekkora a lehetséges áthallás, tehát a száloptikában is van áthallás. Gyakorlati okokból kompromisszumot kell találni a frekvencia nagysága és a megengedhető áthallás mértéke közt.

22 MATEMATIKA

22.1 GRADIENS

A gradiens a matematikában egy skalármezőkre alkalmazható differenciáloperátor. A gradiens a függvények deriválásának általánosítása többváltozós függvényekre. Ennek vektortér az eredménye, ami azt mutatja, hogy változik a függvény, és



21.4. ábra. V-paraméter(„frekvencia”) hatása ($\nu = 0$)

megadja a skalármező legnagyobb megváltozásának irányát is.⁴

$$\text{grad } \bar{v} = \nabla \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \bar{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \bar{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \bar{e}_z \quad (22.1)$$

22.2 ROTÁCIÓ

Fajlagos lokális örvényerősség

$$\text{rot } \bar{n} \bar{v} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\oint_L \bar{v} d\bar{l}}{\Delta A}$$

$$\text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (22.2)$$

L síkbeli, normálisa $\bar{n}$

⁴ <http://hu.wikipedia.org/wiki/Gradiens>

22.3 DIVERGENCIA

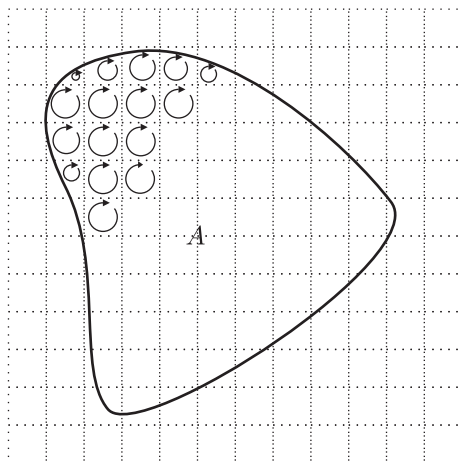
Fajlagos lokális fluxus

$$\operatorname{div} \bar{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_A \bar{v} \, d\bar{A}}{\Delta V}$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = \nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (22.3)$$

22.4 STOKES-TÉTEL

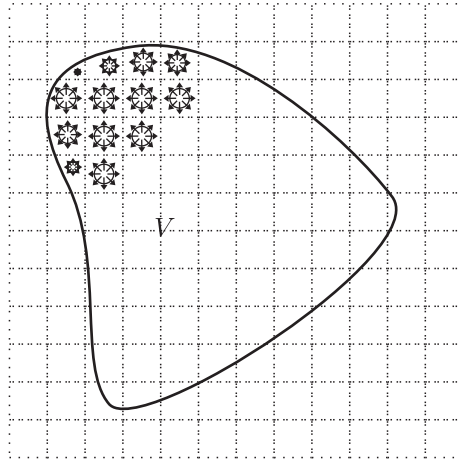
$$\int_A \operatorname{rot} \bar{v} \, d\bar{A} = \oint_L \bar{v} \, d\bar{l} \quad (22.4)$$



22.1. ábra. Stokes-tétel

22.5 MATEMATIKAI GAUSS-TÉTEL

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v} \, d\bar{V} = \oint_A \bar{v} \, d\bar{A} \quad (22.5)$$



22.2. ábra. Matematikai Gauss-tétel

22.6 VEKTORANALITIKAI AZONOSSÁGOK

$$\begin{aligned}
 \bar{v} \cdot \text{rot } \bar{u} - \bar{u} \cdot \text{rot } \bar{v} &= \text{div } \bar{u} \times \bar{v} \\
 \text{div } (u \cdot \bar{v}) &= u \cdot \text{div } \bar{v} + \bar{v} \cdot \text{grad } u \\
 \Delta \bar{v} &= \text{grad div } \bar{v} - \text{rot rot } \bar{v} \\
 \text{grad } u \cdot v &= u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u \\
 (\text{rot } u \cdot \bar{v} &= u \cdot \text{rot } \bar{v} + (\text{grad } u) \times \bar{v})
 \end{aligned}$$

22.7 GREEN-TÉTEL

$$\oint_A \bar{u} \cdot \text{grad } \bar{v} d\bar{A} = \int_V \bar{u} \Delta \bar{v} + \text{grad } \bar{u} \cdot \text{grad } \bar{v} dV \quad \text{Aszimm.} \quad (22.6)$$

$$' - ' \oint_A \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{u} d\bar{A} = \int_V \bar{v} \Delta \bar{u} + \text{grad } \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{u} dV \quad (22.7)$$

$$(22.8)$$

$$\int_V \Delta \bar{u} \cdot \Delta \bar{v} dV = \oint_F \bar{u} \cdot \Delta \bar{v} d\bar{F} - \int_V \bar{u} \Delta^2 \bar{v} dV \quad \text{Szimm.} \quad (22.9)$$