3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal   2008/09 tél A3

1. Oldja meg a $3x^2y\,dx + (1+x^3)\,dy = 0$ differenciálegyenletet!

MO. $g(x,y) = 3x^2y$, $h(x,y) = 1+x^3$, $g_y = 3x^2 = h_x$, továbbá g és h az egész síkon, azaz egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett, tehát a diff. egyenlet egzakt. 3p

$F_x = g(x,y) = 3x^2y$, $F_y = h(x,y) = 1+x^3 \rightsquigarrow F = x^3y + c(y) \rightsquigarrow x^3 + c'(y) = F_y = 1+x^3$

$\rightsquigarrow c'(y) = 1 \rightsquigarrow c(y) = y \rightsquigarrow F = x^3y + y = (1+x^3)y \rightsquigarrow (1+x^3)y = c$. 4p

Ennek $y = y(x)$ megoldásai az általános megoldás, tehát az általános megoldás: $y = \dfrac{c}{1+x^3}$, $c \in \mathbb{R}$. 3p

10p

2. Legyen H az az $[x,y]$ síkbeli háromszögvonal, melynek csúcsai az (1,0,0), (2,0,0), (1,1,0) pontok. Legyen $v(x,y,z) = (2y^2+2xy,\ x^2+yx,\ z^2)$. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját a pozitívan irányított H-n!

MO. Jelölések: $\int_L v\,dr$ a v vonalmenti, $\int_F v\,df$ a felületmenti, $\int_F v\,|df|$ pedig a felszín szerinti integrálja és felhasználjuk, hogy $\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df|$, ahol v_n a v-nek a felületi normálisra eső (skalár)vetülete.

$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x + y - 4y - 2x = -3y \rightsquigarrow \operatorname{rot} v = (0, 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}) = (0,0,-3y)$, 2p

így Stokes tétellel (F a H által bezárt háromszöglap):

$$\int_H v\,dr = \int_F \operatorname{rot} v\,df = \int_F (\operatorname{rot} v)_n\,|df| = \qquad 4p$$

$$\iint_F -3y\,dx\,dy = -3\int_0^1\int_1^{2-y} y\,dx\,dy = -3\int_0^1 yx\,\Big|_1^{2-y}\,dy =$$

$$= -3\int_0^1 (y(2-y)-y)\,dy = -3\int_0^1 y - y^2\,dy == y^3 - 3\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \qquad 4p$$

VAGY: az x tengely mentén a vonalintegrál 0, mert az x tengely mentén: $v(x,0,0) = (0,x^2,0)$, melynek csak y irányú, tehát az érintőre merőleges komponense van. Csak az átfogóra és a függőleges befogóra kell kiszámítani a vonalintegrált.

(a) Az L_a átfogó egyenlete ha L-et negatívan irányítjuk:

$r(t) = (t, 2-t, 0)$, $t \in [1,2] \rightsquigarrow \dot r(t) = (1,-1,0) \rightsquigarrow$

$v(r(t)) = (2(2-t)^2 + 2(2-t)t,\ t^2 + t(2-t), 0) = (8-4t, 2t, 0) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow v(r(t))\cdot\dot r(t) = (8-4t) - 2t = -6t + 8 \rightsquigarrow \int_{-L_a} v\,dr = -\int_1^2 v(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt =$$

$$= \int_1^2 6t - 8\,dt = (3t^2 - 8t)\Big|_1^2 = 12 - 16 - (3-8) = -4 - (-5) = 1 \qquad 5p$$

(b) Az L_b függőleges befogó egyenlete, ha L-et negatívan irányítjuk:

$r(t) = (1,t,0)$, $t \in [0,1] \rightsquigarrow \dot r(t) = (0,1,0) \rightsquigarrow v(r(t))\cdot\dot r(t) = 1 + t \rightsquigarrow$

$$\int_{-L_b} v\,dr = -\int_0^1 v(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt = -\int_0^1 1 + t\,dt = t + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2} \qquad 3p$$

Tehát $\displaystyle\int_L v\,dr = \int_{L_a} v\,dr + \int_{L_b} v\,dr = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ 2p

10p

3. Legyen F az R sugarú origóközéppontú kifelé irányított gömb és k a z tengely irányú egységvektor. Határozza meg a $v(r) = k \times r$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény divergenciáját és F-en vett felületmenti integrálját!

MO.

(1) $\operatorname{div} v = 0$ ugyanis

(a) $v(r) = k \times r$ lineáris operátor, melynek deriváltja önmaga, így a $\operatorname{div} v$ ennek skalárinvariánsa. De persze v antiszimmetrikus, így (szokásos bázisbeli) mátrixa is az, tehát a főátlójában 0-k állnak, amelyek összege, tehát $v(r) = k \times r$ skalárinvariánsa, azaz v divergenciája 0.

(b) Koordinátánként: $v(r) = k \times r = (0,0,1) \times (x,y,z) = (-y, x, 0)$ és $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial -y}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial 0}{\partial z} = 0$. 5p

(2) Tehát $\operatorname{div} v = 0$, ezért aztán Gauss-Osztrogradszkijjal: $\displaystyle\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dv = \int_V 0\,dv = 0$. 5p

(Egyébként persze tényleg a felületmenti integrál 0, hiszen a gömb normálisa mindenütt sugár–, azaz r–irányú, tehát merőleges az integrandusra.)

10p

4. Adja meg az $f(z)=\dfrac{1}{z(z-4)}$ függvény azon $z=1$ körüli Laurent–sorát, mely a $z=3$ pont valamely környezetében előállítja a függvényt!

MO. (a) $f(z)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{z-4}-\dfrac{1}{z}\right)$. **2p**

(b) $\dfrac{1}{z-4}=\dfrac{1}{(z-1)-3}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{3}}=-\dfrac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{3^n}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$ ha $|z-1|<3$ **3p**

(c) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}$ ha $|z-1|>1$ **3p**

(d) $f(z)=\dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{3^{n+1}}\right)=$

$=\ldots-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{36}(z-1)-\dfrac{1}{108}(z-1)^2\ldots$ ha $1<|z-1|<3$ **2p**

5. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú pozitívan irányított kör. Mennyi az $\int_K z^2e^z\,dz$ és az $\int_K z^2e^{\frac{1}{z}}\,dz$ integrál értéke?

MO. $\int_K z^2e^z\,dz=0$ mert az integrandus mindenütt reguláris. **3p**

Másrásxt e^z Taylor–sora: $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots\rightsquigarrow e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z^3}+\ldots\rightsquigarrow$ **3p**

$\rightsquigarrow z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2+z+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z}+\ldots\rightsquigarrow \operatorname*{Res}\limits_{z=0} z^2e^{\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{6}\rightsquigarrow\int_K z^2e^{\frac{1}{z}}\,dz=2\pi j\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{\pi j}{3}$ **4p**

10p

6.

(a) Legyen $F\subseteq\mathbb{R}^3$ zárt kifele irányított felület és legyen a v (háromdimenziós) vektor–vektor függvény folytonosan deriválható F-en és az F által bezárt V térrészen. Melyik igaz, melyik nem? ($\int_F f\,df$ az f felületmenti integrálja és $\int_F f\,dV$ az f térfogati integrálja tetszőleges f skalár vagy vektorfüggvény esetén.)

(1) $\int_F v\,df=\int_V \operatorname{rot}v\,dV$

(2) $\int_F \operatorname{rot}v\,df=\int_V v\,dV$

(3) $\int_F v\,df=\int_V \operatorname{div}v\,dV$

(4) $\int_F \operatorname{div}v\,df=\int_V v\,dV$

(b) Legyen $z=0$ az f komplex függvény izolált szinguláris popntja. Melyik igaz, melyik nem?

(1) Ha $z=0$ megszüntethető szakadási pontja f–nek, akkor $\lim\limits_{z\to0}f(z)=0$

(2) Ha $z=0$ elsőrendű pólusa f–nek, akkor nem létezik a véges $\lim\limits_{z\to0}f(z)$

(3) Ha $z=0$ elsőrendű pólusa f–nek, akkor $\lim\limits_{z\to0}z^2f(z)=0$

(4) Ha $z=0$ lényeges szingularitás f–nek, akkor $\lim\limits_{z\to0}f(z)=\infty$

MO.

(a)

(1) Nem, baloldal skalár, jobboldal vektor

(2) Nem, baloldal skalár, jobboldal vektor **1p**

(3) Igen: Gauss-Osztrogradszkij tétel **1p**

(4) Nem: ha $v=c\neq0$ konstans vektor és V térfogata $V_0\neq0$, akkor a baloldal 0, a jobboldal pedig $cV_0\neq0$. **1p**

3p

(b)

(1) Nem okvetlenül 0 a limes

(2) Igaz **1p**

(3) Igaz: $\lim\limits_{z\to0}z^2f(z)=\lim\limits_{z\to0}z\cdot\lim\limits_{z\to0}(zf(z))=0\cdot\lim\limits_{z\to0}(zf(z))=0$ (mert $\exists\lim\limits_{z\to0}(zf(z))$) **1p**

(4) Nem: nem létezik sem véges, sem végtelen limes **1p**

1p