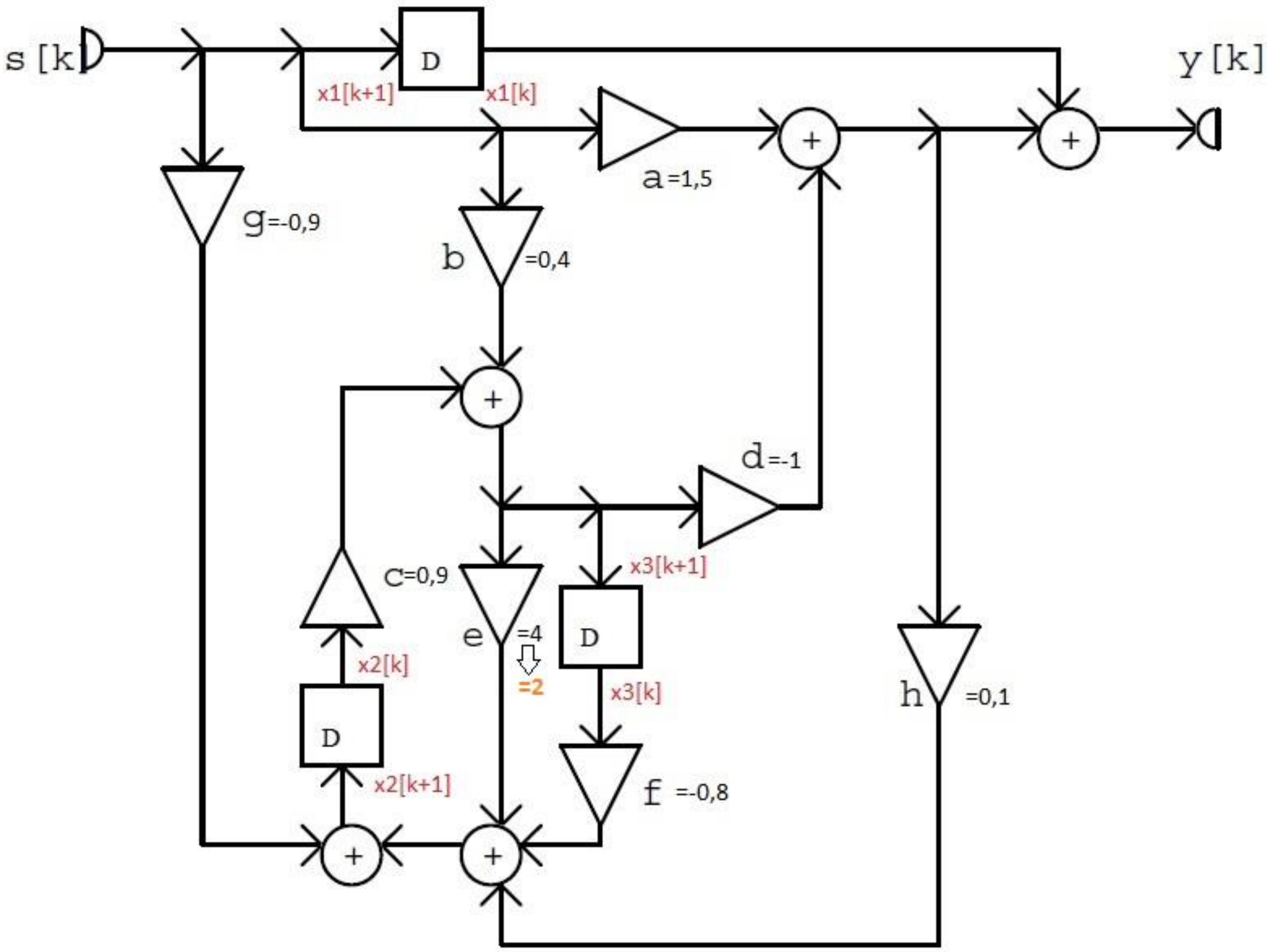


1.1

Az állapotváltozós leírás:

$x_1[k+1] = s[k]$
$x_2[k+1] = 3{,}51x_2[k] - 0{,}8x_3[k] + 0{,}81s[k]$
$x_3[k+1] = 0{,}9x_2[k] + 0{,}4s[k]$

$y[k] = x_1[k] - 0{,}9x_2[k] + 1{,}1s[k]$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3,51} & \mathbf{-0,8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,9} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0,81} \\ \mathbf{0,4} \end{bmatrix}$ $\underline{c^T} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{-0,9} \quad \mathbf{0}]$ $d = \mathbf{1,1}$

1.2

Saját értékek:

$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0{,}2188;\ \ \lambda_3 = 3{,}2912;$

A sajátértékek nem az egységkörön belül helyezkednek el, ezért a rendszer nem aszimptotikusan stabil. $|\lambda_i| \neg < 1$

Ahhoz hogy a hálózat stabilis legyen megváltoztatom az e erősítő értékét 4-ről 2-re.
Az új állapotváltozós leírás:

$x_1[k+1] = s[k]$
$x_2[k+1] = 1{,}71x_2[k] - 0{,}8x_3[k] + 0{,}01s[k]$
$x_3[k+1] = 0{,}9x_2[k] + 0{,}4s[k]$

$y[k] = x_1[k] - 0{,}9x_2[k] + 1{,}1s[k]$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1,71} & \mathbf{-0,8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,9} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0,01} \\ \mathbf{0,4} \end{bmatrix} \qquad \underline{c^T} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{-0,9} \quad \mathbf{0}] \qquad d = \mathbf{1,1}$$

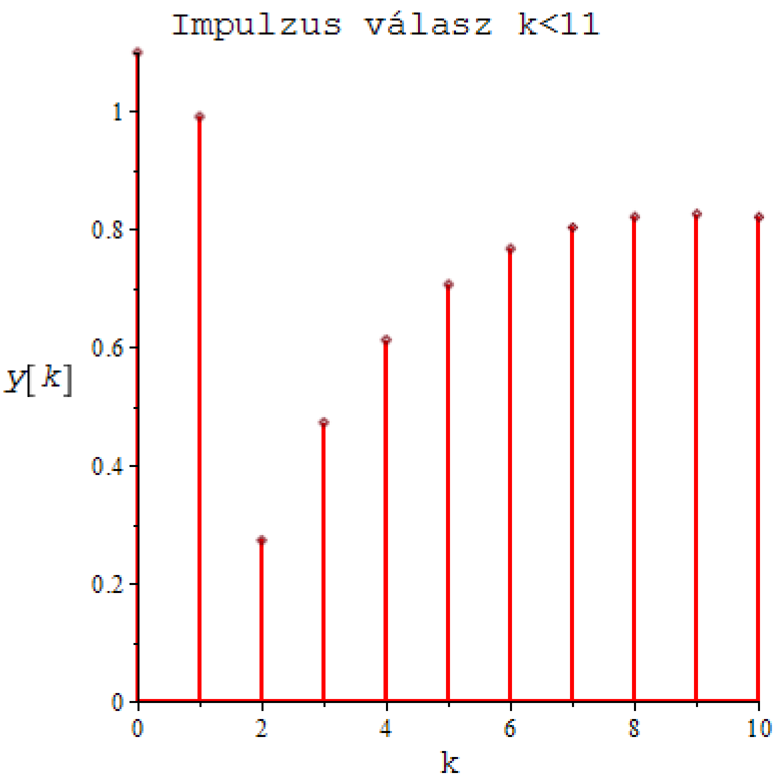
<u>Az új sajátértékek:</u>

$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0{,}75;\ \ \lambda_3 = 0{,}96;$ Így a rendszerünk már stabil.

<u>1.3</u>

Impulzus válasz számolása Excel segítségével, lépésről lépésre, és ábrázolása Maple17-tel

k	s[k]	x1[k]	x2[k]	x3[k]	y[k]
-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1,1
1	0	1	0,01	0,4	0,991
2	0	0	-0,3029	0,009	0,2726
3	0	0	-0,5252	-0,2726	0,4726
4	0	0	-0,6799	-0,4726	0,6119
5	0	0	-0,7846	-0,6119	0,7061
6	0	0	-0,8521	-0,7061	0,7669
7	0	0	-0,8921	-0,7669	0,8029
8	0	0	-0,9121	-0,8029	0,8209
9	0	0	-0,9173	-0,8209	0,8256
10	0	0	-0,9119	-0,8256	0,8207



Az impulzus válasz analitikus alakját megkapjuk a

$$h[k] = \sum_{i=1}^{3} c_i {\lambda_i}^k \;\; ; \;\; ha\, k \geq 2$$

összefüggésből, és a lépésről-lépésre módszer eredményeiből.
$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0{,}75;\ \ \lambda_3 = 0{,}96;$

$$h[k] = 1{,}1\delta[k] + 0{,}991\delta[k-1] + \varepsilon[k-2](c_2 * {\lambda_2}^{k-2} + c_3 * {\lambda_3}^{k-2})$$

c2 és c3 meghatározásához felhasználjuk a lépésről-lépésre módszerrel kapott értékeket.

$$k = 2 \rightarrow h[2] = c_2 + c_3 = 0{,}2726$$

$$k = 3 \rightarrow h[3] = c_2 * 0{,}75 + c_3 * 0{,}96 = 0{,}4726$$

Az egyenletrendszert megoldva: $c_2 = -1{,}0043 \;\; ; \;\; c_3 = 1{,}2769$

$$\mathbf{h[k] = 1,1\delta[k] + 0,991\delta[k-1] + \varepsilon[k-2](-1,0043 * 0,75^{k-2} + 1,2769 * 0,96^{k-2})}$$

<u>1.4</u>

A gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k]\left(0{,}8 + 1{,}5 * (-0{,}8)^k\right)$
Válasz számítása a gerjesztés az impulzusválasz konvolúciójaként.

Mivel az impulzusválasz és a gerjesztés is belépő, és a rendszer kauzális ezért a konvolúcióban véges számú szorzat lesz.

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} s[i] * h[k-i]$$

k	s[k]	h[k]	**y[k]**
0	2,3	1,1	**2,53**
1	-0,4	0,991	**1,8393**
2	1,76	0,2726	**2,1666**
3	0,032	0,4726	**2,7573**
4	1,4144	0,6119	**3,2857**
5	0,3085	0,7061	**3,9608**

y[0]=s[0]*h[0]=2,53
y[1]=s[0]*h[1]+[s1]*h[0]=1,8393
y[2]=s[0]*h[2]+s[1]*h[1]+s[2]*h[0]=2,1666
y[3]=s[0]*h[3]+s[1]*h[2]+s[2]*h[1]+s[3]*h[0]=2,7573
y[4]=s[0]*h[4]+s[1]*h[3]+s[2]*h[2]+s[3]*h[1]+s[4]*h[0]=3,2857
y[4]=s[0]*h[5]+s[1]*h[4]+s[2]*h[3]+s[3]*h[2]+s[4]*h[1]+s[5]*h[0]=3,9608

2.1

Az állapotváltozós leírást átírhatjuk frekvencia tartományra:

$X_1 e^{j\vartheta} = \overline{S}$
$X_2 e^{j\vartheta} = 3{,}51\overline{X_2} - 0{,}8\overline{X_3} + 0{,}81\overline{S}$
$X_3 e^{j\vartheta} = 0{,}9\overline{X_2}$+0,4$\overline{S}$

$\overline{Y} = \overline{X_1} - 0{,}9\overline{X_2} + 1{,}1\overline{S}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1,71} & \mathbf{-0,8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,9} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0,01} \\ \mathbf{0,4} \end{bmatrix}$ $\underline{c}^T = [\mathbf{1} \quad \mathbf{-0,9} \quad \mathbf{0}]$ $d = \mathbf{1,1}$

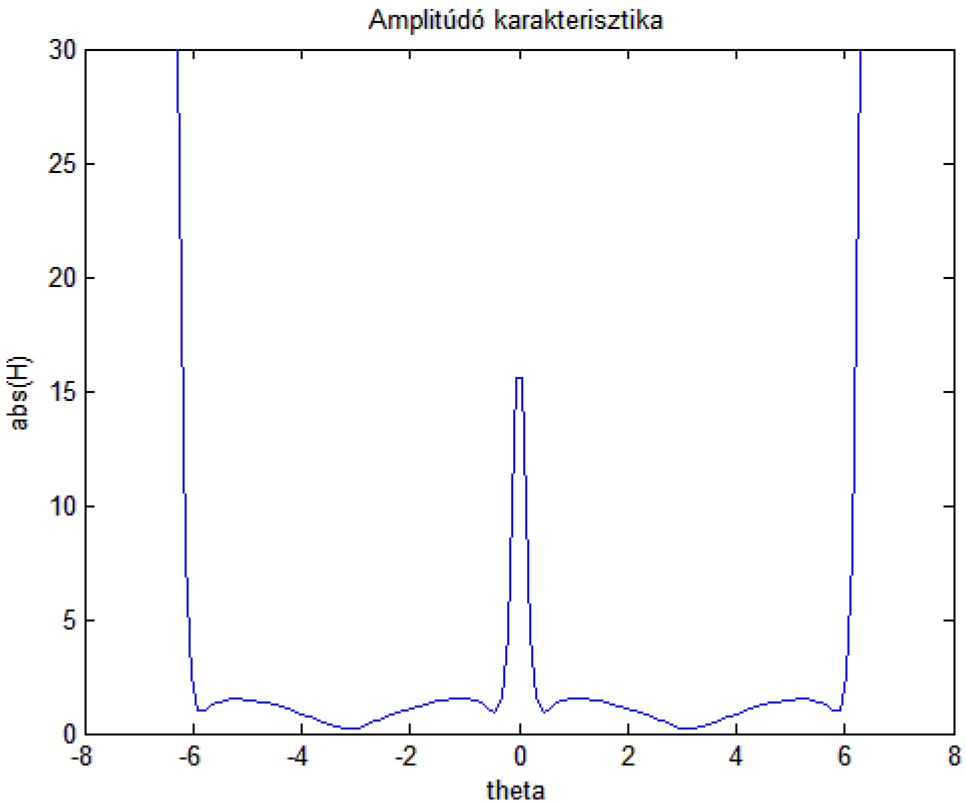
Matlab segítségével ebből már megkapjuk az átviteli karakterisztikát:

```
>> [szam,nev]=ss2tf(A,B,C,D)
szam =
   1.1000   -0,89   -0,63  0.7200
nev =
   1.0000   -1,7100    0.7200        0
```

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{1{,}1 - 0{,}89e^{-j\vartheta} - 0{,}63e^{-2j\vartheta} + 0{,}72e^{-3j\vartheta}}{1 - 1{,}71e^{-j\vartheta} + 0{,}72e^{-2j\vartheta}}$$

Amplitúdó karakterisztika:

$K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|$



2.2

Gerjesztés: $s[k] = S * \cos(\vartheta_0 k + \rho)$; $S = 17, \vartheta_0 = 0{,}19\pi, \rho = \frac{\pi}{7}$

$s[k] = 17 * \cos\left(k0{,}19\pi + \frac{\pi}{7}\right)$

$\overline{S} = 17e^{j\frac{\pi}{7}}$

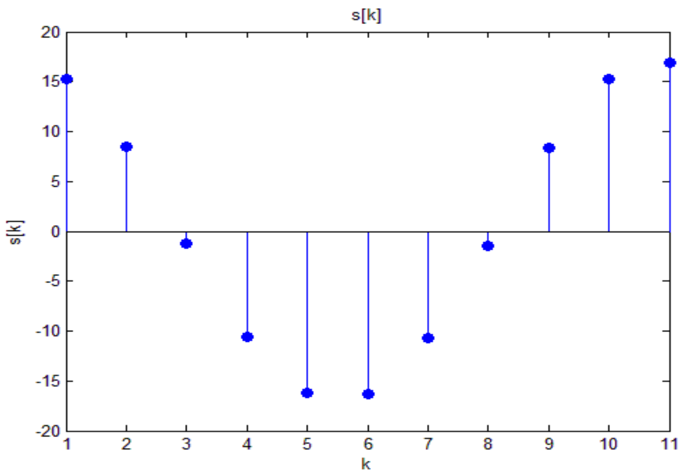
$H\left(e^{j0{,}19\pi}\right) = \frac{1{,}1-0{,}89e^{-j0{,}19\pi}-0{,}63e^{-2j0{,}19\pi}+0{,}72e^{-3j0{,}19\pi}}{1-1{,}71e^{-j0{,}19\pi}+0{,}72e^{-2j0{,}19\pi}}$=1,1723$e^{j(-0{,}4076)}$

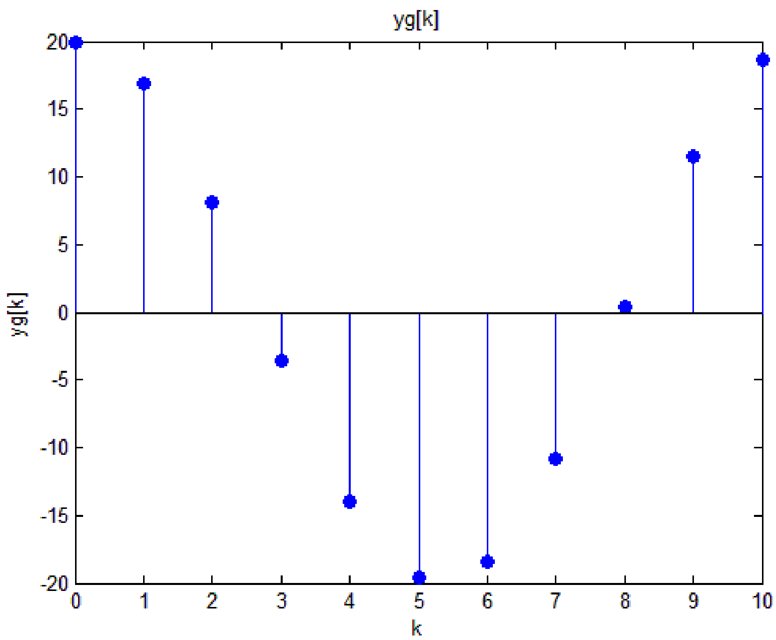
$\overline{Y} = \overline{S} * \overline{H} = 17e^{j*\left(\frac{\pi}{7}\right)} * 1{,}1723e^{j(-0{,}4076)} = 19{,}9302 * e^{0{,}0412j}$

$\boldsymbol{y_g[k] = 19{,}9302 * \cos(0{,}19\pi k - 0{,}0412)}$

Periódusidő: $\frac{M}{L} * 2\pi = 0{,}19\pi \rightarrow \frac{M}{L} = \frac{19}{200} \rightarrow \mathbf{L = 200}$

A fizikai tartalom feltétele: a rendszer G-V stabil kell legyen, teljesül.





2.3

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	5	2	-4	1	-9	-2

$K = 6 \rightarrow \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$

Az i-edik komplex Fourier együttható:

$$\overline{F_i} = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} f[k] * e^{-jik\vartheta_0}$$

$$\overline{F_0} = \frac{1}{6}(5 + 2 - 4 + 1 - 9 - 2) = -\frac{7}{6} \approx -1{,}1666$$

$$\overline{F_1} = \frac{1}{6}(5e^{-j*1*0*\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j*1*1*\frac{\pi}{3}} - 4e^{-j*1*2*\frac{\pi}{3}} + 1e^{-j*1*3*\frac{\pi}{3}} - 9e^{-j*1*4*\frac{\pi}{3}} - 2e^{-j*1*5*\frac{\pi}{3}}$$
$$1{,}75 - 1{,}299j = 2{,}1794e^{-0{,}6385j}$$

$$\overline{F_2} = \frac{1}{6}(5e^{-j*2*0*\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j*2*1*\frac{\pi}{3}} - 4e^{-j*2*2*\frac{\pi}{3}} + 1e^{-j*2*3*\frac{\pi}{3}} - 9e^{-j*2*4*\frac{\pi}{3}} - 2e^{-j*2*5*\frac{\pi}{3}}$$
$$2{,}083 + 0{,}1443j = 2{,}0883e^{0{,}0692j}$$

$$\overline{F_3} = \frac{1}{6}(5e^{-j*3*0*\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j*3*1*\frac{\pi}{3}} - 4e^{-j*3*2*\frac{\pi}{3}} + 1e^{-j*3*3*\frac{\pi}{3}} - 9e^{-j*3*4*\frac{\pi}{3}} - 2e^{-j*3*5*\frac{\pi}{3}} = -1{,}5$$

$$\overline{F_4} = \overline{F_2}^* = 2{,}0883e^{-0{,}0692j}$$

$$\overline{F_5} = \overline{F_1}^* = 2{,}1794e^{0{,}6385j}$$

A komplex alak:

$$u[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \overline{F_i} * e^{jki\vartheta_0}$$

Behelyettesítve:

$$\boxed{\begin{aligned} s[k] = -\frac{7}{6} + 2{,}1794e^{j\left(k*\frac{\pi}{3}-0{,}6385\right)} + 2{,}0883e^{j\left(k*\frac{2\pi}{3}+0{,}0692\right)} - 1{,}5e^{jk\pi} + \\ +2{,}0883e^{j\left(k*\frac{4\pi}{3}-0{,}0692\right)+} + 2{,}1794e^{j\left(k*\frac{5\pi}{3}+0{,}6385\right)} \end{aligned}}$$

Valós eggyüthatók:

$$F_i^A = 2 * Re\{\overline{F_i}\}; \quad F_i^B = -2Im\{\overline{F_i}\}; \quad 0 < i < 3$$

$$F_0 = \overline{F_0} = -\frac{7}{6}$$

$F_1^A = 3{,}5; \quad F_1^B = 2{,}598$
$F_2^A = 4{,}166; \quad F_2^B = -0{,}288$
$F_3^A = -1{,}5; \quad F_3^B = 0$

$$u[k] = F_0 + \sum_{i=1}^{\frac{K}{2}} (F_i^A * \cos(ik\vartheta_0) + F_i^B * \sin(ik\vartheta_0))$$

$$\boxed{u[k] = -\frac{7}{6} + 3{,}5 * \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + 2{,}598 * \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) + 4{,}166\cos\left(2\frac{k\pi}{3}\right) - 0{,}288 * \sin\left(2\frac{k\pi}{3}\right) - 1{,}5\cos\left(3\frac{k\pi}{3}\right)}$$

Ell.: A diszkrét Fourier sor pontosan álítja elő az eredeti jelet. Ez jelen esetben is így van mindkét alaknál, s[0]=5

2.4

Gerjesztés:

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	5	2	-4	1	-9	-2

$$\boxed{s[k] = -\frac{7}{6} + 3{,}5 * \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + 2{,}598 * \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) + 4{,}166\cos\left(2\frac{k\pi}{3}\right) - 0{,}288 * \sin\left(2\frac{k\pi}{3}\right) - 1{,}5\cos\left(3\frac{k\pi}{3}\right)}$$

$$\boxed{s[k] = -\frac{7}{6} + 4{,}3589\cos\left(\frac{k\pi}{3} - 0{,}6385\right) + 4{,}1759\cos\left(\frac{2k\pi}{3} + 0{,}069\right) - 1{,}5\cos(k\pi)}$$

Az átviteli karakterisztika:

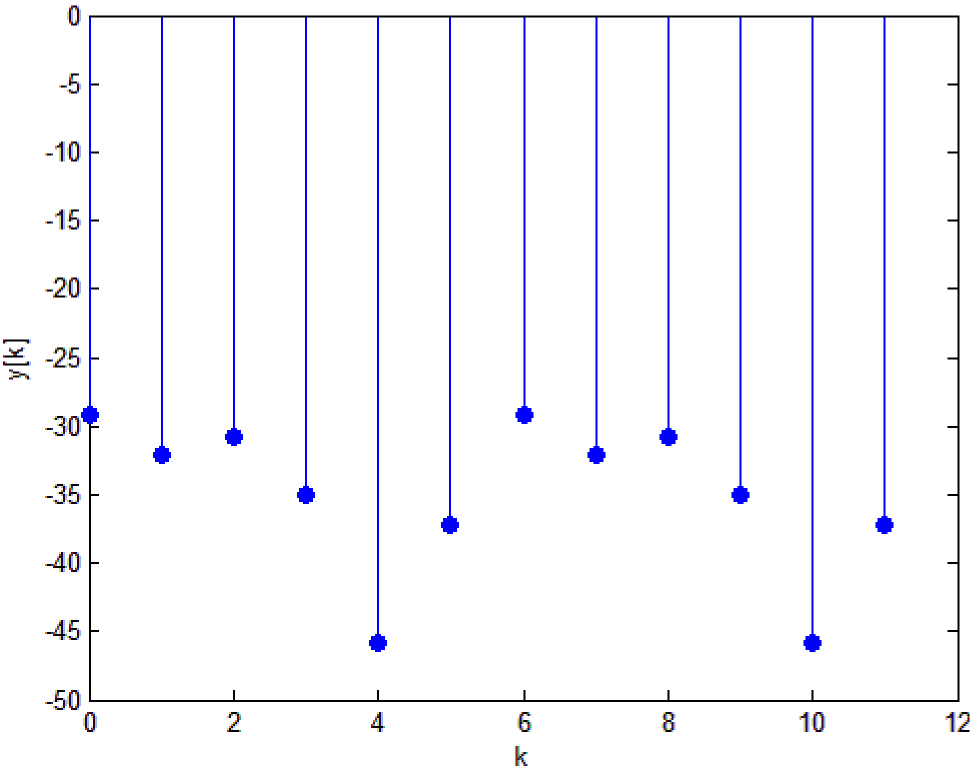
$$\boxed{H(e^{j\vartheta}) = \frac{1{,}1 - 0{,}89e^{-j\vartheta} - 0{,}63e^{-2j\vartheta} + 0{,}72e^{-3j\vartheta}}{1 - 1{,}71e^{-j\vartheta} + 0{,}72e^{-2j\vartheta}}}$$

A rendszer linearitása miatt alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét.

ϑ_0	s	H$(e^{j\vartheta})$	Y
0	$-\frac{7}{6}$	30	-35
$\frac{\pi}{3}$	$4{,}3589e^{-j0{,}6385}$	$1{,}5159e^{-j0{,}4334}$	$6{,}6077\, e^{-j1{,}0719}$
$\frac{2\pi}{3}$	$4{,}1759e^{j0{,}069}$	$0{,}9806e^{-j0{,}8463}$	$4{,}0949e^{-j0{,}7773}$
π	-1,5	-0,1866	0,2799

$$\boldsymbol{y[k] = -35 + 6{,}6077\cos\left(\frac{k\pi}{3} - 1{,}0719\right) + 4{,}094966\cos\left(\frac{2k\pi}{3} + 0{,}7773\right) - 0{,}2799\cos(k\pi)}$$

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	5	2	-4	1	-9	-2
y[k]	**-29,1995**	**-32,0611**	**-30,8079**	**-34,9627**	**-45,8322**	**-37,1365**



2.5

$h[k] = 1{,}1\delta[k] + 0{,}991\delta[k-1] + \varepsilon[k-2](-1{,}0043 * 0{,}75^{k-2} + 1{,}2769 * 0{,}96^{k-2})$

$$F\{h[k]\} = 1{,}1e^{-j\vartheta*0} + 0{,}991e^{-j\vartheta*1} - \frac{1{,}0043e^{-j2\vartheta}}{1-0{,}75e^{-j\vartheta}} + \frac{1{,}2769e^{-j2\vartheta}}{1-0{,}96e^{-j\vartheta}} = \cdots$$

Közös nevezőre hozás és egyszerüsítés, összevonás után

$\frac{1{,}1-0{,}89e^{-j\vartheta}-0{,}63e^{-2j\vartheta}+0{,}72e^{-3j\vartheta}}{1-1{,}71e^{-j\vartheta}+0{,}72e^{-2j\vartheta}}$, ami megegyezik a 2.1-ben kiszámolt átviteli karakterisztikával.

2.6

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{1{,}1 - 0{,}89e^{-j\vartheta} - 0{,}63e^{-2j\vartheta} + 0{,}72e^{-3j\vartheta}}{1 - 1{,}71e^{-j\vartheta} + 0{,}72e^{-2j\vartheta}}$$

$$\overline{Y} - 1{,}71\overline{Y}e^{-j\vartheta} + 0{,}72\overline{Y}e^{-2j\vartheta} = 1{,}1\overline{S} - 0{,}89\overline{S}e^{-j\vartheta} - 0{,}63\overline{S}e^{-2j\vartheta} + 0{,}72\overline{S}e^{-3j\vartheta}$$

Az $e^{-kj\vartheta}$ k-val való eltolás az időben, így a rendszeregyenlet:

y[k]-1,71y[k-1]+0,72y[k-2]=1,1s[k]-0,89[k-1]-0,63s[k-2]+0,72s[k-3]

3.1

A z-tartománybeli egyenletek

$\overline{X_1} = \overline{S} * z^{-1}$
$\overline{X_2} = 1{,}71\overline{X_2}z^{-1} - 0{,}8\overline{X_3}z^{-1} + 0{,}01\overline{S} * z^{-1}$
$\overline{X_3} = 0{,}9\overline{X_2}z^{-1} + 0{,}4\overline{S} * z^{-1}$

$\overline{y} = \overline{X_1} - 0{,}9\overline{X_2} + 1{,}1\overline{S}$

Az átviteli karakterisztikából felírható az átviteli függvény, mert a rendszer kauzális, $e^{j\vartheta} = z$ helyettesítéssel.

$$H(z) = \frac{1{,}1 - 0{,}89z^{-1} - 0{,}63z^{-2} + 0{,}72z^{-3}}{1 - 1{,}71z^{-1} + 0{,}72z^{-2}}$$

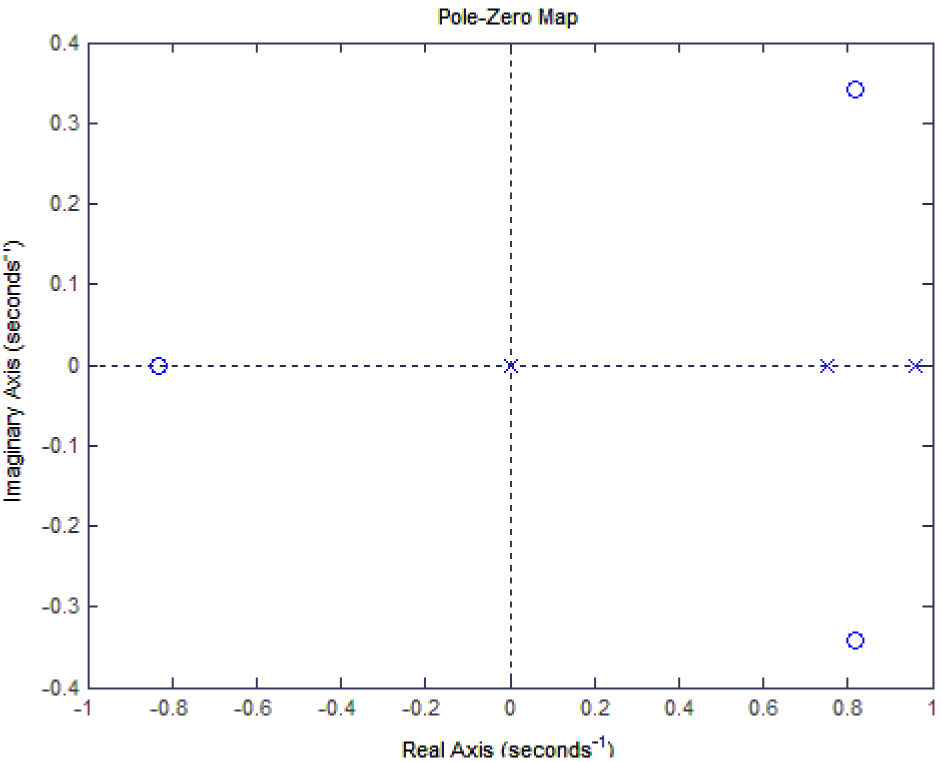
3.2

Pólusok, ahol a nevező=0:

p1=0; p2=0,96; p3=0,75

Zérusok, ahol a számláló=0:

z1=-0,8303; z2=0,8197+0,3413i; z3=0,8197-0,3413i



A pólusok az egységkörön belül helyezkednek el, a hálózat G-V stabil.

3.3

$$H(z) = \frac{1{,}1z^3 - 0{,}89z^2 - 0{,}63z^1 + 0{,}72}{1z^3 - 1{,}71z^2 + 0{,}72z^1}$$

$$Z^{-1}\{H(z)\} = h[k]$$

$$\frac{1{,}1z^3 - 0{,}89z^2 - 0{,}63z^1 + 0{,}72}{1z^3 - 1{,}71z^2 + 0{,}72z^1} = 1{,}1z^0 + z^{-1}\left(\frac{0{,}991z^3 - 1{,}422z^2 - 0{,}72z^1}{1z^3 - 1{,}71z^2 + 0{,}72z^1}\right) =$$

$$1{,}1z^0 + z^{-1}\left(0{,}991 + \frac{0{,}2726z^2 + 0{,}00648z}{z^3 - 1{,}71z^2 + 0{,}72z}\right) =$$

$$1{,}1z^0 + 0{,}991z^{-1} + z^{-2}\left(\frac{1{,}277z}{z - 0{,}96} + \frac{-1{,}0044z}{z - 0{,}75}\right)$$

Tagonként visszatranszformálunk, és az eredmény az 1.3-ban kiszámolt impulzusválasz lesz: (minimális hiba a kerekítések miatt van)

$$\mathbf{h[k] = 1{,}1\delta[k] + 0{,}991\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]}(\mathbf{-1{,}0044 * 0{,}75^{k-2} + 1{,}277 * 0{,}96^{k-2}})$$

<u>Ellenőrzés</u>

$$(1{,}1 - 0{,}89z^{-1} - 0{,}63z^{-2} + 0{,}72z^{-3}) : (1 - 1{,}71z^{-1} + 0{,}72z^{-2}) = 1{,}1 + 0{,}991z^{-1} + 0{,}2726z^{-2} + 0{,}4726z^{-3} + 0{,}6118z^{-4} \dots$$

$$\begin{array}{l}
1{,}1 - 1{,}881z^{-1} + 0{,}792z^{-2} + 0z^{-3} \\
\hline
0 + 0{,}991z^{-1} - 1{,}422z^{-2} + 0{,}72z^{-3} \\
- \quad 0{,}991z^{-1} - 1{,}6946z^{-2} + 0{,}7135z^{-3} \\
\hline
0 + 0{,}2726z^{-2} + 0{,}0065z^{-3} \\
- \quad 0{,}2726z^{-2} - 0{,}4661z^{-3} + 0{,}1963z^{-4} \\
\hline
0 + 0{,}4726z^{-3} - 0{,}1963z^{-4} \\
- \quad 0{,}4726z^{-3} - 0{,}8081z^{-4} + 0{,}3403z^{-5} \\
\hline
0 + 0{,}6118z^{-4} - 0{,}3403z^{-5} \\
\dots
\end{array}$$

$$Z^{-1}\{1{,}1\} = 1{,}1\delta[k]$$

$$Z^{-1}\{0{,}991z^{-1}\} = 0{,}991\delta[k-1]$$

$$\vdots$$

$$h[k] = 1{,}1\delta[k] + 0{,}991\delta[k-1] + 0{,}2726\delta[k-2] + 0{,}4726\delta[k-3] + 0{,}6118\delta[k-4] + \dots$$

3.4

s[k]=$\varepsilon[k] * \left(0{,}8 + 1{,}5 * (-0{,}8)^{k}\right)$

s(z)=$\frac{0{,}8*z}{z-1} + \frac{1{,}5*z}{z+0{,}8}$

y[z]=H[z]*s[z]= $\frac{1{,}1z^3-0{,}89z^2-0{,}63z^1+0{,}72}{1z^3-1{,}71z^2+0{,}72z^1} * \left(\frac{0{,}8*z}{z-1} + \frac{1{,}5*z}{z+0{,}8}\right)$=

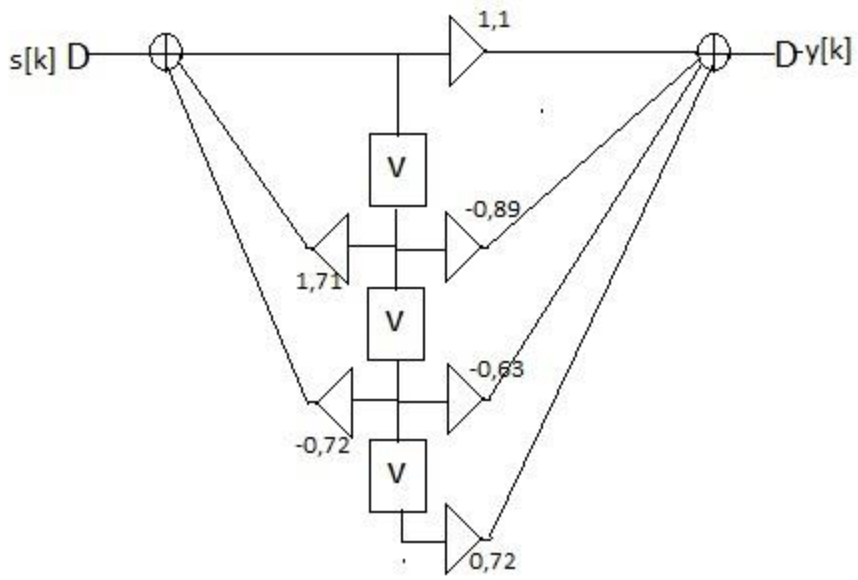
$= \frac{2{,}53z^4-2{,}993z^3-0{,}6836z^2+2{,}1978z-0{,}6192}{z^4-1{,}91z^3+0{,}262z^2+1{,}224z-0{,}576}$=

$$= 2{,}53 + z^{-1}\left(-\frac{24{,}453z}{z-0{,}96} + \frac{24z}{z-1} + \frac{2{,}2422z}{z-0{,}75} + \frac{0{,}0501z}{z+0{,}8}\right)$$

$$y[k] = 2{,}53\delta[k] + \varepsilon[k-1](-24{,}453 * 0{,}96^{k-1} + 24 + 2{,}2422 * 0{,}75^{k-1} + 0{,}0501 * (-0{,}8)^{k-1}$$

3.5

$$H(z) = \frac{1{,}1 - 0{,}89z^{-1} - 0{,}63z^{-2} + 0{,}72z^{-3}}{1 - 1{,}71z^{-1} + 0{,}72z^{-2}}$$



y[k]=1,1u[k]-0,89u[k-1]-0,63u[k-2]+0,72u[k-3]+1,71y[k-1]-0,72y[k-2]

3.6

A számolásra Excel-t használtam, a számértékek nagyjából megegyeznek, hiba a kerekítések miatt lehet

k	u[k]	y[k]anal.	y[k] rend.
-3	0	0	0
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	2,3	2,53	2,53
1	-0,4	1,8393	1,8393
2	1,76	2,16669	2,166603
3	0,032	2,75742	2,757395
4	1,4144	3,28583	3,285752
5	0,3085	3,9609	3,960863
6	1,1932	4,57736	4,577292
7	0,4854	5,27142	5,271382
8	1,0517	5,91365	5,913586