

# HULLÁMMOZGÁS

„Aki az óceánon hajózik, annak egyre inkább úgy tűnik, hogy az óceán hullámokból áll, nem pedig vízből”

A. S. EDDINGTON

[The Nature of the Physical World, Cambridge (1929)]

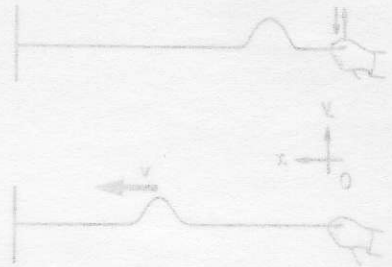
## 18.1 Bevezetés

A hullámmozgás a fizika majdnem minden ágában előforduló jelenség. A természetben mindenütt található hullámok: van víz hullám, hanghullám, rádióhullám és fényhullám. A hullámmozgás matematikailag, az ún. *hullámegyenlettel* írják le. Tárgyalásunkat ebben a fejezetben a *mechanikai* hullámokra korlátozzuk. Mechanikai hullám bármely rugalmas közegben a közeg egy kicsiny részének hirtelen elmozdításával, az ún. „rugalmas zavarral” kelthető. Amint majd látni fogjuk, a rugalmas zavar terjedési sebessége a közegre jellemző.

Lényegében minden hullámmozgás energiát és impulzust szállít a tér egyik pontjából a másikba pontjába anélkül, hogy a tömeg is eljutna egyik pontból a másikba. Azaz a közeg részecskéi nem haladnak a hullámmal. Ehelyett bizonyos egyensúlyi helyzet körül ide-oda rezegnek a hullám áthaladásakor, csak a zavar terjed. Ha a zavar elér egy távoli helyre, mozgásba hozza az ottani részecskéket, energiát és impulzust adva át nekik. Példaképpen, ha a déli Csendes Óceán viharában keletkezett hullámok 50–70 km/h sebességgel haladva a 10000 km-rel odébb fekvő kaliforniai partok hullámainak energiát és impulzust adnak át, a déli Csendes Óceánból semennyi víz sem jut el Kaliforniába. Csak maga a zavar teszi meg az utat.

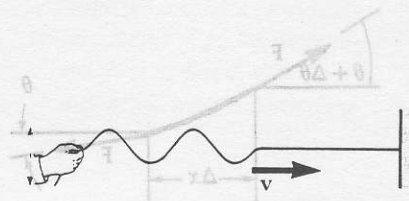
A haladó hullámoknak két általános csoportja van, amint ezt a 18-1 ábra illusztrálja. A **transzverzális hullám** esetén a közeg részecskéi a hullám haladási irányára *merőlegesen* rezegnek, és a **longitudinális hullám** esetén a közeg részecskéi a hullám haladási irányával *párhuzamosan* rezegnek. A kötélen kialakuló haladó hullám transzverzális, mert a kötélen a haladás irányára merőlegesen rezeg. A levegőben terjedő hanghullámok longitudinális hullámok, mert a levegő gázmolekulái a haladás irányával párhuzamosan rezegnek. Némelyik hullámban, amilyen például a felületi víz hullám, a közeg részecskéinek mozgása egyidejűleg transzverzális- és longitudinális.

Ha a közegnek csak egyszeri „ütést” vagy „lökést” adunk, a forrásból kifelé terjedő zavart **lökéshullámnak** nevezzük. Példa lehet rá a taps levegőben terjedő csattanó hangja, vagy a kifeszített kötélen terjedő zavar, ha a kötelet a végéhez közel éles ütés érte. Ha viszont a zavarkeltés ismétlődik, akkor **hullámvonulatnak** nevezett lökésorozat keletkezik. A hullámvonulat gyakori alakja jön létre, ha a zavarkeltés olyan egyszerű harmonikus mozgás,

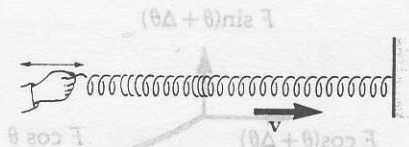


18-2 ábra

Egyetlen gyors fel- és lemozgás (impulzus) terjedése, ami a kitérés (transzverzális) irányában terjed. (A vázlaton az impulzus amplitúdója erősen túlzott.)



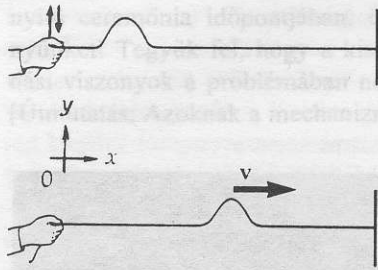
a) **Transzverzális hullámok** a kifeszített kötélen. A kötélen a részecskéi a hullám haladási irányára merőlegesen térnek ki.



b) **Longitudinális hullámok** a kifeszített rugón. A rugó meneteinek a kitérése a hullám haladási irányával párhuzamos.

## 18-1 ábra

Ha valamely közeg egy tartományát gyorsan ide-oda mozgatták, akkor periodikus zavarhullám keletkezik. A zavar az adott közegre jellemző  $v$  sebességgel terjed.



### 18-2 ábra

Egyetlen gyors felfelé majd lefelé irányított transzverzális ( $y$  irányú) impulzus létesíthető, ami a kifeszített kötélen az  $x$  irányban végighalad. (A vázlaton az impulzus amplitúdója erősen túlzott.)

hogy a közeg minden egyes részecskéje egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez a hullám tovahaladása során. Ez a zavartípus **szinuszhullám-vonulat** néven ismert. Ha az ismétlődő zavar összetettebb mozgás, akkor **periodikus hullámvonulatról** beszélünk.

## 18.2 A hullámegyenlet

Az egyszerűség kedvéért tárgyalásunkat egydimenziós közeggel kezdjük és az eredményeket később kiterjesztjük két- és háromdimenziós esetre is. Tekintsünk egy, az  $x$  tengely mentén  $F$  erővel kifeszített kötelet! (Azért, hogy az egyszerű harmonikus rezgés  $T$  periódusidőjével össze ne keverjük, most a kötelet feszítő erőt  $F$ -fel jelöljük.) Ha a kötel egyik végét gyorsan fel és le mozdítjuk, de csak egyszer, ahogyan a 18-2 ábra mutatja, a zavar egyetlen transzverzális lökéshullámot indít el, ami a kötélen végighalad. A legegyszerűbb (ideális) esetben a lökéshullám megtartja alakját vagy **profilját** a haladás során.<sup>1</sup> Minden egyes időpontban a haladó zavar a kötélnak csak egy kis részére korlátozódik, másfelől minden egyes részecske pillanatnyi transzverzális mozgást végez és eredeti nyugalmi helyzetébe tér vissza.

Ennek a mozgásnak a leírásához néhány paraméter szükséges:

$y$  = a kötel részecskéinek a kitérése az egyensúlyi helyzettől (ez esetben a kitérés a haladás irányára merőleges)

$x$  = a lökéshullám terjedési irányában mért koordináta

$t$  = az idő.

$\mu$  = a kötel vonalmenti (lineáris) tömegsűrűsége, amelyet a kötel egységnyi hosszúságának tömegeként (*tömeg per hosszúság*) értelmezzünk.

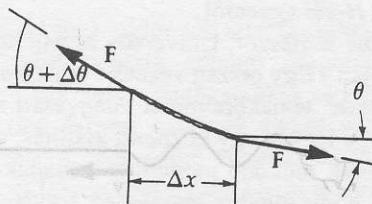
A transzverzális lökéshullám  $v$  sebességgel halad a kötel mentén. Feltételezzük, hogy a kitérés olyan kicsi, hogy a lökéshullám áthaladása során az  $F$  feszítőerő lényegében állandó marad.

Összpontosítsuk figyelmünket a kötel kicsiny  $\Delta x$  szakaszára, amikor ez a lökéshullám áthaladása folytán transzverzális kitérést végez. A *transzverzális* mozgásra alkalmazott  $\Sigma F = ma$  törvényből egyenletet vezetünk le a lökéshullám *longitudinális*  $v$  sebességére. A kötelszakaszra ható erők vektorábrája a 18-3 ábrán látható. Két, kis amplitúdókra érvényes feltételezéssel élünk: (1) a  $\theta$  szög mindig kicsi, és (2) az  $y$  kitérés mindig elég kicsi ahhoz, hogy az  $F$  feszítőerő végig állandó maradjon. Mivel  $\theta$  kicsi felírhatjuk, hogy

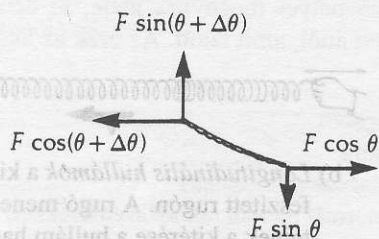
$$\sin \theta \approx \text{tg} \theta \approx \frac{\partial y}{\partial x} \quad (18-1)$$

ahol  $\partial y / \partial x$  szimbólumot az  $y$  függvény  $x$  szerinti *parciális deriváltjának* nevezzük. Ez azt jelenti, hogy az  $x$  szerinti deriválást a szokásos módon kell elvégezni, az *összes többi változó* (esetünkben csak  $t$ ) *állandó értéken tartása mellett*. Azaz a deriválást csak  $x$  szerint kell elvégezni. Például az  $y = x^2 + t^3$  függvény  $x$  szerinti parciális deriváltja  $\partial y / \partial x = 2x$ , a  $t$  szerinti parciális deriváltja pedig  $\partial y / \partial t = 3t^2$ .

<sup>1</sup> Sok esetben a Hooke-törvényben szereplő rugóállandó, kis mértékben ugyan, de függ az amplitúdótól és a frekvenciától. Ennek következtében a különböző frekvenciájú hullámok sebessége kissé különböző. Ez a lökéshullám szétterülését okozza (a jelenség *diszperzió* néven ismert), emiatt a zavar profilja fokozatosan alacsonyabbá és szélesebbé válik. Hasonlóképpen, ha a közegben belső sűrűlódás lép fel, ami miatt a közeg a hullámtól energiát abszorbeálva felmelegszik, a profil amplitúdója kisebbé válik, a hullám *gyengül*.



a) A  $\Delta x$  kötélszakasz vektorábrája.



b) A  $\Delta x$  kötélszakaszra ható erők vízszintes és függőleges komponensekre bontva.

### 18-3 ábra

Az impulzus áthaladása során a  $\Delta x$  kötélszakaszt a rá ható erők felfelé gyorsítják. A szakasz tömege  $\mu \Delta x$ .

Mindig érdemes a matematikai szimbólumok fizikai jelentését végiggondolni. A  $\partial y / \partial x$  a köté *hajlásszögét* jelenti (minden egyes  $x$  pontban) és  $\partial y / \partial t$  a kötélrészecskék *transzverzális sebességét* (minden egyes  $x$  pontban). Vegyük észre a hullámmozgással kapcsolatos kétféle sebesség közötti különbséget: a kötélrészecskék sebessége *transzverzális* a hullám kötélminti haladásának sebessége *longitudinális*.

Kicsiny  $\theta$  értékekre mind  $\cos \theta$ , mind  $\cos(\theta + \Delta\theta)$  jó közelítéssel 1. Különbségük elhanyagolható, úgyhogy a kötélszakaszra lényegében nem hat vízszintes irányú erő. Azonban e két kicsiny szög szinuszának különbsége viszonylag nagy. Tehát a kötélszakaszra jól észlelhető függőleges (transzverzális) eredő erő hat. Ez az erő:

$$(F_{\text{eredő}})_{\text{transz}} = F \sin(\theta + \Delta\theta) - F \sin \theta \quad (18-2)$$

$$(F_{\text{eredő}})_{\text{transz}} = F \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] \quad (18-3)$$

ahol kicsiny  $\theta$  szögre, mivel  $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \partial y / \partial x$ , ez az  $x$  helyen lévő kötélszakasz hajlásszögét jelenti. A  $\partial y / \partial x$  mennyiség  $x$ -nek és  $y$ -nak valamilyen  $f(x, y)$  függvénye. A  $(\partial y / \partial x)_{x+\Delta x}$  szimbólum azt jelenti, hogy a  $\partial y / \partial x$  függvényt az  $x+\Delta x$  helyen kell venni; hasonlóképpen  $(\partial y / \partial x)_x$  az  $x$  helyen veendő. A zárójelben lévő mennyiség azonban kifejezhető az  $y$  függvény  $x$  szerinti második deriváltjával, hiszen amint ez bármelyik analízis-könyvben megtalálható

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right]}{\Delta x} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (18-4)$$

A második parciális derivált szimbóluma utasítást jelent arra, hogy a parciális deriválást kétszer kell elvégezni:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

a másik  $t$  változót állandó értéken tartva.

A (18-3) és a (18-4) egyenletből az eredő erőre a következőt kapjuk:

$$(F_{\text{eredő}})_{\text{transz}} = F \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Delta x. \quad (18-5)$$

Alkalmazzuk Newton második törvényét a transzverzális mozgásra, és vegyük figyelembe, hogy a kötélszakasz  $m$  tömege  $\mu \Delta x$ :

$$\sum F_y = ma_y$$

Mint hogy  $a_y = \partial^2 y / \partial t^2$ , tehát

$$F \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Delta x = \mu \Delta x \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (18-6)$$

Mindkét oldalt  $\Delta x$ -szel osztva és rendezve, azt kapjuk, hogy:



18-2 ábra

Egyetlen gyors felfelé majd lefelé irányított transzverzális ( $y$  irányú) impulzus létesíthető, ami a kifeszített kötélen az  $x$  irányban végighalad. (A vázlaton az impulzus amplitúdója erősen túlzott.)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{F}{\mu}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (18-7)$$

Az  $F/\mu$  együttható dimenziója tömeg · gyorsulás: tömeg/hosszúság, azaz sebességnek négyzete. Így jelölésünket az  $(F/\mu) = v^2$  helyettesítéssel egyszerűbbé téve megkapjuk a **hullámegyenletet**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (18-8)$$

A hullám-egyenlet a kötélen  $v$  sebességgel haladó transzverzális hullámokat írja le. Az egyenletet egyszerűen úgy kaptuk, hogy a  $\Sigma F = ma$  összefüggést alkalmaztuk a kötélszakasz transzverzális mozgására.

### 18.3 A hullámegyenlet általános megoldása

Miután megkaptuk a haladó hullámok viselkedését leíró hullámegyenletet, a továbbiakban ennek *megoldásait* kell meghatároznunk, azaz az  $x$  és a  $t$  változók olyan függvényeit, amelyek speciális eseteknek felelnek meg. Bármilyen függvényeket kapunk is, azoknak meg kell felelniük a (18-8) egyenlet azon követelményének, hogy idő szerinti második deriváltjuk egyenlő legyen a sebesség négyzetének és a hely szerinti második deriváltjának a szorzatával.

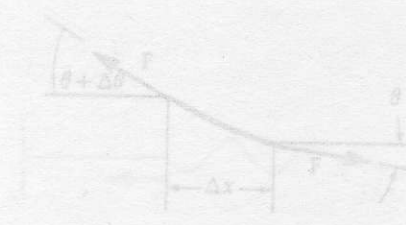
Konkrét példaként vizsgáljuk az  $x$  tengely mentén kifeszített húron haladó hullámot. A 18-4 ábra olyan tetszőleges alakú hullámot ábrázol, ami a pozitív  $x$  tengely irányában halad. Az (a) részábra a  $t = 0$  időpontban ábrázolja a hullámzavart, amikor a hullám alakját valamilyen  $f(x)$  függvény írja le:

$$y = f(x) \quad (t = 0 \text{ időpontban}) \quad (18-9)$$

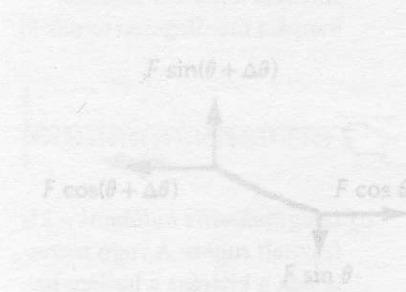
Egy későbbi  $t$  időpontban a hullám  $v$  sebességgel már elmozdult a kötélen mentén, de alakját megtartotta (feltéve, hogy a sűrűdés és a disperzió elhanyagolható). Így az a függvény, amely most írja le a hullámot, a következő:

$$y = f(x-vt) \quad (t = t \text{ időpontban}) \quad (18-10)$$

Első látásra talán csodálkozunk azon, hogy negatív előjel áll abban a függvényben, amelyik az  $x$  tengely pozitív irányában haladó hullámot reprezentál.



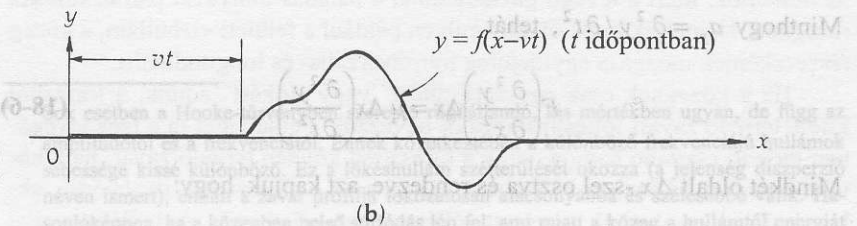
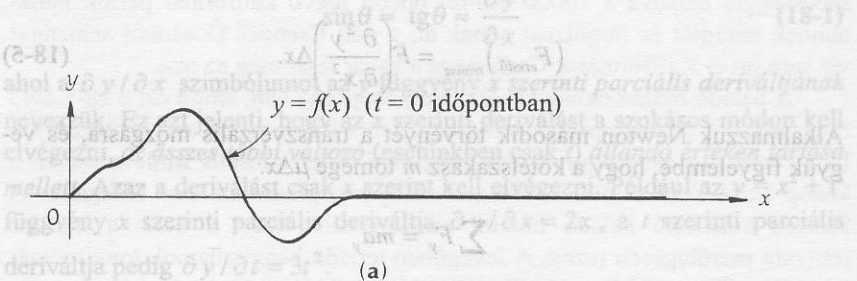
a) A  $\Delta x$  kötélszakasz vektorábrája.



b) A  $\Delta x$  kötélszakaszra ható erők vízszintes és függőleges komponensekre bontva.

18-4 ábra

Egy tetszőleges hullámalak, amely a kifeszített húron az  $x$  tengely pozitív irányában  $v$  sebességgel halad.



tálja. Könnyen beláthatjuk azonban, hogy ez miért helyes. Összpontosítsuk figyelmünket a hullám egy kijelölt  $x$  pontjára, mondjuk a 18-4 ábrán a legmagasabb csúcsra. Tegyük fel, hogy a  $t = 0$  időpontban a csúcson az egyensúlyi helyzettől mért kitérése 2 mm:

$$y_{t=0} = 2 \text{ mm.}$$

Egy későbbi  $t$  időpontban ez a csúcson az  $x = 2\text{mm} + vt$  helyen található. Innen kifejezzük  $y = 2 \text{ mm}$  értékét:

$$y_{t=t} = 2 \text{ mm} = (x - vt).$$

A  $t$  paraméter növelésével  $x$ -nek is pozitív irányban kell nőni, hogy az  $(x - vt)$  érték változatlan maradjon. Láthatjuk, hogy ez megvalósul, mert a csúcson (és a hullám minden más pontja) ugyanazzal a  $v$  sebességgel mozog az  $x$  tengely pozitív irányában. Így módon felfedeztünk egy lényeges tényt a hullámegyenlet mindazon megoldására vonatkozóan, amelyek egy, az  $x$  tengely pozitív irányában haladó mozgást reprezentálnak: *szükséges, hogy minden megoldás az  $(x - vt)$  mennyiség függvénye legyen. Minden  $y = f(x - vt)$  általános alakú függvény<sup>2</sup> ilyen haladó hullámot ír le. (Ezt megmutathatjuk, ha  $y$  értékét a hullámegyenletbe helyettesítjük, és igazoljuk, hogy az idő szerinti második derivált egyenlő a sebesség négyzetének és a hely szerinti második deriváltnak a szorzatával.) A konkrét függvény az ábrázolni kívánt hullám alakjától fog függni.*

Bizonyítsuk be, hogy a hullám sebessége valóban  $v$ . Ha követjük a hullám alak egyik kijelölt pontját (mondjuk a csúcson) amint az az  $x$  tengely mentén halad, nyilvánvaló, hogy

$$(x - vt) = \text{állandó.} \quad (18-11)$$

Az idő szerint differenciálva

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad (18-12)$$

$$\text{vagy } \frac{dx}{dt} = v$$

Tehát az a sebesség, amellyel a hullám egyik pontja (és így a teljes hullám) az  $x$  tengely mentén halad, valóban  $v$ . Ezt a sebességet a hullám **fázis-sebességének** nevezzük, mert a hullám egyik pontjának megadása a hullám **fázisának** megadását jelenti.

Hasonló érveléssel arra jutunk, hogy az  $x$  tengely **negatív** irányában haladó hullámok  $(x + vt)$  függvényei. Tehát:

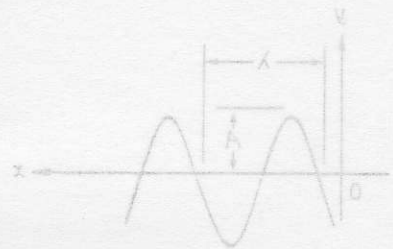
$$y = f(x - vt) \quad (x \text{ tengely pozitív irányában haladó hullámok})$$

$$y = f(x + vt) \quad (x \text{ tengely negatív irányában haladó hullámok})$$

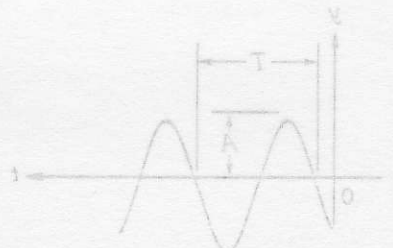
### 18.4 A hullámegyenlet megoldása egy speciális esetben

Vegyük most egy speciális esetet – a kifeszített húron terjedő **szinuszhullám** esetét. Matematikai leírás szempontjából ez az egyik legegyszerűbb hullám.

<sup>2</sup> Az a kifejezés, hogy „az  $(x - vt)$  mennyiség függvénye”, azt jelenti, hogy  $x$ -nek és  $t$ -nek mindig ugyanabban az  $(x - vt)$  alakzatban kell megjelennie. Tehát  $\sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x - vt)\right]$  és  $(x - vt)$  megfelelő, de  $x^2 - (vt)^2$  nem.

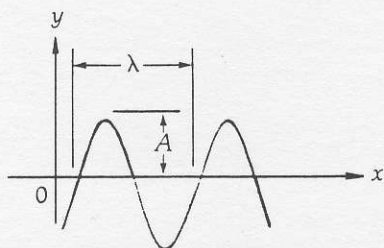


(a) A  $t$  paraméter töltése,  $y$  -vel szemlélve a hullám terjedését a  $x$  tengely mentén. A hullám sebessége  $v$  és az  $x$  tengely pozitív irányában halad.

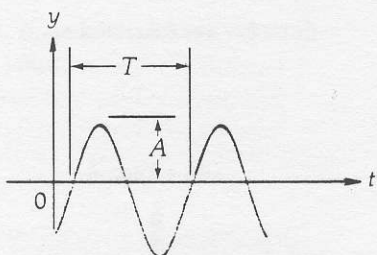


(b) A  $t$  paraméter töltése,  $y$  -vel szemlélve a hullám terjedését a  $x$  tengely mentén. A hullám sebessége  $v$  és az  $x$  tengely negatív irányában halad.

18-4 ábra  
A  $y = f(x - vt)$  alakú hullám terjedését a  $x$  tengely pozitív irányában. A maximális kitérés  $A$  és a hullámhossz  $\lambda$  az  $x$  tengely pozitív irányában halad.



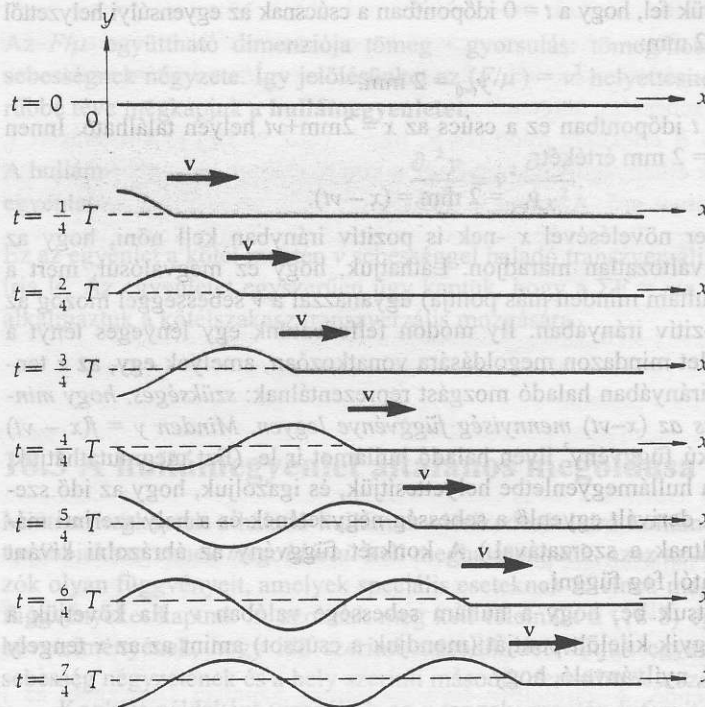
a) A  $t$  paramétert rögzítve, figyeljük a húr teljes hosszában a húr (pillanatnyi) transzverzális kitérésére összpontosítjuk. A  $\lambda$  hullámhossz az azonos fázisban lévő két szomszédos pont távolsága.



b) Az  $x$  paramétert rögzítve, a húr  $x$  koordinátájú pontjának időbeli transzverzális mozgását vizsgáljuk: ez egyszerű harmonikus rezgő mozgás az  $y$  irányban. A  $T$  rezgésidő egy teljes rezgéshez szükséges időtartam.

**18-6 ábra**

Az  $y = A \sin(2\pi x/\lambda - 2\pi t/T)$  alakú haladó szinuszhullám. A maximális kitérés nagysága az  $A$  amplitúdó.



**18-5 ábra**

A kifeszített húr végpontjára kényszerített transzverzális harmonikus rezgések által keltett haladó szinuszhullámok. A  $T$  időtartam az egyszerű harmonikus rezgő mozgás periódusideje.

Ezen kívül ez megfelelő választás is, mert *minden periodikus hullám*, mindegy, hogy mennyire bonyolult, leírható különböző frekvenciájú szinusz- és koszinuszfüggvények összegeként. Az ilyen típusú összeget, amit az  $F$  függelék tárgyal, Fourier sornak nevezik. Ha megtanuljuk, hogyan kell kezelni egyetlen szinuszhullámot, akkor már rendelkezünk azzal az alapvető tudással, amivel a Fourier analízist felhasználva bármilyen bonyolultságú periodikus hullámot kezelni tudunk.

A 18-5 ábra egy szinuszhullámot mutat be, ami akkor jön létre, ha a húr egyik végére transzverzális irányban egyszerű harmonikus rezgő mozgást kényszerítünk. A haladó szinuszhullám matematikai leírásának többféle módja van, ilyen pl. a következő:

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt). \tag{18-13}$$

Ez a hullámfüggvény világosan kifejezésre juttatja azt a tényt, hogy az  $y$  kitérés  $(x - vt)$  függvénye így tehát valóban olyan hullámot ír le, ami az  $x$  tengely pozitív irányában halad. Célszerűbb azonban az egyszerű harmonikus mozgásnál bevezetett jelöléseket használni (lásd a 18-6 ábrát):

- $\lambda =$  **hullámhossz**, két szomszédos azonos fázisú pont távolsága
- $T =$  **periódusidő**, az az időtartam, amely alatt egy adott pontban egy teljes rezgés végbemegy
- $f =$  **frekvencia**, ( $f = 1/T$ ), egy adott pontban az egy másodperc alatt végzett rezgések száma
- $A =$  **amplitúdó**, a legnagyobb  $y$  irányú kitérés nagysága

Fizikailag a mozgás **forrása** határozza meg a *frekvenciát*, a **közeg** (itt a kifejtett húr) pedig a *sebességet*. A frekvencia és a sebesség segítségével kiszámítható a *hullámhossz*. Minthogy  $T$  idő szükséges ahhoz, hogy a hullám  $v$  sebességgel egy teljes  $\lambda$  hullámhosszal terjedjen tovább, ezért

$$\lambda = vT \quad \text{vagy} \quad f\lambda = v \quad (18-14)$$

Behelyettesítve a (18-13) egyenletbe, a hullámfüggvény egy másik, jól alkalmazható alakját kapjuk:

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (18-15)$$

Egy még tömörebb és még inkább használható írásmód a  $k$  **hullámszám**<sup>3</sup> és a  $(2\pi f)$ -fel egyenlő  $\omega$  **körfrekvenciát** alkalmazza:

$$\text{Hullámszám} \quad k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{Körfrekvencia} \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{T}$$

(Ne tévesszük össze ezt a  $k$  szimbólumot azzal a  $k$  szimbólummal, amit az inerciasugárra és a rugóállandóra használtunk.) Minthogy  $kx$  és  $\omega t$  a szinuszfüggvény argumentumában szerepel, ezért ennek a kettőnek (*radián* egységben megadott) dimenzió nélküli kifejezésnek kell lennie.

A (18-15) egyenletbe helyettesítéssel kapjuk:

$$\text{Haladó} \quad y = A \sin(kx - \omega t) \quad (\text{az } x \text{ tengely pozitív irányában haladó szinuszhullám}) \quad (18-16)$$

$$\text{szinuszhullámok} \quad y = A \sin(kx + \omega t) \quad (\text{az } x \text{ tengely negatív irányában haladó szinuszhullám})$$

Mielőtt numerikus példákat mutatnánk, igazoljuk, hogy a kapott megoldás kielégíti a (18-8) általános hullámegyenletet! Szükségünk van mind az idő szerinti, mind a hely szerinti parciális deriváltakra.

#### Idő szerinti deriváltak

#### Hely szerinti deriváltak

$$y = A \sin(kx - \omega t) \quad y = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Láthatjuk, hogy a második deriváltak olyan kapcsolatban vannak, ami megfelel a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (18-17)$$

hullámegyenletnek. Mivel  $\omega/k = (2\pi/T) : (2\pi/\lambda) = \lambda/T = f\lambda = v$ , a (18-7) és a (18-8) egyenletekkel összehasonlítva azt kapjuk, hogy

<sup>3</sup> Analógiában az  $\omega$  körfrekvencia elnevezéssel, alkalmasabb lehetne a  $k$  körhullámszám elnevezés. A kvantummechanikában ezt a mennyiséget *redukált hullámszámnak* mondják.

A kifeszített húron  
haladó transzverzális  
hullám  $v$  terjedési sebessége

$$v = f \lambda = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (18-18)$$

ahol  $F$  a húrt feszítő erő, és  $\mu$  a hosszegységre jutó tömeg (a lineáris tömegsűrűség). Tehát a kapott megoldás megfelel a hullámegyenletnek. Azt is láttuk, hogy a  $v$  állandó valóban a hullám terjedési sebessége. Vegyük észre, hogy a sebesség nő, ha az  $F$  feszítőerő nő, vagy ha a  $\mu$  lineáris tömegsűrűség csökken. Mindkét esetben növekszik az a *visszatérítő gyorsulás*, ami a húr egyensúlyi helyzetbe való visszatérését sietteti. Így a sebességre kapott összefüggés egyezik a húr viselkedéséről alkotott elképzelésünkkel.

### 18-1 PÉLDA

Kifeszített húr mentén haladó szinuszhullámot az alábbi egyenlet ír le:

$$y(x, t) = 0,0020 \sin(10x - 120t) \quad (\text{SI egységekben})$$

ahol  $y$  a húr méterben mért transzverzális kitérése,  $x$  a húr mentén méterben mért távolság és  $t$  a másodpercben mért idő. a) Határozzuk meg a húr transzverzális kitérésének amplitúdóját, b) a haladó hullám hullámhosszát, c) frekvenciáját és d) a hullámterjedés sebességét!

### MEGOLDÁS

Az  $y(x, t) = 0,0020 \sin(10x - 120t)$  egyenletet a kifeszített húron haladó hullám általános  $y = A \sin(kx - \omega t)$  egyenletével összehasonlítva, látjuk, hogy

a)  $A = 0,0020 \text{ m}$

b)  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10$ , azaz  $\lambda = \frac{2\pi}{10} = 0,628 \text{ m}$

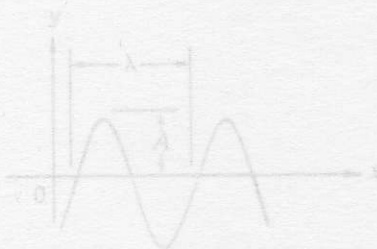
c)  $\omega = 2\pi f = 120$ , azaz  $f = \frac{120}{2\pi} = 19,1 \text{ Hz}$

d)  $v = f \lambda = (19,1 \text{ s}^{-1})(0,628 \text{ m}) = 12,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

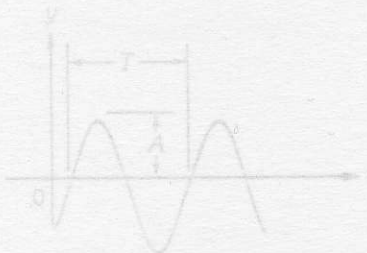
## 18.5 A hullám terjedési sebessége

Az előzőekben tárgyaltuk a kifeszített húron terjedő transzverzális hullám terjedési sebességét. Más típusú hullámok is az adott közeg rugalmas tulajdonságaitól függő sebességgel haladnak. Például a hanghullámok, amelyek sűrűsödési- és ritkulási longitudinális hullámok, különböző sebességgel terjednek szilárd anyagban, folyadékban és gázban. A fiatal emberek füle számára az érzékelhető frekvenciatartomány kb. 20 Hz -től 20000 Hz -ig terjed. A hallható frekvencia alatti longitudinális mechanikai hullámot **infrahang**-hullámnak, míg azokat, amelyek a hallható frekvenciák fölött vannak, **ultrahang**-hullámoknak nevezzük.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Sok állatfaj képes meghallani az ultrahangot. Például a barna delfinek érzékelni tudják egészen a kb. 120kHz-ig terjedő frekvenciákat, de a 10 000 Hz-nál alacsonyabbat nem hallják meg. Tehát a barna delfin nem hallja a zongora hangját, (a zongora legmagasabb



a) A  $t$  paramétert rögzítve, figyelmünket a húr teljes hosszában a húr (pillanatnyi) transzverzális kitérésére összpontosítjuk. A  $\lambda$  hullámhossz az azonos fázisban lévő két szomszédos pont távolsága.



b) Az  $x$  paramétert rögzítve, a húr  $x$  koordinátájú pontjának időbeli transzverzális mozgását vizsgáljuk: ez egyszerű harmonikus rezgő mozgás az  $y$  irányban. A  $T$  rezgésidő egy teljes rezgéshez szükséges időtartam.

### 18-6 ábra

Az  $y = A \sin(2\pi x/\lambda - 2\pi t/T)$  alakú haladó szinuszhullám. A maximális kitérés nagysága az  $A$  amplitúdó.



Bizonyítás nélkül közlünk néhány összefüggést a különböző típusú hullámok terjedési sebességére. Jegyezzük meg, hogy a sebességre vonatkozó összefüggés alakja minden esetben

$$v = \sqrt{\frac{\text{Rugalmassági modulusz}}{\text{Sűrűség}}} \quad (18-19)$$

alakú. (A deformálható anyagokat jellemző rugalmassági moduluszokat a 13.11 fejezetben tárgyaltuk.)

Sűrűsödés-ritkulás-  
hullám sebessége  
folyadékokban vagy  
szilárd rúdiban

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (18-20)$$

ahol  $K$  a közeg kompressziómodulusza ill. szilárd anyagokban a Young modulusza,  $\rho$  a sűrűsége. A földrengés által keltett *primér hullám*, vagy *P-hullám* hasonló ehhez a hullámtípushoz, (jóllehet sebességének precíz kifejezése kissé bonyolultabb). A primér hullámok gyorsabban terjednek, mint más földrengéshullám, így előbbieket elsőknek érkeznek a távoli észlelő állomáshoz. A *szekunder hullámok* vagy *S-hullámok* tanszverzális hullámok, amelyek szilárd közegben haladva nyírófeszültséget hoznak létre.

Szilárd anyagban  
terjedő tanszverzális  
(nyíró) hullám sebessége

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (18-21)$$

ahol  $G$  a szilárd anyag nyírási modulusza. Minthogy a folyadékok és gázok nem tudnak nyírófeszültséget kifejteni, azért az ilyen hullámok csak szilárd anyagokban léteznek. A Föld felszíne alá 2900 km-nél mélyebbre nem jut nyíróhullám, amiből következik, hogy ebben a mélységben a Föld magja folyékony állapotban van. (Szeizmikus mérések egy kb. 5100 km mélységben lévő szilárd mag létezését is bizonyítják.) A harmadik földrengés-hullám típusa a *hosszú hullám*, vagy *L-hullám*, ami az S-hullámnál valamivel kisebb sebességgel a felületen halad. Az L-hullámok a víz-hullámokhoz hasonlítanak, ezekben tanszverzális és longitudinális mozgás egyaránt jelen van, és messze a legpusztítóbb hatásúak.

A hangsebesség levegőben valamelyest bonyolultabb összefüggéssel adható meg, mert több tényezőtől függ. Az előbb tárgyaltakból arra lehetne következtetni, hogy a sebesség  $v = \sqrt{K/\rho}$  kellene, hogy legyen. Newton jó fizikai érveléssel valóban levezetett egy ehhez hasonló formulát. Ez azonban kb. 20%-kal<sup>5</sup> eltér a helyes eredménytől. Egy Newton idejében még ismeretlen effektus következtében a gázok kompressziómodulusza két különböző értéket vehet fel attól függően, hogy az összenyomás és a ritkulás (a nyomás egyensúlyi értéke *fölötti* és *alatti* nyomástartomány) állandó hőmérsékleten

frekvenciája 4186 Hz), sem az emberi beszédet, sem a legtöbb vízalatti hangszóró hangját, mert ezek felső frekvenciahatára korlátozott. Következésképpen a barna delfinnekkel végzett kommunikációs kísérletek egy része eleve sikertelenségre volt ítélve, mert a kísérletező nem volt tudatában a delfin hallóképessége alsó határának. Kevés állatnak van meg az a képessége, hogy olyan alacsony frekvenciát is érzékeln tudjon, mint az ember.

<sup>5</sup> Annak érdekében, hogy a kételkedőket meggyőzze, Newton esetenként mindent elkövetett, hogy elméletét a kísérleti adatokkal jobb egyezésbe hozza. Richard W. Westall szerint [„Newton and the Fudge Factor”, *Science* 179 (Feb. 23, 1973), p.751.] eklatáns példája volt ennek az a próbálkozás, hogy az elmélet és a kísérleti eredmények között mutatkozó 20%-os eltérést olyan „korrekciós faktor” bevezetésével hozza helyre, aminek tudományos alapja nem volt. Newtonnak ez az emberi gyengesége azonban nem homályosítja el teljesítményének mérhetetlen nagyságát.

#### 18-7 ábra.

Levegővel telt cső egyik végében lévő dugattyúra harmonikus rezgő mozgást kényszerítünk, az így keltett longitudinális hullámot illusztrálják az egymást követő „állóképek”. A sűrűsödésekből és ritkulásokból álló rendszer állandó sebességgel halad a csőben, miközben a közeg részecskéi a haladás irányában egyszerű harmonikus rezgő mozgást végeznek.

(izotermikusan) vagy hőátadás nélkül (adiabatikusan) történik. Mint ezt Pierre Simon de Laplace kb. egy századdal később kimutatta, a hang terjedése adiabatikusan megy végbe.

$$v = \sqrt{\frac{K_{\text{adiabatikus}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma K_{\text{izotermikus}}}{\rho}} \quad (18-22)$$

ahol  $\gamma = C_p / C_v$  (levegőre 1,4), a gáz állandó nyomáson és állandó térfogaton vett moláris fajhőjének hányadosa<sup>6</sup>. A képlet egyenértékű a

$$v = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad (18-23)$$

összefüggéssel, ahol  $p$  a gáz nyomása. A hang kísérletileg kapott terjedési sebessége 20 °C hőmérsékletű levegőben

$$v = 344 \text{ m/s} \quad (18-24)$$

jó egyezésben a (18-23) egyenletből számítható értékkel. Bonyolultabb vizsgálatok mutatják, hogy a hangsebesség a  $K$  abszolút hőmérséklet ( $273 + t^\circ\text{C}$ ) négyzetgyökével arányos [lásd a (19-25) egyenletet].

## 18.6 Síkbeli és térbeli hullámok

A kifeszített húron kialakuló transzverzális hullámokra kidolgozott egyenletek más típusú hullámmozgást is leírhatnak. Ehhez csak az szükséges, hogy az  $y$  kitérést a közeg részecskéinek egyensúlyi helyzet körül végzett mozgásként értelmezzük. Az egyenletek egyaránt jól alkalmazhatók a transzverzális és a longitudinális hullámokra.

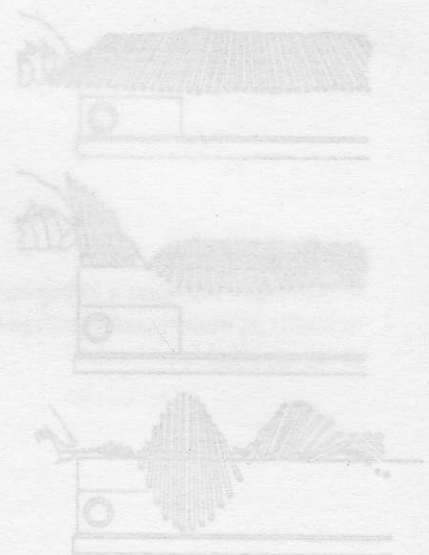
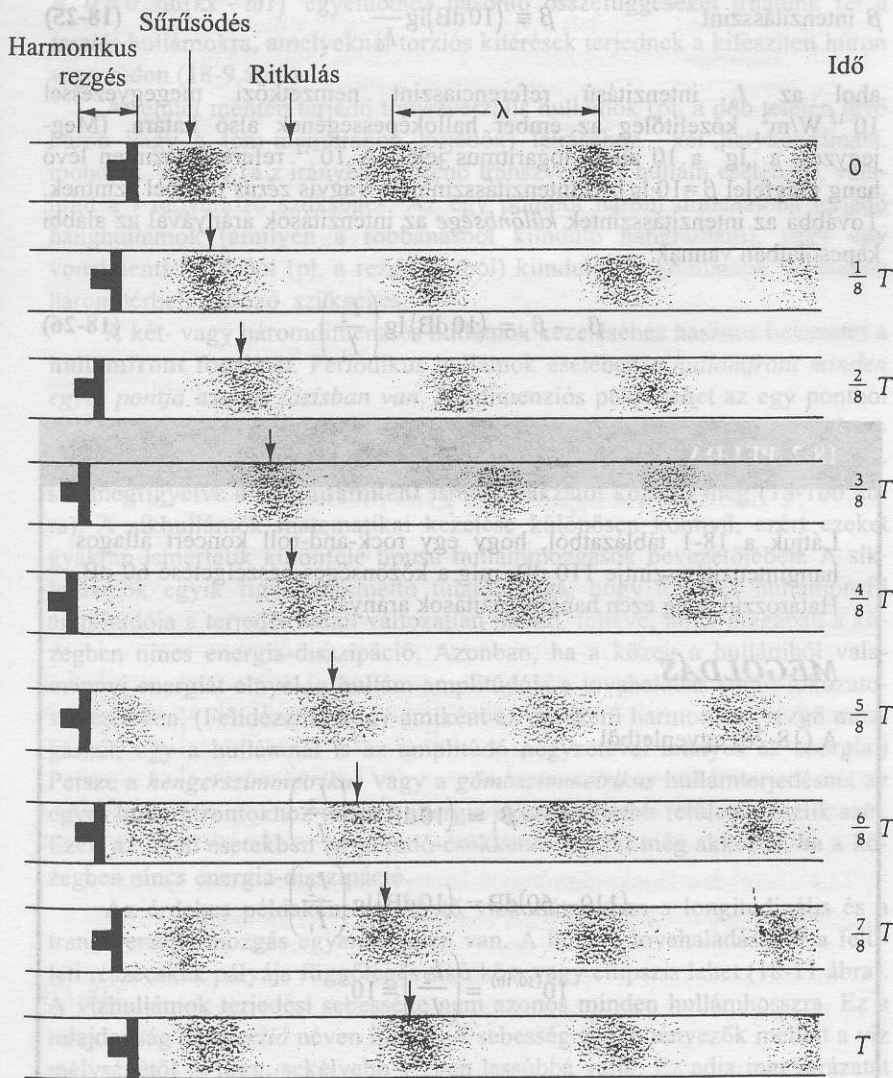
Ha egy cső végében elhelyezett dugattyút egyszerű harmonikus rezgőmozgással mozgatunk, akkor a benne lévő levegőben longitudinális szinuszhullám jön létre (18-7 ábra). Midőn a levegő gázmolekulái nyugalmi helyzetük körül rezegnek, nagy nyomású tartományok (vagy *sűrűsödések*) alakulnak ki, ezeket szomszédos kis nyomású tartományok (vagy *ritkulások*) követik. Ez a nyomáskülönbség-rendszer állandó sebességgel halad előre a cső mentén. Ezt szemléltetik az ábrán látható nyilak. Itt persze hanghullámokról van szó. Az emberi fül érzékelő képességének néhány jellemzője a 18-1 táblázatból és a 18-8 ábrából kiolvasható<sup>7</sup>.

A  $\beta$  hangintenzitás-szintet *decibel*<sup>8</sup> (dB) egységben az alábbi definíció adja meg:

<sup>6</sup> A moláris fajhő (mólhő) definíció szerint az a hőmennyiség, amely ahhoz szükséges, hogy az anyag egy mólnyi mennyiségének hőmérsékletét 1 °C-kal emelje. Gázok esetében ez állandó nyomáson ( $C_p$ ), vagy állandó térfogaton ( $C_v$ ) történhet. Ezt részletesen majd a 21. fejezetben tárgyaljuk.

<sup>7</sup> Az emberi fül annyira érzékeny, hogy  $3 : 10^{10}$  arányú nyomásváltozást is érzékelné tud. Ez  $10^{12} \text{ W/m}^2$  hangintenzitásnak felel meg, ehhez a levegő molekuláinak kb. egytized atom-sugárnyi amplitúdóval történő mozgása tartozik!

<sup>8</sup> A decibel (dB) egység Alexander Graham Bellről kapta nevét. Az emberi hallás-érzékenység nagyon nagy tartományt ölel fel. Az intenzitás-arányok logaritmusán alapuló intenzitás-szint két okból is kényelmes: először (és főleg), mert az emberi hangérzékelés olyan skálán lineáris, amelyben minden 10 dB növekedéssel a hang erőssége közelítőleg megkétszereződik. Ezen felül a legkisebb érzékelhető intenzitás-változás – az intenzitástól függetlenül – egy decibel nagyságrendű. Másodszor, az érzékelhető intenzitástartomány 12 nagyságrendű mérete miatt a logaritmikusk skála sokkal kényelmesebb a lineárisnál. Maradandó sérülések elkerülése érdekében a tartósan 90 dB fölötti terhelés esetében fülvédő használata ajánlatos. Bizonyíték van arra, hogy már lényegesen alacsonyabb szintű "zaj-szennyezés" is idegességet és vérnyomás-növekedést okozhat.



**18-7 ábra**  
 Levegővel telt cső egyik végében lévő dugattyúra harmonikus rezgő mozgást kényszerítünk, az így keletkezett longitudinális hullámot illusztrálják az egymást követő „állóképek”. A sűrűsödésekből és ritkulásokból álló rendszer állandó sebességgel halad a csőben, miközben a közeg részecskéi a haladás irányában egyszerű harmonikus rezgő mozgást végeznek.

**18-9 ábra**  
 A Bell Telefon Laboratórium által kifejlesztett készülék a hullámmozgás szemléltetésére torzítás hullámot alkalmaz. A vízszintesen kifeszített huzalra fémrudakat erősítenek a középpontjukkal felfelé. Ha a szélső rudra egyszerű harmonikus rezgést kényszerítünk, akkor a

**18-1 Táblázat**  
 A hangerősség közelítő értéke egy közeli megfigyelő számára

	Intenzitás (W/m <sup>2</sup> )	Intenzitás-szint (dB)
Nagy rakétamotor	10 <sup>6</sup>	180
Felszálló lökhajtásos gép	10 <sup>3</sup>	150
Fájdalmat okozó hangerő	1	120
Rock and roll zenekar	10 <sup>-1</sup>	110
Légkalapács vagy szegecselő	10 <sup>-2</sup>	100
A halláskárosodáshoz vezető tartós zajszint	10 <sup>-3</sup>	90
Erős utcai forgalom	10 <sup>-5</sup>	70
Normál beszélgetés	10 <sup>-6</sup>	60
Átlagos suttogás	10 <sup>-10</sup>	20
Alig hallható hang	10 <sup>-12</sup>	0

$$\beta \text{ intenzitásszint} \quad \beta \equiv (10 \text{ dB}) \lg \frac{I}{I_0} \quad (18-25)$$

ahol az  $I_0$  intenzitású referenciaszint nemzetközi megegyezéssel  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , közelítőleg az ember hallóképességének alsó határa. (Megjegyzés: a „lg” a 10 alapú logaritmus jele.) A  $10^{-12}$  referenciaszinten lévő hang megfelel  $\beta=10 \cdot \lg 1=0$  intenzitásszintnek, vagyis zérus decibel szintnek. Továbbá az intenzitásszintek *különbsége* az intenzitások arányával az alábbi kapcsolatban vannak:

$$\beta_2 - \beta_1 = (10 \text{ dB}) \lg \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \quad (18-26)$$

**18-2 PÉLDA**

Látjuk a 18-1 táblázatból, hogy egy rock-and-roll koncert átlagos hangintenzitás-szintje 110 dB, míg a közönség beszélgetése 60 dB. Határozzuk meg ezen hangintenzitások arányát.

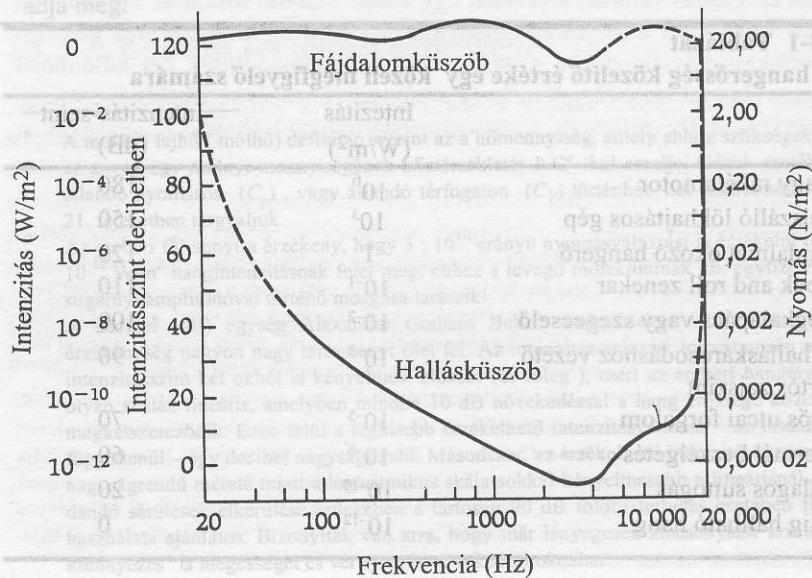
**MEGOLDÁS**

A (18-26) egyenletből

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= (10 \text{ dB}) \lg \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \\ (110 - 60) \text{ dB} &= (10 \text{ dB}) \lg \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \\ 10^{(50/10)} &= \left( \frac{I_2}{I_1} \right) = 10^5 \end{aligned}$$

**18-8 ábra**

Az érzékeny emberi fül számára hallható frekvencia- és intenzitástartományok. Nagyjából az emberiség fele számára a hallható hangintenzitás az alsó görbéhez tartozó értéknek durván 10–100-szorosa. A tartósan 90 dB-nél nagyobb hangszint maradandó halláskárosodást okoz.

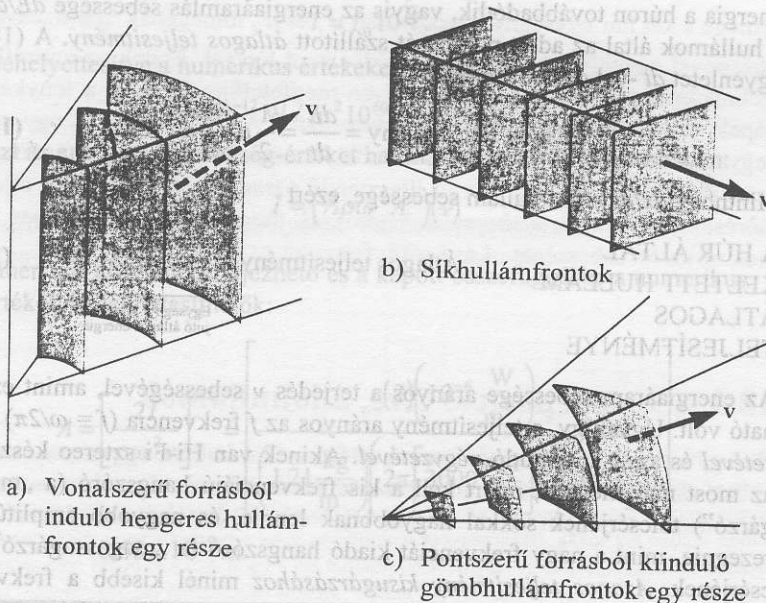


A  $\theta = \theta_0 \sin(kx - \omega t)$  egyenlethez hasonló összefüggéseket írhatunk fel a torziós hullámokra, amelyeknél torziós kitérések terjednek a kifeszített húron vagy rúdon (18-9 ábra).

A felület mentén terjedő transzverzális hullámok (pl. a dob tetején lévő bőrön vagy a fém-membránon terjedők) leírásához két helykoordináta, mondjuk  $x$  és  $y$  (a  $z$  irányban történő transzverzális hullám esetében), valamint a  $t$  időváltozó szükséges. Az egy pontból három dimenzióba terjedő hanghullámok (amilyen a robbanásból kiinduló hanghullám), vagy egy vonalmenti forrásból (pl. a rezgő hűrből) kiinduló hanghullámok leírásához három térbeli változó szükséges.

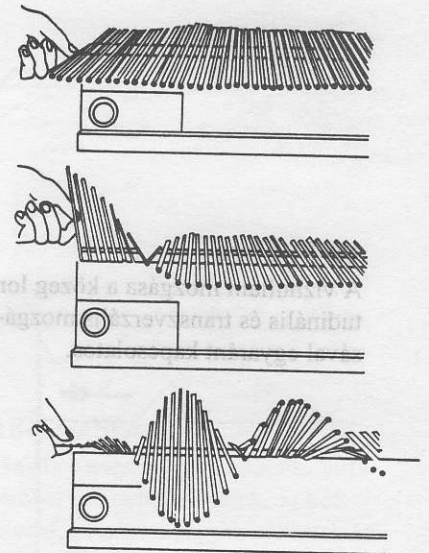
A két- vagy háromdimenziós hullámok kezeléséhez hasznos bevezetni a **hullámfront** fogalmát. Periodikus hullámok esetében a **hullámfront minden egyes pontja azonos fázisban van**. Kétdimenziós példa lehet az egy pontból (a vízbe dobott kavics helyéről) induló víz hullám. Itt a hullámfrontok koncentrikus körök. Minden háromdimenziós hullámfront a forrástól elég messze megfigyelve a **síkhullámként** ismert alakzatot közelíti meg (18-10b ábra). A síkhullámok matematikai kezelése különösen könnyű, ezért ezeket gyakran ismertetik különféle típusú hullámmozgások bevezetőjében. A síkhullámok egyik figyelemreméltó tulajdonsága, hogy a teljes hullámprofil amplitúdója a terjedés során változatlan marad, feltéve, hogy magában a közegben nincs energia-disszipáció. Azonban, ha a közeg a hullámból valamennyi energiát elnyel, a hullám amplitúdója a tovahaladás során fokozatosan csökken. (Felidézzük, hogy amiként az egyszerű harmonikus rezgő mozgásnál, úgy a hullámnál is az amplitúdó négyzetével arányos az energia.) Persze a **hengersizimetrikus** vagy a **gömbszimetrikus** hullámterjedésnél az egyes hullámfrontokhoz tartozó energia egyre nagyobb felületen oszlik szét. Ezért az ilyen esetekben amplitúdó-csökkenés lép fel még akkor is, ha a közegben nincs energia-disszipáció.

Az érdekes példaként említhető víz hullámokban a longitudinális és a transzverzális mozgás egyaránt jelen van. A hullám tovahaladásakor a felületi részecskék pályája függőleges síkú kör- vagy ellipszis lehet (18-11 ábra). A víz hullámok terjedési sebessége nem azonos minden hullámhosszra. Ez a tulajdonság **diszperzió** néven ismert. A sebesség egyéb tényezők mellett a víz mélységétől is függ, sekélyebb vízben lassúbbá válik. Ez adja magyarázatát annak, hogy a tenger hullámai parthoz közeledve átbuknak és megtörnek. A hullám tarajának elegendő előre irányuló impulzusa van ahhoz, hogy a hullám fő tömegén, amely a sekélyebb vízben lelassul, átbukjon.



a) Vonalszerű forrásból induló hengeres hullámfrontok egy része

c) Pontszerű forrásból kiinduló gömbhullámfrontok egy része



18-9 ábra

A Bell Telefon Laboratórium által kifejlesztett készülék a hullámmozgás szemléltetésére torziós hullámot alkalmaz. A vízszintesen kifeszített húzra fémrudakat erősítenek a középpontjuknál fogva. Ha a szélső rudra torziós rezgést kényszerítünk, akkor a huzal mentén torziós szinuszhullám halad végig.

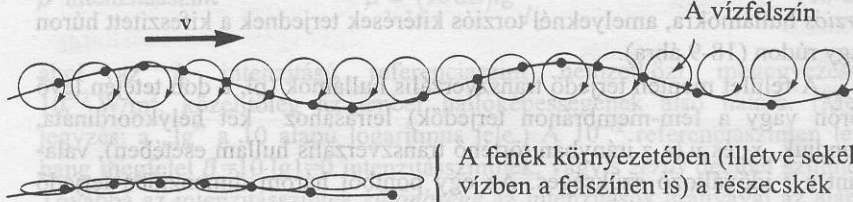
18-10 ábra

A hullámfrontok olyan képzeletbeli felületek amelyek pontjai azonos fázisban vannak. A pontszerű- vagy vonalszerű forrástól nagyon nagy távolságban a görbült hullámfront kis része lényegében síkhullám.



18-11 ábra

A víz hullám mozgása a közeg longitudinális és transzverzális mozgásával egyaránt kapcsolatos.



A fenék környezetében (illetve sekély vízben a felszínen is) a részecskék általában ellipszis pályán mozognak.

### 18.7 A hullámmozgás energiaviszonyai

Megmutattuk, hogy a hullámterjedés energiát és impulzust szállít a távolba, anélkül, hogy a közeg részecskéi ténylegesen megtennék az adott távolságot. Az energiabetáplálás a hullámforrásba történik, s ezt az energiát a zavarhullám szállítja a távoli helyre, ahol ez kinyerhető. A következőképpen kiszámítjuk az *energiaáramlás sebességét*, vagyis azt a sebességet, amellyel a szinusz hullámok a kifeszített húr adott pontja felé szállítják az energiát. A húr lineáris tömegsűrűsége  $\mu$ , így a a húr elemi tömege  $dm = \mu \cdot dx$ . Minden egyes  $dm$  elemi tömeg ugyanazzal az  $\omega = 2\pi f$  körfrekvenciával és ugyanazzal az  $A$  amplitúdóval végez egyszerű harmonikus rezgő mozgást. A 7. fejezetre hivatkozva az egyszerű harmonikus rezgő mozgás teljes  $E$  energiája  $1/2 k A^2$ , ahol  $k$  a Hooke törvénnyel kapcsolatos rugóállandó. Tudjuk a 15. fejezetből, hogy  $k = m\omega^2$ , így a  $dm$  elemi tömeg teljes  $dE$  energiája

$$dE = 1/2 dm \omega^2 A^2 \quad (18-27)$$

Jobbra haladó hullámok esetében ez az energia abból a munkából származik, amit a bal oldalon a húr egy szakasza által gyakorolt erő végez a  $dm$  elemi tömegen. Másfelől ez az elemi tömeg a jobb oldali szomszédján maga is munkát végez, és így az energiát továbbadja. Az a sebesség, amivel az energia a húron továbbadódik, vagyis az energiaáramlás sebessége  $dE/dt$ . Ez a hullámok által az adott ponton át szállított *átlagos teljesítmény*. A (18-27) egyenletet  $dt$ -vel osztva kapjuk:

$$\text{Átlagos teljesítmény} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu \frac{dx}{dt} \omega^2 A^2 \quad (18-28)$$

Mínt hogy  $dx/dt = v$ , a hullám sebessége, ezért

A HÚR ÁLTAL KELTSETT HULLÁM ÁTLAGOS TELJESÍTMÉNYE

$$\text{Átlagos teljesítmény} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (18-29)$$

Egységnyi hosszra jutó átlagos energia

Az energiaáram sebessége arányos a terjedés  $v$  sebességével, amint ez várható volt. Ugyanígy, a teljesítmény arányos az  $f$  frekvencia ( $f = \omega/2\pi$ ) *négyzetével* és az  $A$  amplitúdó *négyzetével*. Akinek van Hi-Fi sztereo készüléke, az most már megérti, miért kell a kis frekvenciájú hangszóró (a „mélyszugárzó”) tölcserjének sokkal nagyobbak lennie, és nagyobb amplitúdóval rezegnie, mint a nagy frekvenciát kiadó hangszóró (a „magassugárzó”) tölcserjének. *Azonos teljesítmény kisugárzásához* minél kisebb a frekvencia, annál nagyobb amplitúdójú hanghullám szükséges.

18-8 ábra

Az érzékeny emberi fül számára hallható frekvencia-terület. A hullámterjedés sebessége a közegben függ a hullámhosszától. A hullámhossz növekedésével a sebesség is növekszik. A hullámhossz csökkenésével a sebesség is csökken. A hullámhossz és a sebesség közötti kapcsolat a hullámterjedés sebességétől függően változik. A hullámhossz és a sebesség közötti kapcsolat a hullámterjedés sebességétől függően változik.

Háromdimenziós hanghullámok esetében az egységnyi felületen normális irányban átfolyó átlagos teljesítményt definíció szerint az **átlagos energiaáramsűrűségnek** nevezzük és  $I_{\text{át}}$  szimbólummal jelöljük. A (18-30) egyenlettel analóg levezetés a következőre vezet:

$$I_{\text{át}} = \frac{\text{Átlagos teljesítmény}}{\text{Felület}} = \left( \frac{\text{Átlagos energia}}{\text{Térfogat}} \right) (\text{Sebesség})$$

Síkbéli hanghullám  
átlagos

energiaáramsűrűsége

(Az egységnyi felületen áthaladó

átlagos teljesítmény)

$$I_{\text{át}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad (18-30)$$

Egységnyi térfogatra jutó átlagos energia

ahol  $\rho$  a levegő sűrűsége (tömeg/térfogat). Az  $I_{\text{át}}$  áramsűrűséget watt/méter<sup>2</sup> egységgel mérjük. Figyeljük meg a hasonlóságot ezen egyenlet alakja és a húron végighaladó hullámmal átvitt teljesítményre érvényes egyenlet alakja [(18-29) egyenlet] között.

**18-3 példa**

Határozzuk meg a 3000 Hz frekvenciájú és 60 dB átlagos intenzitátszintű sík hanghullámban rezgő levegőmolekulák amplitúdóját. A hangsebesség 343 m/s, a levegő sűrűsége 1,21 kg/m<sup>3</sup>.

**MEGOLDÁS**

A decibel skála a hangintenzitások olyan összehasonlítására alkalmas, ahogyan az emberi fül érzékeli a különbséget az eltérő hangintenzitások között, de fizikai szempontból maga az energiaáramsűrűség sokkal jelentősebb. A (18-25) egyenlet alkalmazásával a 60 dB intenzitátszintet átszámíthatjuk  $I$  energiaáramsűrűsége:

$$\beta \equiv 10 \log \frac{I}{I_0}$$

ahol  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ .  $I$ -re megoldva

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket, kapjuk:

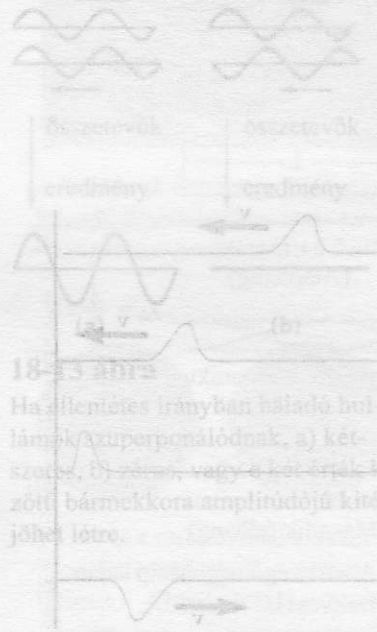
$$I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{60/10} = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Ezt az energiaáramsűrűség-értéket használjuk a (18-30) egyenletben:

$$I = \left( \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \right) (v)$$

Innen a  $A$  amplitúdó kifejezhető és a kapott összefüggésbe a numerikus értékek behelyettesíthetők:

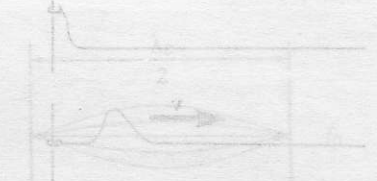
$$A = \left[ \frac{2I}{\rho \omega^2 v} \right]^{1/2} = \frac{(2) \left( 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right)}{\left( 1,21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left( 2\pi \left[ 3000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 \right) \left( 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)} = 3,68 \times 10^{-9} \text{ m.}$$



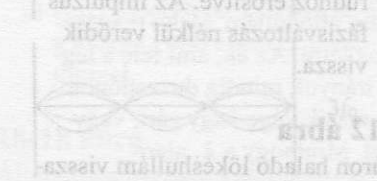
18-13 ábra (a) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya. (b) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya.



18-14 ábra (a) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya. (b) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya.



18-15 ábra (a) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya. (b) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya.



18-16 ábra (a) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya. (b) A felfelé mozgó hullám a vízszintes síkban, a vízszintes síkban a hullám mozgása és az energiaáramlás iránya.

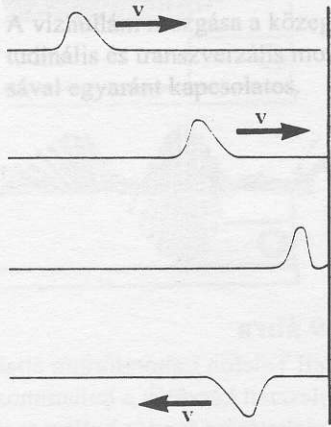
## 18.8 Hullámok visszaverődése

Tekintsünk egyetlen transzverzális lökéshullámot, ami végighalad egy távoli merev falhoz rögzített húron (18-12 ábra). Ha a beeső hullám alulról konkáv („hullámhegy”), akkor a falhoz érkező felfelé irányuló erő gyakorol a falra. Ezért Newton harmadik törvénye értelmében a fal ugyanekkorra lefelé irányuló erőt fejt ki a húr végére. (Nem lenne reakcióerő, ha a fal nem volna ott.) A faltól a húrra gyakorolt lefelé irányuló erő alulról konvex lökéshullámot („hullámvölgyet”) hoz létre, ami ezt követően az ellenkező irányban halad végig a húron. A hullámhegy „visszaverődött”. A beeső hullám amplitúdója pozitív értékről a visszavert hullámban negatívra változott, így módon  $180^\circ$ -os fázisváltáson ment át.

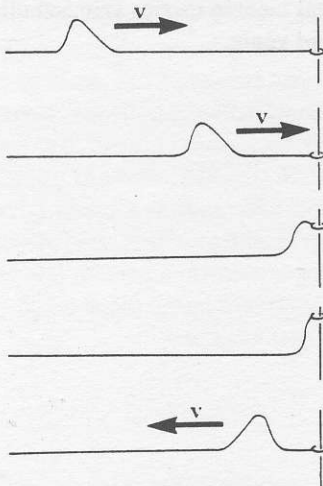
Ha az előbbiektől eltérően a húr távoli vége függőlegesen szabadon elmozdulhat (18-12b ábra), akkor a lökéshullám megérkezése az amplitúdó megemelkedését okozza. (Valójában az amplitúdó a kétszeresére nő.) Ez a folyamat olyan visszavert lökéshullámot kelt, amelynek amplitúdója pozitív, így ez esetben fázisváltás nincs.

A húr végének függőleges irányú szabad mozgását úgy biztosíthatjuk, hogy azt egy elhanyagolható tömegű gyűrűhöz erősítjük, amely egy végtelen hosszú rúdon függőleges irányban súrlódásmentesen mozoghat. (A rúd egységnyi hosszra eső tömege elhanyagolhatóan kicsi.) A húr lineáris tömegsűrűségében bekövetkező ugrásszerű változás – diszkontinuitás – ( $\mu$ -ról gyakorlatilag zérusra csökkenés) hozza létre a visszavert lökéshullámot. Ha  $\mu$  a gyűrű után nagyobbá válik, a visszavert hullámlökés  $180^\circ$  fázisváltást szenved. Ha  $\mu$  csökken, nincs fázisváltás. Általában, minden diszkontinuitás egyaránt létrehoz visszavert és átengedett lökéshullámot. Ezek amplitúdói a diszkontinuitás típusától függenek. A beeső lökéshullám energiája megoszlik a visszavert és az átengedett lökéshullámok között, így ezek amplitúdói kisebbek, mint a beérkező hullám amplitúdója.

Elérhető, hogy a hullámlökés 100% -osan átmenjen a diszkontinuitáson, és így ne lépjen fel visszaverődés. Ez akkor következik be, ha  $\mu$  elhanyagolható ütemben csökken, azaz a teljes változás (a lökéshullám hosszához képest) nagy távolságon következik be, vagyis, ha a diszkontinuitás kellőképpen fokozatos. Az egyetlen frekvenciát tartalmazó hullámvonulatra (tehát nem az egyetlen lökéshullámra)  $\mu$  diszkontinuitásának rövid távon történő „kisímitását” teszi lehetővé az alábbi módszer: két húr közé egy „illesztőtág”-nak nevezett, egynegyed hullámhossz hosszúságú húrszakaszt illesztnek. Bebizonyítható, hogy ha az illesztőtág egységnyi hosszra eső tömege a két húr egységnyi hosszra eső  $\mu_1$  és  $\mu_2$  tömegének  $\sqrt{\mu_1 \mu_2}$  mértani közepével egyenlő, akkor visszaverődés nem lép fel. Ennek az antireflexiós technikának a fizika más ágában is van megfelelője: példa rá a fényképezőgépek objektívjének antireflexiós bevonata. Az „illesztőtág” egy olyan, negyedhullámhossz vastagságú bevonat, ami megakadályozza egyes frekvenciák visszaverődését. (Az itt illesztendő paraméterek az üveg és a levegő „törésmutatói”, ezek a tényezők határozzák meg az elektromágneses hullámok terjedési sebességét. Lásd a 38. fejezetet.)



a) A falhoz rögzített húron a visszaverődés  $180^\circ$ -os fázisváltással jár.



b) A húr vége függőleges irányban szabadon elmozdulhat, ha kis tömegű súrlódásmentes gyűrűvel van egy függőleges rúdhoz erősítve. Az impulzus fázisváltás nélkül verődik vissza.

### 18-12 ábra

A húron haladó lökéshullám visszaverődése. A lökéshullám alakja itt aszimmetrikus, hogy a visszaverődési folyamatot jobban érzékelhetővé tegyük. Hogy van-e fázisváltás, vagy nincs, az függ, hogy a húr vége hogyan kapcsolódik a falhoz.

## 18.9 A szuperpozíció elve, állóhullámok

Ha egy kifeszített húron két azonos frekvenciájú hullám egymással szemben halad, akkor állóhullámot hoz létre. Az állóhullámok képezik a hangszerek működésének alapjait. Állóhullámok a következőképpen jönnek létre.



Tekintsük a 18-13 ábrán látható két egyenlő amplitúdójú és hullámhosszú, ellentétes irányban haladó hullámot! A kitérések összegeződnek, vagy *szuperponálódnak*, stacionárius hullámalakot képeznek, amelyben bizonyos pontok rögzítve maradnak, míg az összes többi az időben azonos frekvenciával rezeg. Azt a tényt, hogy két vagy több kitérés ilyen módon összegeződik, **szuperpozíció elvként**<sup>9</sup> ismerjük. Minthogy a hullámegyenlet *lineáris*, ezért megoldásainak  $ay_1+by_2$  alakú lineáris kombinációja ugyancsak megoldása az egyenletnek. A szuperpozíció elve alkalmazható (legalábbis közelítőleg) mindenféle kis amplitúdójú hullámmozgásra: vízhullámokra, hanghullámokra, elektromágneses hullámokra, és így tovább. A két kitérés fázisától függően az összegezés **erősítő interferenciát** (amplitúdó növekedést), vagy **gyengítő interferenciát** (amplitúdó csökkenést) eredményezhet.

Az állóhullámok jellegzetességei matematikailag könnyen bemutathatók. Tekintsünk két, ellenkező irányban haladó, azonos amplitúdójú, azonos frekvenciájú és azonos hullámhosszú hullámot:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad (+x \text{ irányban})$$

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t) \quad (-x \text{ irányban})$$

A szuperpozíció elvét alkalmazva megadhatjuk a hullámegyenlet más lehetséges megoldásait is:

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \quad (18-31)$$

A megoldás helyessége a (18-8) egyenletbe közvetlen behelyettesítéssel igazolható. A két szög szinuszának összegét adó

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) \quad (18-32)$$

trigonometrikus összefüggést felhasználva a megoldás így írható:

$$\text{Állóhullámok} \quad y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t) \quad (18-33)$$

A függvény első tényezője,  $2A \sin(kx)$ , a húr  $x$  pontjához tartozó amplitúdót jelenti, a második tényező,  $\cos(\omega t)$ , leírja a húr bármely pontjának azonos  $\omega$  körfrekvenciával végzett egyszerű harmonikus rezgő mozgását.

A *minimális* amplitúdójú (nyugalomban lévő) pontokat (18-14 ábra) **csomópontoknak** nevezzük. Az amplitúdó azokon a helyeken zérus, ahol

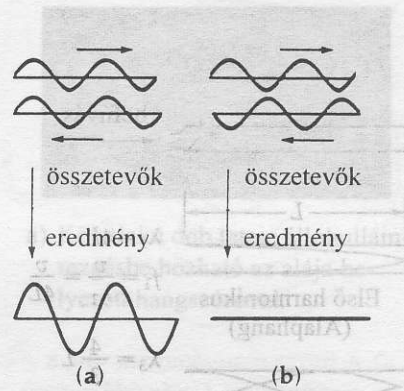
$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

vagy, mivel  $k = 2\pi/\lambda$ ,

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2} \dots \quad (\text{a csomópontok helye})$$

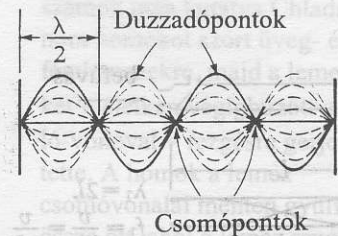
Tehát: A csomópontok közötti távolság  $= \frac{\lambda}{2}$ .

A *maximális* amplitúdójú helyeket **duzzadópontoknak** nevezzük, ezek a csomópontok közötti távolság felezőpontjában vannak:



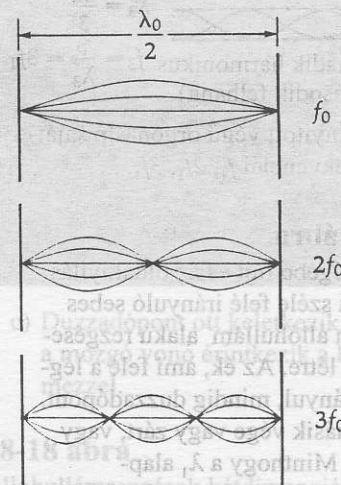
18-13 ábra

Ha ellentétes irányban haladó hullámok szuperponálódnak, a) kétszeres, b) zérus, vagy e két érték közötti bármekkora amplitúdójú kitérés jöhet létre.



18-14 ábra

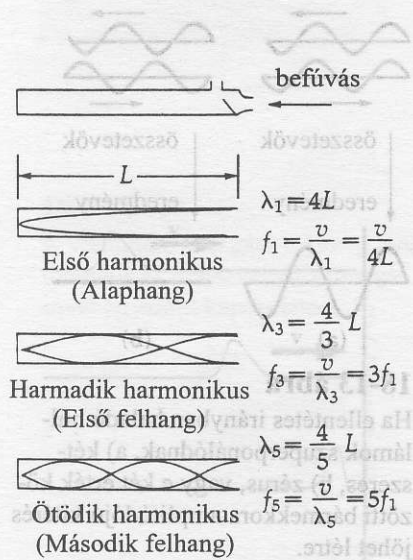
Az állóhullámmal kapcsolatos rezgésekép. A szomszédos csomópontok távolsága fél hullámhossz.



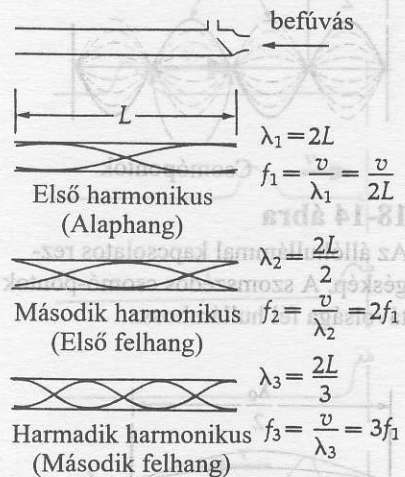
18-15 ábra

Az állandó hosszúságú húron kialakuló állóhullámok frekvenciaviszonyai egész számokkal fejezhető ki.

<sup>9</sup> A szuperpozíció elvét gyakran használja a fizika, mert ez az egyszerűsítő matematikai tárgyalásmód a kis amplitúdókra rendszerint helytálló. De megjegyezzük, hogy az elv alkalmazása nem vezet mindig helyes eredményre. Ha például nem teljesül a Hooke-törvény (mint ahogyan ez a helyzet a nagy amplitúdójú mozgásoknál), akkor két hullám együttes hatása nem írható le azzal, hogy a két hullámot összeadjuk. A Hí-fi rajongók ezt a jelenséget *intermodulációs torzításként* ismerik. Akkor jelentkezik, ha két szimultán hangzó frekvencia a rendszer nemlineáris tulajdonsága miatt járulékos frekvenciákat hoz létre.



a) A zárt végű orgonasíp saját-frekvenciái  $f_1, 3f_1, 5f_1, \dots$



b) A nyitott végű orgonasíp saját-frekvenciái  $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$

**18-16 ábra**

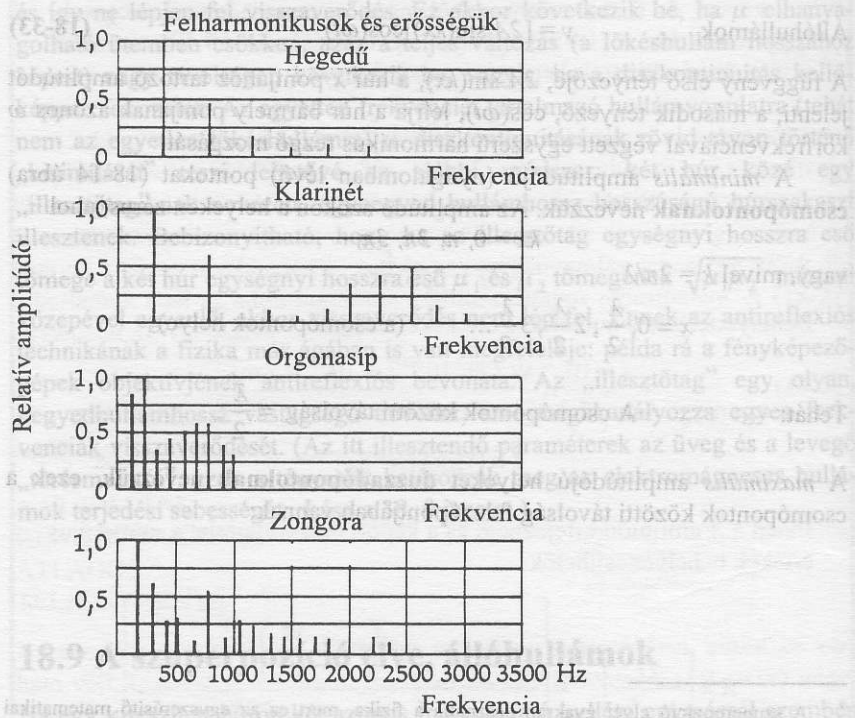
A síp végébe fújt és az oldalnyílás ék alakú széle felé irányuló sebes légáram állóhullám alakú rezgéseket hoz létre. Az ék, ami felé a légáram irányul, mindig duzzadópont. A síp másik vége vagy zárt, vagy nyitott. Minthogy a  $\lambda_1$  alaphullámhossz az a) és a b) esetben különböző, az egyenlő hosszúságú sípok alap-frekvenciái különbözőek. A sípokban egyidejűleg általában több ilyen rezgés is kialakulhat.

$$kx = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots$$

$$x = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \dots \quad (\text{a duzzadópontok eloszlása})$$

Ha a húr a csomópontokban rögzítve van, akkor az állóhullám alakú rezgések végtelen hosszú ideig tartanak (feltéve persze, hogy nincs energiadisszipáció, sűrűlódás, hangenergia kisugárzása, vagy a rögzített pontok berezgése következtében). Ez azért van, mert stacionárius rezgések esetén az energia nem tud a csomóponton átáramlani. Ezzel szemben a húr minden pontja (transzverzális irányban) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez és pedig úgy, hogy a szomszédos csomópontok között lévő pontok azonos fázisban vannak. Viszont azok a pontok, amelyek egyetlen csomópontot fognak közre, egymáshoz képest  $180^\circ$ -os fáziseltéréssel mozognak. Minthogy a húr rögzített végein csomópontoknak kell lenniük, ezért a húr teljes hosszára a fél hullámhossz egészszámú többszöröse „fér rá”. A húr egyidejűleg különböző frekvenciákkal is rezeghet (18-15 ábra). Így egy adott húron egész „frekvenciacsalád”, az ún. **harmonikus frekvenciák** :  $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$  jöhetnek létre. A sorozat minden „megengedett” frekvenciája egyértelműen a két végén rögzített húr csomópontjai által van meghatározva. A legkisebb  $f_1$  frekvenciát **alapfrekvenciának** nevezzük, a nagyobbak rendre a **második harmonikus**, a **harmadik harmonikus**, és így tovább. Ezek frekvenciája az alapfrekvencia egészszámú többszöröse.

Hasonló harmonikus sorozatok határozzák meg a nyitott végű és a zárt végű orgonasípokban kialakuló álló hanghullámokat (18-16 ábra). A rezonancia esetében előálló állóhullám a síp zárt végén mindig csomópontot képez, a duzzadópontok általában a nyitott végeken és esetleg a levegőbefúvás helyén (a rezgéskeltés helyén) lépnek fel. A zárt végű orgonasípoknál minden páros harmonikus hiányzik. Egy adott hangszer esetén az egyidejűleg megszólaló harmonikusainak száma és amplitúdója szabja meg a hangok „színezetét”, ami az egyes hangszereket megkülönbözteti egymástól. (18-17 ábra.)



**18-17 ábra**

Az eltérő amplitúdójú harmonikus felhangok egyidejű megszólalása okozza az egyes hangszerek jellegzetes hangszínét, ami őket megkülönbözteti egymástól. A legkisebb frekvenciájú rezgés adja a hangszer alaphangját.

A kétdimenziós membránokon és a háromdimenziós tárgyakon is keletkeznek állóhullámok, amint ezt a 18-18 ábra illusztrálja. Az ilyen esetekben a különféle rezgésekhez tartozó sajátfrekvenciák *nem* alkotnak olyan harmonikus sorozatot, amely valamilyen alapprofrendencia egészszámu többszöröseiből állna. Ehelyett a frekvenciák (egyszerűbb esetekben) a Bessel függvényekkel és más speciális matematikai függvényekkel vannak kapcsolatban. Általában az állóhullámok képét *csomóvonalak* és *csomófelületek* jellemzik. A háromdimenziós állóhullámrezgések tanulmányozása a fizika és a műszaki tudományok sok területén fontos feladat. Erre nyilvánvaló példaként a hangszórók tervezését említjük. Bizonyára jelentősebb ennél az atommodellek állóhullám-képeinek tanulmányozása. Ezek hasznos vizuális és matematikai modelleket eredményezhetnek, amelyekből számos atomfizikai adatra lehet magyarázatot találni. (Lásd a 44. fejezetet.)

#### 18-4 PÉLDA

A hegedű  $E$  húrja 33 cm hosszú, és lineáris tömegsűrűsége  $5,46 \times 10^{-4}$  kg/m. Mekkora  $F$  erővel kell feszíteni, hogy alapprofrendenciája 660 Hz legyen?

#### MEGOLDÁS

Az alapprofrendenciahoz tartozó állóhullám hullámhosszának fele a húr  $\ell$  hosszával egyenlő. Ezért:

$$\lambda = 2\ell = 2(33 \text{ cm}) = 66 \text{ cm} \left( \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right) = 0,660 \text{ m}$$

Átszámítási tényező

A húr hullámainak sebessége így kapható meg:

$$v = f\lambda = (660 \text{ s}^{-1})(0,660 \text{ m}) = 436 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ezután az  $F$  feszítőerő:

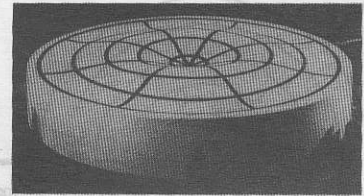
$$\frac{F}{\mu} = v^2$$

$$\text{vagy } F = (\mu)(v^2) = \left( 5,46 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right) \left( 436 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 104 \text{ N.}$$

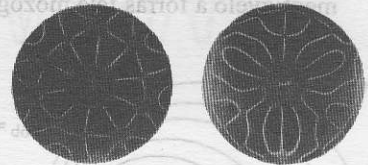
## 18.10 A Doppler jelenség

A megfigyelő által észlelt hang frekvenciája nemcsak az észlelő és a hangforrás relatív mozgásától függ, hanem attól is, hogy az észlelő vagy a hangforrás mozog-e ahhoz a közeghez viszonyítva, amelyikben a hang terjed. Ezt a jelenséget először Christian Doppler osztrák fizikus értelmezte 1842-ben.

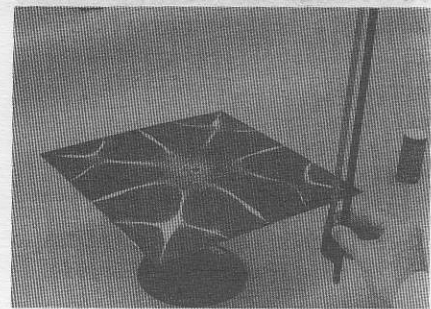
Tárgyalásunkat a következő két esettel kezdjük: amikor a *megfigyelő* mozog a közeghez képest, és amikor a *forrás* mozog a közeghez képest. Tekintsünk egy  $f$  frekvenciájú hangot kibocsátó forrást. Ha a forrás nyugalomban van az álló levegőhöz képest, akkor  $\lambda$  a hullámhossz a levegőben, és a hanghullámok  $v$  sebességgel terjednek. Az egy helyben maradó megfigyelő egy másodperc alatt  $f = v/\lambda$  számú rezgést észlel. Ha azonban a megfigyelő a



- a) Kör alakú dob teteje állóhullámrezgésbe hozható az alája helyezett hangszóróval.



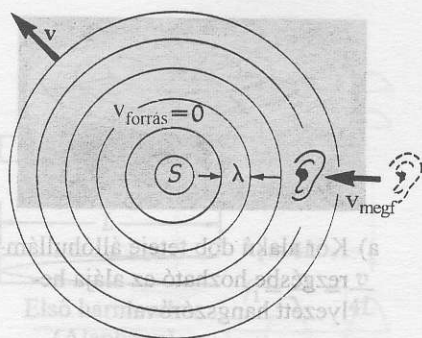
- b) Ezeket a csomóvonal alakzatokat felfedezőjükről, a német Ernst F. Chladniról, Beethoven kortársáról, *Chladni ábráknak* nevezik. 1787-ben új zeneszerzők után kutatva Chladni finom homokot szórt üveg- és fémlemezekre, majd a lemezeket – éleiken végighúzott cselő-vonóval – rezgésre gerjesztette. A homok a lemez csomóvonalai mentén gyűlik össze ott, ahol a lemez rezgése elhanyagolható, így módon a csomóvonalak láthatóvá válnak.



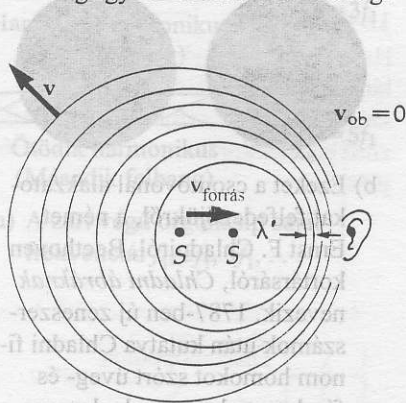
- c) Duzzadópont ott keletkezik, ahol a mozgó vonó érintkezik a lemezzel.

#### 18-18 ábra

Állóhullámrezgések kétdimenziós felületeken.



a) A forrás nyugalomban van, a megfigyelő a forrás felé mozog.



b) A megfigyelő nyugalomban van, a forrás a megfigyelő felé mozog.

### 18-19 ábra

A forrás vagy a megfigyelő mozgásából származó Doppler jelenség. A sebességek a közeghez (levegőhöz) vannak viszonyítva. Bár a viszonyított sebességek az a) és a b) esetben azonosak, a megfigyelt frekvenciák különbözők attól függően, hogy a forrás, vagy a megfigyelő mozog-e a levegőben.

forrás felé mozog  $v_{megf}$  sebességgel a közeghez (levegőhöz) képest, akkor másodpercenként több rezgést észlel. Azon kívül, hogy érzékeli azt a  $v/\lambda$  számú rezgést, amit nyugvó helyzetben is érzékelt, további,  $v_{megf}/\lambda$  számú rezgést (amennyinek egy másodperc alatt „elébe megy”) is érzékel (18-19a ábra). Így tehát az észlelt  $f'$  frekvencia:

$$f' = \left( \frac{v}{\lambda} + \frac{v_{megf}}{\lambda} \right) = f \left( \frac{v + v_{megf}}{v} \right) \quad (\text{mozgó megfigyelő}) \quad (18-34)$$

Ha pedig a forrás mozog a megfigyelő felé a közeghez képest  $v_{forrás}$  sebességgel, akkor a hang hullámhossza megrövidül. Egy másodperc alatt a  $(v - v_{forrás})t$  hosszú távolságon  $f$  rezgés nyomódik össze. Így a levegőben a hullámhossz csökken:  $\lambda' = (v - v_{forrás})/f$ , és a helyben maradó megfigyelő által észlelt frekvencia:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = f \left( \frac{v}{v - v_{forrás}} \right) \quad (\text{mozgó forrás}) \quad (18-35)$$

Ha a mozgások ellentétes irányúak, akkor  $v_{megf}$  és  $v_{forrás}$  előjelei megfordulnak. A két effektust egyetlen formulában is összefoglalhatjuk:

$$\text{A Doppler jelenség hang esetében} \quad f' = f \left( \frac{v \pm v_{megf}}{v \mp v_{forrás}} \right) \quad (18-36)$$

A  $v_{megf}$  és a  $v_{forrás}$  sebességeket a közeghez képest kell mérni. Az előjeleket annak megfelelően kell megválasztani, hogy az észlelt frekvencia a forrás és a megfigyelő relatív közeledésekor nagyobb, és relatív távolodásakor kisebb.

### 18-5 PÉLDA

Alacsonyan szálló repülőgép a föld fölött 200 m/s sebességgel suhan egy helyben álló megfigyelőhöz közelítve. A repülőgépre erős hangú, 400 Hz alapfrekvenciájú kürt van szerelve. a) Mekkora frekvenciájú hangot hall a talajon álló megfigyelő? b) Tegyük fel, hogy a kürtöt a földön szólaltatná meg. Mekkora frekvenciát hallana a közelítő pilóta? A levegő a földhöz képest nyugalomban van. Gázokban a hangsebesség független a nyomástól, de függ a hőmérséklettől. Ebben a példában a hang terjedési sebességét vegyük 340 m/s -nak.

### MEGOLDÁS

Ez esetben a forrás és a megfigyelő közeledik egymáshoz, ezért a Doppler jelenség képletében az előjeleket a következő módon kell megválasztani:

$$f' = f \left( \frac{v + v_{megf}}{v - v_{forrás}} \right)$$

a) Mivel  $v_{megf} = 0$ , ezért

$$f' = f \left( \frac{v}{v - v_{forrás}} \right) = f \left( \frac{1}{1 - \frac{v_{forrás}}{v}} \right) = (400 \text{ s}^{-1}) \left( \frac{1}{1 - \frac{200 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}}} \right) = 971 \text{ Hz}$$

b) Itt most  $v_{\text{forrás}} = 0$ , így

$$f' = f \left( \frac{v + v_{\text{megf}}}{v} \right) = f \left( 1 + \frac{v_{\text{megf}}}{v} \right) = (400 \text{ s}^{-1}) \left( 1 + \frac{200 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} \right) = 635 \text{ Hz}$$

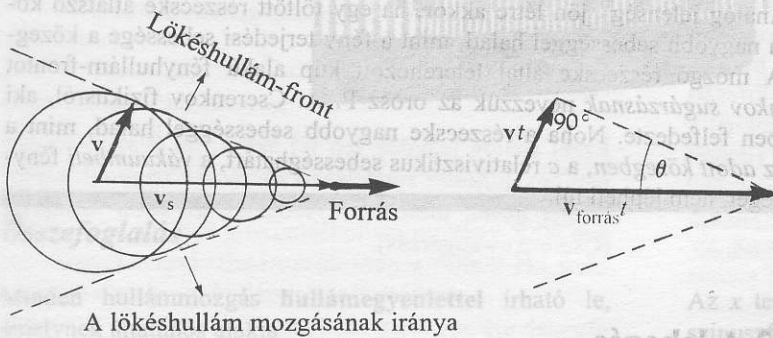
Figyeljük meg: noha a forrás és a megfigyelő mindkét esetben közelít egymáshoz, az észlelt frekvencia attól függően különböző, hogy melyikük mozog a közeghez viszonyítva.

### 18.11 A lökeshullámok

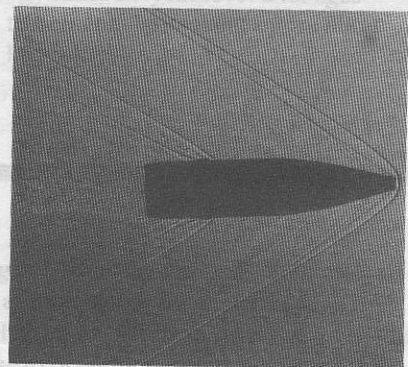
A (18-35) egyenlet érvényét veszti, ha  $v_{\text{forrás}}$  vagy  $v_{\text{megf}}$  a  $v$  hangsebesség-nél nagyobbá válik. Ez a helyzet áll elő, ha egy szuperszónikus repülőgép nagyobb sebességgel repül, mint a hang terjedési sebessége a levegőben. Az ilyen esetekben hirtelen felerősödő nagynyomású hullámfront, **lökeshullám** jön létre, ami a talajra érve „hangrobbanást” okoz. A 18-20 ábra vázolja a lökeshullám-front kialakulását. A mozgó forrás gömbhullám-frontokat hoz létre, amelyek a forrás pályájának különböző pontjaiból indulnak ki. A hullámfrontok külső széle **Mach kúp**<sup>10</sup> nevezett kúp alakú burkolót képez, amelynek fél nyílásszöge  $\theta$ . A geometriai viszonyokból kitéjük, hogy

A Mach kúp nyílásszöge  $\sin \theta = \frac{v}{v_{\text{forrás}}}$  (18-37)

A  $v/v_{\text{forrás}}$  arányt **Mach-féle számnak** nevezzük. Ha azt mondjuk, hogy egy repülőgép 1,8 Mach sebességgel halad, akkor ez azt jelenti, hogy a gép sebessége 1,8-szer akkora, mint a hang terjedési sebessége a környező levegőben.



A lökeshullám mozgásának iránya

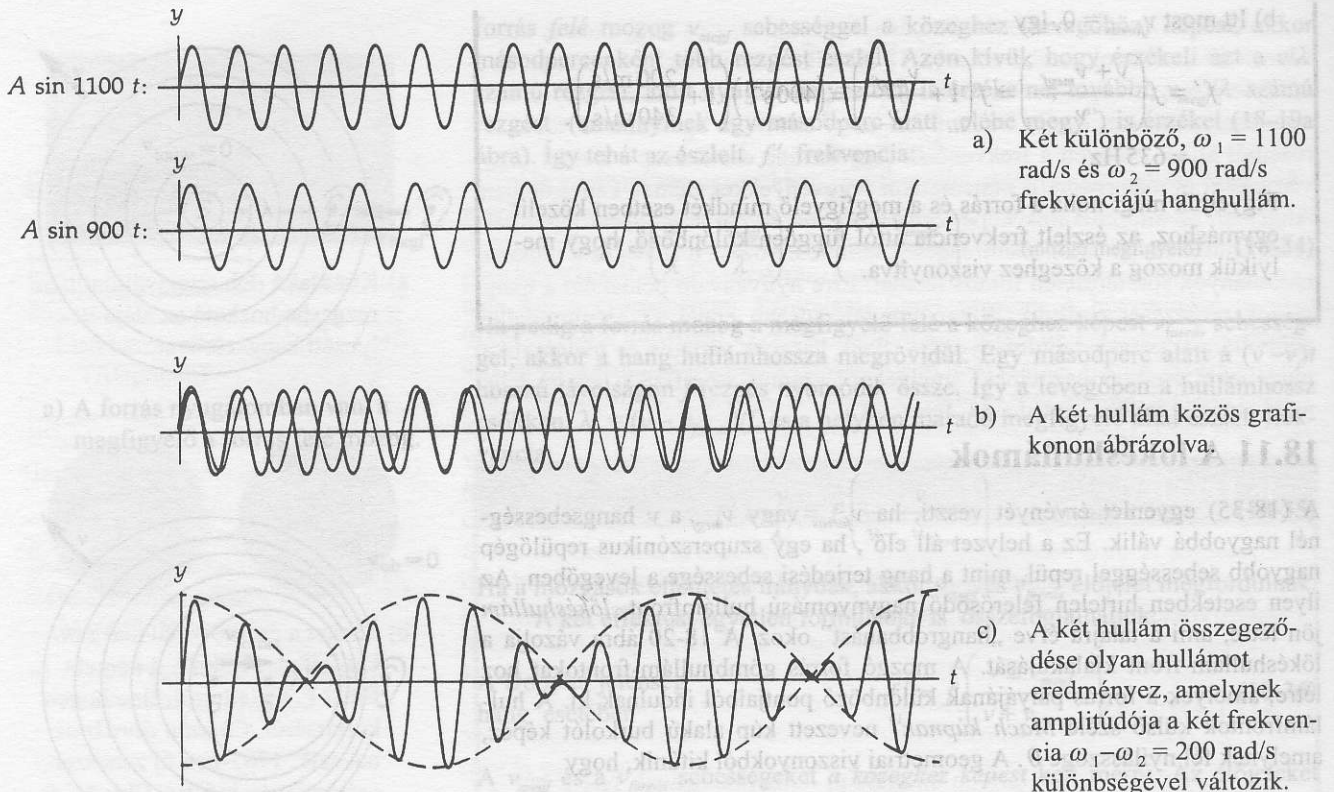


- a) A hangforrás nagyobb  $v_{\text{forrás}}$  sebességgel halad, mint a hang  $v$  terjedési sebessége a közegben. A gömbhullám-frontok eredője minden pillanatban **Mach kúp**nak nevezett kúp alakú lökeshullámot képez.
- b)  $t$  idő alatt a hanghullámok  $vt$  utat tesznek meg, míg a forrás elmozdulása  $v_{\text{forrás}}t$ . Így  $\sin \theta = v/v_{\text{forrás}}$ .
- c) A fénykép szuperszónikus lövedék lökeshullámait mutatja.

#### 18-20 ábra

A lökeshullám kialakulása.

<sup>10</sup> Ernst Mach (1838-1916), osztrák fizikus és filozófus. Híres könyve, *The Science of Mechanics*, a newtoni mechanika történeti fejlődésének éles kritikája.

**18-21 ábra**

Két különböző frekvenciájú hullám szuperpozíciója.

Analog jelenség<sup>11</sup> jön létre akkor, ha egy töltött részecske átlátszó közegben nagyobb sebességgel halad, mint a fény terjedési sebessége a közegben. A mozgó részecske által létrehozott kúp alakú fénycsúszófrontot *Cserenkov sugárzásnak* nevezzük az orosz P. A. Cserenkov fizikusról, aki 1934-ben felfedezte. Noha a részecske nagyobb sebességgel halad, mint a fény az adott közegben, a  $c$  relativisztikus sebességhatárt, a *vákuumbeli* fénysebességet, nem lépheti túl.

**18.12 A lebegés**

Ha két hanghullám ugyanazon a ponton megy át, akkor kitéréseik a szuperpozíció elvének megfelelően összegeződnek. Ha amplitúdójuk egyenlő és frekvenciájuk csak kevéssel különbözik, akkor összegezésük eredménye a 18-21 c) ábrán látható. Az eredő amplitúdóváltozás **lebegés** néven ismert.

$$y_1 = A \sin \omega_1 t \quad (\text{ahol } \omega_1 = 2\pi f_1)$$

$$y_2 = A \sin \omega_2 t \quad (\text{ahol } \omega_2 = 2\pi f_2)$$

$$y = y_1 + y_2 = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \quad (18-38)$$

<sup>11</sup> A vízhullámok esetében sokkal bonyolultabb a helyzet. A hajó V alakú sodorhullámának fél nyílásszöge mindig  $\theta = \arcsin(1/3)$ , függetlenül a hajó sebességétől. Lásd H. D. Keith, *American Journal of Physics*, 25 (1957), p. 466.

Felhasználva a

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right) \quad (18-39)$$

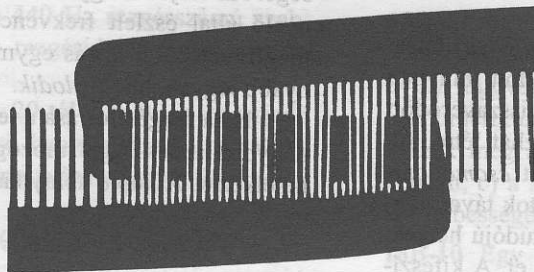
trigonometrikus összefüggést, a (18-38) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$y = \underbrace{\left[ \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \right]}_{\text{A rezgési frekvencia}} \underbrace{\left[ 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right]}_{\text{Amplitúdó változás}} \quad (18-40)$$

Az eredő kitérés az átlagos  $(f_1+f_2)/2$  frekvenciával rezeg, az amplitúdó pedig az  $(f_1-f_2)$  lebegési frekvenciával<sup>12</sup> ingadozik.

Az emberi fül érzékenysége *nemlineáris*. Ennek következményeképpen két elegendő erősségű  $f_1$  és  $f_2$  frekvenciát úgy érzékel, mint két hangot, valamint ezek különféle kombinációit (mint pl.  $f_2-f_1$ ,  $2f_2-f_1$ ,  $3f_1-f_2$ , stb.). Ha az  $f_2-f_1$  különbség kevesebb, mint  $\approx 15$  Hz, akkor ezek a *különbségi hangok* a lebegéshez hasonlóan érzékelődnek. A lebegési frekvencia érzékelése nem a fül nemlinearitásának, hanem, amint rámutattunk, amplitúdóingadozások sorozatának következménye.

<sup>12</sup> Az amplitúdó maximális, valahányszor  $\cos 2\pi[(f_1 - f_2)/2]t$  egyenlő  $\pm 1$ . Mindkét érték egyszer fordul elő egy ciklusban, így a maximális amplitúdójú kitérések száma másodpercenként  $2(f_1 - f_2)/2 = (f_1 - f_2)$ . Ez a lebegési frekvencia.



18-22 ábra

Két különböző fogtávolságú fésű egymásra helyezésével a *lebegés* térbeli analogonjaként moiré ábrát kapunk.

## Összefoglalás

Minden hullámmozgás **hullámegyenlettel** írható le, amelynek általános alakja

A hullámegyenlet (egy dimenzióban) 
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A hullámokat két általános osztályba soroljuk: *transzverzális* és *longitudinális* hullámok. A kifizített húron haladó kis amplitúdójú transzverzális szinusz hullámokat a hullámegyenlet alábbi megoldása írja le:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

ahol  $y$  = a húr transzverzális kitérése

$A$  = az amplitúdó (a maximális kitérés)

$x$  = a távolság a húr mentén

$t$  = az idő

$k$  = a hullámszám =  $2\pi/\lambda$

$\omega$  = a körfrekvencia =  $2\pi/T = 2\pi f$ .

Az  $x$  tengely *negatív* irányában haladó hullámoknál a szinuszfüggvény argumentuma  $(kx + \omega t)$ .

A  $\lambda$  hullámhossz, az  $f$  frekvencia és a  $v$  terjedési sebesség a következő összefüggésben van egymással:

$$\lambda f = v$$

Egy teljes rezgés időtartama a  $T = 1/f$  periódusidő; ennélfogva:

$$\frac{\lambda}{T} = v$$

Egy  $F$  erővel kifizített,  $\mu$  lineáris tömegsűrűségű húron a hullám  $v$  terjedési sebessége

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

A *decibel* (dB) egységben mért  $\beta$  *intenzitásszint*:

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

ahol  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , a referencia-intenzitás.

A húron áthaladó hullám átvitt  $P$  átlagos teljesítménye:

$$\text{Átlagos teljesítmény} = \underbrace{\left( \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \right)}_{\text{Egységnyi hosszra jutó átlagos energia}} (v)$$

ahol  $\mu$  az egységnyi hosszúságra jutó tömeg. A síkbeli hanghullámok által az egységnyi felületen átvitt átlagos teljesítmény, vagy az *átlagos energiáramsűrűség*,  $I_{\text{át}}$

$$\text{Hanghullámra } I_{\text{át}} = \underbrace{\left( \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \right)}_{\text{Az egységnyi térfogat átlagos energiája}} (v)$$

ahol  $\rho$  a közeg térfogategységre eső tömege, vagy sűrűsége.

A húr mentén terjedő hullámok a húr rögzített végéről  $180^\circ$ -os fázisváltozással, a szabad végről azonos fázisban verődnek vissza. Az általános  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  egyenlet *longitudinális* szinuszhullámokat is leír, ha az  $y$  kitérést a részecskék egyensúlyi helyzetüktől mért, a hullámterjedés irányával *párhuzamos* elmozdulásaként értelmezzük.

A hullámok összeadódva (*szuperponálódva*) interferencia jelenséget hozhatnak létre. Egy adott irányban haladó hullám a vele szemben haladó visszaverődött hullámmal interferálva állóhullámokat hozhat létre. Az állóhullám minimális amplitúdójú pontjait *csomópontoknak* nevezzük, a szomszédos csomópontok távolsága  $\lambda/2$ . A *duzzadópontok* a maximális amplitúdójú helyek, ezek a csomópontok között helyezkednek el. A kifeszített húr rögzített végei csomópontok. Orgonasípknál a zárt végek csomópontok, és a duzzadópontok (lényegében) a nyitott végeknél vannak.

A két- és a háromdimenziós esetben az állóhullámok *csomóvonalakat* és *csomófelületeket* képeznek.

## Kérdések

1. A zenészek gyakran hangmagassággal, hangerőséggel és hangszínnel (hangminőséggel) jellemzik a hangokat. Nevezzük meg a hanghullámok azon fizikai jellemzőit, amelyek az előbb felsorolt tulajdonságoknak felelnek meg!
2. Szilárd testekben terjedő transzverziális és longitudinális hullámok egyaránt a közeg olyan mozgásával kapcsolatosak, amelyekben a kitérések *lineáris* harmonikus rezgések. Tudnánk-e hullámmozgást kelteni *torziós* harmonikus rezgés segítségével? Milyen lenne ez a hullám?
3. Amikor a legközelebb insztant kávéból kávét készítünk, végezzük el az alábbi kísérletet: töltsük meg az insztant kávét tartalmazó kerámia- vagy üvegcsészét olyan vízzel, ami éppen felforrt. Közvetlenül ezután kocogtassuk a csésze peremét a ka-

Minden rezgő rendszerhez tartozik egy „megengedett” frekvenciacsalád, az un. sajátfrekvenciák családja, amely a rendszer összes lehetséges létező állóhullámának felel meg. Mechanikai rendszerek egyidejűleg egy-nél több sajátfrekvenciával is rezeghetnek.

Ugyanabban az irányban haladó két különböző frekvenciájú hullám összeadódhat. Az eredő hullám amplitúdója az  $(f_1 - f_2)$  *lebegési frekvenciával* változik. Hanghullámok esetén az emberi fül számára az  $f_1$  és az  $f_2$  eredeti frekvenciák mellett az  $f_1 - f_2$  különbségfrekvencia is érzékelhető.

A különböző frekvenciákat tartalmazó összetett hullámok a Fourier-analízis néven ismert módszerrel szinusz- és koszinusz hullámok összegeként is előállíthatók. (F függelék.)

Ha a hangforrás vagy az észlelő a hangterjedés közegéhez viszonyítva mozog, az észlelt hang  $f'$  frekvenciája megváltozik:

Doppler jelenség  
(hang esetében)

$$f' = f \left( \frac{v \pm v_{\text{megf}}}{v \mp v_{\text{forrás}}} \right)$$

ahol  $f$  a hangforrás frekvenciája,  $v$  a terjedési sebesség a közegben,  $v_{\text{megf}}$  a megfigyelő közeghez viszonyított sebessége,  $v_{\text{forrás}}$  a hangforrás közeghez viszonyított sebessége. Az előjelek úgy választandók meg, hogy a megfigyelő által észlelt frekvencia magasabb legyen, ha a megfigyelő és a forrás egymáshoz *közeledik*, és alacsonyabb legyen, ha *távolodik*.

Ha a rezgés forrása a levegőben a hangsebességnél nagyobb sebességgel mozog, akkor kúpos *lökéshullám* keletkezik. A kúp  $\theta$  félnyílásszögének szinuszja:

$$\sin \theta = \frac{v}{v_{\text{forrás}}}$$

Ezzel analóg jelenség lép fel akkor, ha átlátszó anyagban egy töltéssel rendelkező részecske nagyobb sebességgel halad, mint a fénysebesség az adott anyagban (Cserenkov sugárzás).

nalunkkal! A kocogtatás hangmagassága számottevő mértékben változik. Magyarázzuk meg a jelenséget! (Megjegyzés: a kísérlet műanyagpohárban nem sikerül.)

4. Tegyük fel, hogy a hang terjedési sebessége a levegőben a frekvenciának függvénye, mégpedig a nagyobb frekvenciákhoz nagyobb sebesség tartozik. Hogyan módosulnának a lemezjátszó hangszórójából terjedő zenei hangok, miközben a hangszórótól fokozatosan távolodunk? Az átlátszó közegben (pl. a vízben) terjedő fény sebessége frekvenciafüggő. Mi lenne az imént leírt hangtani jelenség vizuális megfelelője?
5. Tegyük fel, hogy egy meghatározott hangú hangforrás rögzített távolságra van tőlünk. Változik-e az észlelt hang magassága, ha a forrás felől állandó



szél fúj felénk? Mi történne, ha a szél felőlünk fújna a hangforrás felé? Mi történne mindkét esetben, ha a hang észlelése közben a szél zérus sebességről indulva egy végső állandó sebességre erősödne?

6. Aki már lakott bérházban, az bizonyára tapasztalta, hogy a szomszédok lemezejátszóijából a basszus hangok erőteljesebben hallatszanak át, mint a nagyobb frekvenciájú hangok. Mi köze van ennek a szomszédos lakásokat elválasztó falak hangszorpciójának frekvenciafüggéséhez? Elemezzük a jelenség fizikai alapjait.
7. Zárt zuhanyozófülkében csukott szájjal dúdoljunk különböző frekvenciájú hangokat, és figyeljük meg, melyekre rezonál jobban a fülle! Magyarazzuk meg, miért rezonál jobban a tömör márványfalú, mint a puhafával borított falú fülle.
8. Énekeljünk állandó hangmagasságú hangot, közben formáljuk szájunkat egymás után az a, e, i, o, u ma-

### Feladatok

Hacsak nincs másként megadva, a hang terjedési sebességét vegyük 344 m/s -nak .

#### 18.4 A hullámegyenlet megoldása egy speciális esetben

#### 18.5 A hullám terjedési sebessége

**18A-1** Határozzuk meg a 440 Hz rezgésszámú szabványos zenei „A” hang a) rezgésidejét és b) hullámhosszát a levegőben.

**18A-2** Az emberi fül a kb. 20-tól 20000 Hz -ig terjedő frekvencia-intervallumba eső hanghullámokat érzékeli. Határozzuk meg ezek (centiméterben mért) hullámhosszát a levegőben.

**18A-3** Igazoljuk, hogy a (18-23) egyenlet jobb oldalának dimenziója *sebesség*.

**18A-4** Egy 8 m hosszú kötel teljes tömege 500 g. A kötel 430 N erővel van kifeszítve. Határozzuk meg a kötélen terjedő transzverzális hullám sebességét.

**18A-5** Az acélban a nyomáshullám mintegy 5000 m/s sebességgel terjed. Határozzuk meg a 60000 Hz frekvenciájú ultrahang hullámhosszát acélban.

**18B-6** Egy síkbeli hanghullám frekvenciája levegőben 440 Hz. Adott pillanatban és adott pontban a hangnyomás  $p_0/3$ , ahol  $p_0$  a hullám amplitúdója (a levegő átlagos atmoszférikus nyomásához viszonyítva). Határozzuk meg ebben a pontban  $p_0$  függvényében a hullám nyomásának két lehetséges értékét 1 milliszekundummal későbbi időpontban.

**18B-7** Egy húr mentén az  $x$  tengely pozitív irányában 200 m/s sebességgel haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,7 mm, hullámhossza 20 cm. Határozzuk meg (SI egységekben) a hullámot leíró  $y = A \sin(kx - \omega t)$  egyenletben szereplő  $A$ ,  $k$  és  $\omega$  mennyiségek számértékét.

**18B-8** Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s. a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt  $y = A \sin(kx - \omega t)$  alakban. b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,10 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

gánhangzóknak megfelelően! Írjuk le, hogyan változnak a hang frekvenciakomponensei az egyes magánhangzók esetében.

9. Tartsunk fülünk elé rezgő hangvillát, a száraz függőlegesen álljanak! Forgassuk a hangvillát szimmetriatengelye körül. Miért változik meg a hang erőssége a forgatás közben?
10. Különböző magánhangzók (pl. „e”, „a”, „o”) mind egyike kimondható a hangszalag azonos frekvenciájú alaphangját alkalmazva. A hangok eltérő felhang tartalma a torok és a száj rezonátorüregének alakításával érhető el. A héliummal (amiben a hang terjedési sebessége a levegőbelinek kb. háromszoros) teleshívott tüdővel kiadott beszédhang jellemzői jelentősen megváltoznak. Elemezzük, milyen változások következhetnek (vagy nem következhetnek) be, ha héliummal telt tüdővel beszélünk.

**18B-9** Egy hanghullám levegőben haladva (az atmoszférikus nyomáshoz viszonyítva)  $p = 1,27 \sin \pi(x - 340t)$  függvényvel megadott nyomásingadozást létesít. (A numerikus értékek SI egységekkel adtak.) a) Határozzuk meg a nyomásváltozás amplitúdóját, b) a frekvenciát, c) a hullámhosszat levegőben és d) a hanghullám sebességét.

**18B-10** Egy robbanóanyaggal megrakott kis csónak felrobban. A hangot egy víz alatt úszó személy meghallja, majd fejét a vízből kiemelve meghallja ugyanannak a robbanásnak másik hangját is, ami kisebb sebességgel a levegőn keresztül érkezett. a) Számítsuk ki a víz kompresszió moduluszából (lásd 13.11 fejezet) a vízben terjedő hang sebességét. b) Ha a két hang érkezésének időkülönbsége 5 s, milyen távol volt az úszó személy a robbanás helyétől?

**18B-11** Egy követ elengedve egy kútba ejtünk. A csobbanást pontosan 2 másodperccel később halljuk. Milyen mély a kút?

**18B-12** Robbanás történik egy vasuti sínen, a sínen ülő megfigyelőtől 1,7 km távolságban. a) Határozzuk meg az acélsínen terjedő nyomás-hanghullám terjedési sebességét. b) Határozzuk meg a megfigyelő által észlelt két hang időkülönbségét: a sínen keresztül érkező és a levegőn át érkező hang időeltolódását.

**18B-13** Egy szerelőmunkás ütemesen szegget kalapál. A kalapács-ütések 0,8 s időközzel követik egymást. A munkástól bizonyos távolságban lévő gyermek megfigyeli, hogy a kalapácsütések hangját az ütések között eltelt időtartam felében hallja. Határozzuk meg, milyen messze van a gyermek a szerelőmunkástól.

### 18.7 A hullámmozgás energiaviszonyai

**18A-14** Valaki a közelben kiáltva a fülünknel 80 dB hangintenzitáásszintet hoz létre. Hányszor nagyobb ez a hangintenzitáásszint, mint a 20 dB -es suttogásé?

**18A-15** Egy 340 m/s sebességgel haladó síkbeli hanghullám energiaáramának közepes sűrűsége  $10^{-7}$  W/m<sup>2</sup>. Számítsuk ki a hanghullám 1 cm<sup>3</sup> levegőtér fogatban lévő átlagos energiáját.

**18A-16** Egy fájdalmat keltő 2000 Hz frekvenciájú hang közepes energiaáramsűrűsége 1 W/m<sup>2</sup>. Számítsuk ki a levegőmolekulák rezgésének amplitúdóját az 1,21 kg/m<sup>3</sup> sűrűségű levegőben 342 m/s hangsebesség mellett.

**18B-17** Egy 1000 Hz frekvenciájú hangforrás minden irányban egyenletesen bocsát ki hangot. A forrástól 3 m távolságban lévő megfigyelő 40 dB hangintenzitáásszintet mér. Számítsuk ki a forrás átlagos kimenő teljesítményét.

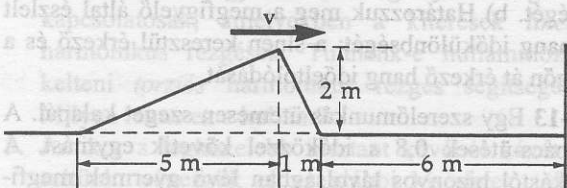
**18B-18** Egy bizonyos hanghullám rezgési amplitúdója 50%-kal megnő. Mekkora a hang decibel-szintjének növekedése?

**18B-19** Az emberi fül által észlelhető legkisebb intenzitáásszint-különbség kb. 0,6 dB. Mutassuk meg, hogy ez a hangforrás által másodpercenként kibocsátott energia kb. 15%-os növekedésének felel meg.

### 18.8 Hullámok visszaverődése

**18A-20** Egy 4 kg tömegű 12 méter hosszú kötel két tartó közé van feszítve. A kötel végére mért éles ütés által okozott lökeshullám a kötel másik végéről 1 másodperc múlva tér vissza. a) Határozzuk meg a kötelet feszítő erőt! b) Másodpercenként hány ütest kell a kötéltre mérni, hogy két lökeshullám akkor találkozzék közepén, amikor egy-egy lökeshullám a kötel mindkét végéről visszaverődik?

**18B-21** Egy kísérletező személy 33 méter távolságra áll egy beton lépcsősor előtt. Egy-egy lépcsőfok magassága 30 cm. A kísérletező egyet élesen tapsol, és figyeli a lépcsősorról érkező visszhangsorozatot. a) Mi lesz a visszhangsorozat alapfrekvenciája, ha a hang terjedési sebessége levegőben 333 m/s? b) Tegyük fel, hogy az előbbtitől eltérően a kísérletező személy most egy léckerítés előtt áll, az erre merőlegesen mért  $l$  távolságban. A lécek egymástól mért távolsága  $d$ . ( $l \gg d$ .) Itt is tapsol egyet tenyerével. Írjuk le, hogy milyen lesz a kerítésről visszaverődő hang. Adjunk magyarázatot a jelenségre.



**18-23 ábra**

A 18B-22 feladathoz.

**18B-22** A 18-23 ábrán látható fűrészfog alakú impulzus 100 m/s sebességgel halad egy kifeszített huzalon. (A transzverzális amplitúdót az ábra túlzottan nagyítva mutatja.) A  $t = 0$  időpontban az impulzus vezető éle 6 méterre van a huzal rögzített végétől. Készítsünk vázlatot, amelyen a huzal 0,10 másodperccel későbbi alakja van feltüntetve. Jelöljük be az impulzus jellegzetes méreteit is!

### 18.9 A szuperpozíció elve, állóhullámok

**18A-23** Egy 2 m hosszú húr tömege 1,8 g. Egyik vége egy 60 Hz-cel rezgő vibrátorra csatlakozik. Mekkora feszítő erő hatására alakul ki öt szakaszból álló transzverzális állóhullám a húron?

**18A-24** Határozzuk meg az 1 m hosszú orgonasíp legkisebb természetes rezonanciafrekvenciáját 340 m/s hangsebesség esetében, ha a) a síp mindkét vége nyitott, és ha b) a síp egyik vége nyitott, a másik zárt!

**18A-25** A piccolo (kisméretű fuvola) teljes hossza 32 cm. Rezonáló légoszlopa úgy rezeg, mint a mindkét végén nyitott síp légoszlopa. a) Határozzuk meg azt a legmélyebb hangot, amit a piccoloval játszani lehet, feltételezve, hogy a hang terjedési sebessége 330 m/s! b) A síp oldalában lévő lyukak a rezonáló légoszlop hosszát lerövidítik. A piccolo legmagasabb hangjának frekvenciája 4000 Hz; határozzuk meg az ennek megfelelően kialakuló állóhullám csomópontjainak egymástól való távolságát.

**18A-26** Egy  $10^{-3}$  kg/m lineáris tömegsűrűségű 3 m hosszú húr két pont között van kifeszítve. Az egyik végét transzverzális 200 Hz frekvenciával rezgetik. Mekkora feszítőerő hatására jön létre 3 félhullámból álló állóhullám a húron?

**18A-27** Egyik végén zárt orgonasíp alapfrekvenciája 110 Hz. a) Ha a hangsebesség a levegőben 340 m/s, milyen hosszú a síp? b) Milyen hosszú lenne a síp, ha mindkét vége nyitott volna? Mekkora a síp következő állóhullámának frekvenciája az a), illetve a b) kérdés esetén?

**18A-28** A cselló A húrjának alapfrekvenciája 220 rezgés/s. A rezgő szakasz hossza 70 cm, tömege 1,2 g. a) Határozzuk meg a húr feszítő erőt. b) Határozzuk meg annak a harmonikusnak a frekvenciáját, amelynek a húr mentén 3 duzzadóponja van.

**18A-29** Vékony sárgaréz rúdban a longitudinális hullámok sebessége 3480 m/s. Határozzuk meg az egyik végén befogott 1 m hosszú sárgaréz rúd longitudinális rezgései során keletkező állóhullámok két legkisebb frekvenciáját. Készítsünk vázlatot az állóhullámok alakjáról.

**18B-30** Az alábbi egyenlet egy kifeszített húron kialakult állóhullámot reprezentál:  $y = A \sin(2\pi x/\lambda) \sin(2\pi t/T)$ . A húr egyik vége az  $x = 0$  helyen, másik vége az  $x = l$  helyen van rögzítve. a) Határozzuk meg állóhullámok esetében  $\lambda$  és  $l$  kapcsolatát! b) Írjuk át (SI egységeket használva) a függvényt arra az esetre, amikor az amplitúdó 2 cm, a csomópontok távolsága 20 cm és a frekvencia 80 ciklus/s!

**18B-31** A marimba hangszeren az a fa-rúd, amely megütve hangot ad, úgy rezeg, hogy transzverzális állóhullámok alakulnak ki rajta, a rúd két végén duzzadópontokkal. A 40 cm hosszú rúd legkisebb frekvenciája 87 Hz. a) Határozzuk meg a rúdon kialakuló transzverzális hullám sebességét! b) A kibocsátott hangot a rúd középpontja alá helyezett függőleges rezonátorcső erősíti fel. Ha csak a cső felső vége nyitott és a hangsebesség levegőben 340 m/s, milyen hosszú legyen a cső, hogy a rúd rezgéseire rezonáljon.

**18B-32** Függőlegesen álló 1,2 m hosszú üvegcsőben tetszőesszrinti magasságra beállítható víz van. Rendelkezésünkre áll egy centiméter skála, hogy a vízszint és a cső (nyitott) felső vége közötti távolságot mérni tudjuk. A cső felső végéhez 528 Hz frekvenciával rezgő hangvillát tartunk. Határozzuk meg ezen a skálán azoknak a vízoszlopmagasságoknak megfelelő értékeket, amelyek mellett 20°C-os levegőben rezonancia jön létre!

**18B-33** Egy kifeszített húr alapfrekvenciája 400 rezgés/s. Mekkora lenne a húr alapfrekvenciája, ha hossza feleakkora, átmérője kétszer akkora és a feszítőerő négyszer akkora lenne?

### 18.10 A Doppler jelenség

**18A-34** Egy 20 m/s sebességgel haladó vonat utasai vasúti kereszteződéshez közelednek, ahol egy 400 Hz alapfrekvenciájú gong figyelmeztet a vonat közeledésére. Ezen a napon a hang terjedési sebessége levegőben 330 m/s. a) Milyen frekvenciájú hangot hallanak az utasok, amikor a kereszteződéshez közelednek? b) Milyen frekvenciájú hangot hallanak az utasok, amikor a kereszteződést elhagyják és távolodnak a gongtól? c) Milyen frekvenciát hallana a földön álló megfigyelő, ha a 20 m/s sebességgel közeledő vonaton lenne a 400 Hz frekvenciájú hangot kibocsátó gong?

**18A-35** Egy mentőautó jelzőgongjának alapfrekvenciája 500 rezgés/s. Egy napon, amikor a hang sebessége 340 m/s, egy ember az utcán 531 rezgés/s magassággal észleli a közeledő kocsi gongjának hangját. Mekkora sebességgel halad a kocsi?

**18B-36** Hangforrás és megfigyelő egymástól adott távolságra helyezkednek el. Ha a levegő mozdulatlan, a megfigyelő megállapítja a beérkező hang frekvenciáját, sebességét és hullámhosszát. Hogyan változnak meg ezek a paraméterek, a) ha állandó szél fúj a forrástól a megfigyelő felé, és b) ha a szél a megfigyelőtől a forrás felé fúj?

**18B-37** Egy napon, amikor a levegőben terjedő hang sebessége 330 m/s (és nem fúj a szél), egy hangforrás 1000 Hz frekvenciájú hangot ad ki. Milyen frekvenciát hall a megfigyelő az alábbi körülmények között: a) A megfigyelő 30 m/s sebességgel közeledik a forrás felé. b) A megfigyelő nyugalomban van, és a forrás közeledik a megfigyelő felé 30 m/s sebességgel. c) A megfigyelő is és a forrás is nyugalomban van, de most 30 m/s sebességű szél fúj a forrástól a megfigyelő felé.

### 18.11 A lökeshullámok

**18A-38** Léglökéses vadászgép 1,2 Mach sebességgel (azaz a levegőben terjedő hang sebességénél 1,2-szer gyorsabban) vízszintesen repül. A földi megfigyelő a gépet mekkora szög alatt látja a vízszintes fölött, amikor a hangrobbanást hallja?

**18A-39** Az aerodinamikában használatos *Mach szám* a repülőgép sebességének és a gépet környező levegőben terjedő hang sebességének a hányadosa. Ha a szuperszónikus *Concorde* gép 2,1 Mach sebességgel repül ott, ahol a helyi hangsebesség 320 m/s, mekkora a keletkező kúp alakú lökeshullám fél kúpszöge?

### 18.12 A lebegés

**18B-40** Egy orgonasíp hangmagassága azonos a zongora 440 Hz frekvenciájú hangjáéval, ha a hangsebesség a levegőben 340 m/s. A hőmérséklet annyira megnő, hogy a sebesség 346 m/s -ra növekedik. Mekkora lebegési frekvencia lesz hallható, ha ezt a hangot mindkét hangszer egyszerre bocsátja ki? (Tegyük fel, hogy a zongora hangmagassága nem változott meg.)

**18B-41** A zongoraklavírtúra bizonyos tartományaiban egynél több húrt is ugyanarra a hangra hangolnak, hogy a hangerő nagyobb legyen. Például a 110 Hz frekvenciájú hanghoz két erre hangolt húr tartozik. Mekkora lebegési frekvencia lesz hallható, ha az egyik húr feszítettsége a normális 600 N-ről 540 N-ra csökken, és a két húrt egyszerre ütjük meg?

### További feladatok

**18C-42** Mutassuk meg, hogy az  $y=A(x-ct)^n$  függvény a hullámegyenlet [(18-8) egyenlet] egy lehetséges megoldása, ahol  $A$ ,  $c$  és  $n$  állandók.

**18C-43** Mutassuk meg, hogy az  $y=Ae^{i(kx-\omega t)}$  függvény a hullámegyenlet egyik lehetséges megoldása, ahol  $i=\sqrt{-1}$ , és ahol  $A$ ,  $k$  és  $\omega$  állandók.

**18C-44** Mutassuk meg, hogy az  $y=f(x-vt)$  függvény a hullámegyenletnek megoldása.

**18C-45** A hegedűhúr egyik pontja transzverzális rezgést végez 500 rezgés/s frekvenciával és 1 mm amplitúdóval. Határozzuk meg ennek a pontnak a maximális sebességét és gyorsulását.

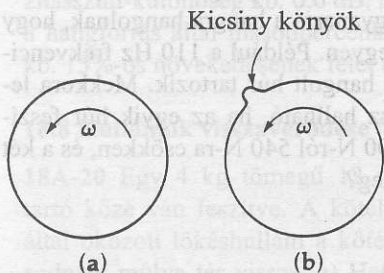
**18C-46** Kötélen haladó transzverzális hullám egyenlete  $y=0,02 \sin(5x-80t)$ , ahol  $x$  és  $y$  méterben,  $t$  másodpercben van adva. Határozzuk meg a) az amplitúdót, b) a frekvenciát, c) a hullámhosszat és d) a hullám terjedési sebességét a kötélen. e) Határozzuk meg a  $t=0$  időpontban az origótól 40 cm-re lévő pont kitérését. f) Határozzuk meg az e) részfeladatban adott pont transzverzális sebességét.

**18C-47** A Föld felszíne alatt 600 km mélyen a P és az S földrengéshullámok sebessége 10,3 km/s illetve 5,66 km/s. Minthogy a közeg három dimenziós kiterjedésű, ezért a P hullámokra vonatkozó (18-20) egyenletben  $K$

értékét  $[K + (4/3)G]$ -re módosítjuk. Feltéve, hogy a földközet sűrűsége azon a helyen  $3,9 \text{ g/cm}^3$ , számítsuk ki a  $K$  kompresszió moduluszt és a  $G$  nyírási moduluszt.

**18C-48** A villámcsapás távolságának becslésére ismert módszer a villám és az azt követő mennydörgés észlelése között eltelt másodpercek számlálásán alapul. A másodpercek számát hárommal osztva megkapjuk a villámcsapás kilométerekben mért távolságának közelítő értékét. Határozzuk meg ennek a számításnak százalékos hibáját  $20^\circ\text{C}$ -os levegő esetében.

**18C-49** Egy hajlékony lánccal lineáris tömegsűrűsége  $\mu$ . Hurkot alakítunk belőle, amit aztán  $\omega$  szögsebességgel forgásba hozunk. A hurok a forgás következtében olyan merevvé válik, akár egy karika (lásd a 18-24 ábrát). a) A gravitációt elhanyagolva mutassuk meg, hogy a lánccot feszítő erő  $\mu R^2 \omega^2$ ! (Útmutatás: Készítsünk vektorábrát a lánccal kicsiny  $\Delta\theta$  középponti szöghöz tartozó  $\Delta l$  hosszúságú ívére. Alkalmazzuk az  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  törvényt a körpályán mozgó  $\mu \Delta l$  tömegre.) b) Mutassuk meg, hogy a lánccal szabálytalanan kidudorodása térben állandó marad a lánccal forgása során.



**18-24 ábra**

A 18C-49 feladathoz.

**18C-50** Tegyük fel, hogy egy kifeszített gumiszalag a Hooke törvénynek eleget tevő,  $k$  rugóállandójú rugó módjára viselkedik (ami persze nincs így)! Tekintsünk egy gumiszalagot, amely eredeti hosszának kétszeresére van kinyújtva! Ha a szalagot „megpengetjük”,  $f_0$  frekvenciájú hangot ad. a) Mekkora lesz a hang frekvenciája, ha az eredeti hosszának négyszeresére kinyújtott szalagot pengetjük meg? (Ne felejtsük el figyelembe venni a lineáris tömegsűrűség megváltozását.) b) A valóságban is végezzük el a kísérletet! A frekvenciaviszonyok az a) részben kiszámítottól eltérők lesznek. A kísérleti eredmény magyarázatára írjuk le (kvalitatíve), hogy miben különbözik a gumiszalag viselkedése a szigorúan vett Hooke-törvény szerinti viselkedéstől.

**18C-51** a) Mennyivel nő meg a hang decibel szintje, ha intenzitása ötszörösre növekedik? b) Mekkora az amplitúdók aránya ami ekkora decibelváltozásnak felel meg?

**18C-52** Egy síkhullámban a felületegységre jutó energia a hullám térbeli terjedése során állandó (ha disszipatív

erők nincsenek jelen). a) Hogyan változik a távolsággal a pontszerű forrásból kibocsátott gömbhullám felületegységre jutó energiája? b) Hogyan változik ez egy lineáris forrásból emittált hengerhullám esetében? c) Hogyan változik az amplitúdó a távolság függvényében az a) feltétel mellett? d) illetve a b) feltétel mellett?

**18C-53** Egy  $0,40 \text{ N}$  erővel feszített húron  $100$  rezgés/s frekvenciájú folytonos transzverzális szinuszhullám halad. A húr lineáris tömegsűrűsége  $2 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ . Tervezzünk olyan illesztőt, ami lehetővé teszi, hogy ezek a hullámok visszaverődés nélkül jussanak egy azonosan kifeszített, de  $8 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$  lineáris tömegsűrűségű húrra.

**18C-54** Egy  $\rho$  sűrűségű,  $d$  átmérőjű huzal két, egymástól  $l$  távolságra rögzített tartó közé  $F$  erővel van kifeszítve. Határozzuk meg ezen paraméterek függvényében a) a transzverzális hullámok  $v$  sebességét, és b) az  $n$ -ik állóhullám  $f_n$  frekvenciáját.

**18C-55** Egy kötél úgy van kifeszítve, hogy a rajta haladó transzverzális hullámok sebessége  $16 \text{ m/s}$ . A kötélen létrejövő állóhullám csomópontjainak a távolsága  $2 \text{ m}$ . Ha a rezgések amplitúdójának maximuma  $2 \text{ cm}$ , mekkora a duzzadó pontok maximális transzverzális gyorsulása?

**18C-56** Egy acél zongorahúr lineáris tömegsűrűsége  $0,1 \text{ g/cm}^3$ . A húr  $500 \text{ N}$  erővel van kifeszítve. a) Milyen hosszú a húr, ha rezgésének alulfrekvenciája  $200 \text{ Hz}$ ? b) Ha a húr közepén az amplitúdó  $2 \text{ mm}$ , mekkora itt a maximális transzverzális sebesség?

**18C-57** Egy  $2 \text{ m}$  hosszú,  $2 \text{ g}$  tömegű húr egyik végét egy  $1 \text{ m}$  hosszú,  $1/4 \text{ g}$  tömegű húr végéhez erősítjük. Az így keletkezett  $3 \text{ m}$  hosszú húr szabad végeit  $3,6 \text{ N}$  erővel feszítve rögzítjük. Határozzuk meg annak az állóhullámnak a legkisebb frekvenciáját, amelynek csomópontja a hurok összeerősítésénél van.

**18C-58** Egy  $10 \text{ m/s}$  sebességgel haladó vonat függőleges síma sziklafalba vajt alagúthoz közeledik. A hangsebesség  $340 \text{ m/s}$ . A gépész  $300 \text{ Hz}$  frekvenciájú sípjelét ad. A vonat utolsó kocijának utasa egyidejűleg hallja a mozdony sípját és a falról visszaverődő visszhangot. a) Hány lebegést hall az utas másodpercenként? b) Mennyi lenne az utolsó kocsik közelében a földön álló megfigyelő által észlelt lebegési frekvencia? (Útmutatás: alkalmazzuk kétszer a Doppler egyenletet – először úgy, mintha a fal lenne a „megfigyelő”, majd úgy, mintha a fal lenne a „forrás”).

**18C-59** Egy hegedűs  $523 \text{ Hz}$  frekvenciájú hangot próbál megszólaltatni, de az ujjja nincs helyes távolságra a hegedűlábtól, és így a ténylegesen megszólaló hang frekvenciája  $530 \text{ Hz}$ . Ha az ujjja  $25 \text{ cm}$ -re van a hegedűlábtól, mennyivel és milyen irányban kell elmozdítania, hogy a hegedű a kívánt hangmagassággal szóljon?

**18C-60** Közvetlen behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy minden olyan  $f(y)$  függvény ahol  $y = (kx - \omega t)$ , a  $\partial^2 f / \partial t^2 = (\omega/k)^2 \partial^2 f / \partial x^2$  hullámegyenletnek megoldása.

## Távlatok

Miután a mechanika tárgyalását befejeztük, érdemes ismét visszatekinteni és rámutatni a téma legfontosabb jellegzetességeire. A mechanika feladatainak a megoldására alapvetően három fontos módszert ismertünk meg, ezek:

- (1) *A Newton törvények*
- (2) *Az energiára és impulzusra vonatkozó törvények, a munkatétel, valamint az erőimpulzus és az impulzus megváltozása közötti kapcsolat*
- (3) *A konzervatív erők és a hozzájuk rendelhető potenciális energia kapcsolata.*

Megmutattuk, hogy ezen törvényekben rejlő gondolatok segítségével hogyan magyarázható a jelenségek széles és változatos köre. Ki kell emelni két fontos speciális témakört: egyik az inerciaerők tárgyalása gyorsuló koordinátarendszerben, másik pedig a tömegvonzás törvénye, ebbe Newton elmélete segítségével nyertünk

bepillantást. Természetesen emellett jókora tényanyagot, fogalmakat és egyéb törvényeket is megismertünk. A mechanika lelkét azonban az előbbieken felsorolt néhány mély gondolat alkotja, olyan szilárd alapot és keretet szolgáltatva, amelyre biztosan építhetünk akkor is, amikor más jelenségeket vizsgálunk. A mechanika szinte minden problémájának a megoldása e nagy horderejű gondolatok egyikének alkalmazásával kezdődik.

A következő öt fejezetben megmutatjuk, hogy a hőhatás is alapvetően leírható a newtoni mechanika fogalmaival ha mikroszkopikus szinten tárgyaljuk azokat. (A hőt korábban egyik testről a másikra áramló titokzatos, súlytalan anyagnak képzelték.)

Különösen hatékonyak bizonyultak az energiára vonatkozó nagy jelentőségű megállapítások, a *termodinamika főtételei*, valamint ezek alkalmazása munkavégző gépek megalkotására. A második főtétel minden bizonnyal a fizika legmélyebb és legátfogóbb törvénye.

16C-51  $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84,5$  perc

16C-53 1,41 óra

16C-55  $\frac{GMm}{2R} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$

16C-57  $\frac{Gm}{R^2} \left( \frac{M}{4} - \frac{m}{3} \right)$

**XVII. Fejezet**

- 17B-1 90,0%
- 17B-3 A válasz adott.
- 17A-5 250 N
- 17A-7 20 cm
- 17B-9 a) 5000 kg/m<sup>3</sup> b) 667 kg/m<sup>3</sup>
- 17B-11 a) 2704 kg/m<sup>3</sup> b) 59,8 N
- 17B-13 0,89 kg/dm<sup>3</sup>
- 17B-15 4,00 mg
- 17B-17  $\Delta V/V = 0,0830$
- 17A-19  $1,77 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s
- 17A-21 40 cm/s
- 17B-23  $3,7 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup>
- 17B-25 4,49 atm
- 17B-27  $\rho Av^2$
- 17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm
- 17B-31 A válasz adott.
- 17C-33 allg
- 17C-35 0,933
- 17C-37  $(1 - 1/\sqrt{2})$
- 17C-39  $(1 - 1/\sqrt{2})$
- 17C-41 A válasz adott.
- 17C-43  $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$
- 17C-45 A válasz adott.
- 17C-47 27,3 cm<sup>3</sup>/s
- 17C-49  $H/2$

**XVIII. Fejezet**

- 18A-1 a)  $2,27 \times 10^{-3}$  s b) 0,782 m
- 18A-3 A válasz adott.
- 18A-5 8,33 cm
- 18B-7  $A = 7 \times 10^{-4}$  m,  $k = 3,14$  m<sup>-1</sup>,  $\omega = 6,28 \times 10^{-3}$  s<sup>-1</sup>
- 18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m d) 340 m/s
- 18B-11 18,56 m
- 18B-13 860 m
- 18A-15  $2,94 \times 10^{-16}$  J/cm<sup>3</sup>
- 18B-17 1,13  $\mu$ W
- 18B-19 A válasz adott.
- 18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang
- 18A-23 2,07 N
- 18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm
- 18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz

- 18A-29 870 Hz, 2610 Hz
- 18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m
- 18B-33 800 Hz
- 18A-35 19,9 m/s
- 18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz
- 18A-39 28,4°
- 18B-41 5,64 Hz
- 18C-43 A válasz adott.
- 18C-45 3,14 m/s,  $9,87 \times 10^3$  m/s<sup>2</sup>
- 18C-47  $K = 2,47 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>  
 $G = 1,25 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>
- 18C-49 b)  $v = R\omega$
- 18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24
- 18C-53  $\mu = 4,00 \times 10^{-3}$  kg/m, 2,50 cm hosszú
- 18C-55 12,6 m/s<sup>2</sup>
- 18C-57 60,0 Hz
- 18C-59 0,335 cm

**XIX. Fejezet**

- 19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni
- 19A-3  $3 \times 10^{-5}$  °C
- 19B-5  $2,17 \times 10^5$  N
- 19B-7 0,72 l
- 19A-9 6,44 kJ
- 19A-11 0,463 kJ/kg·°C
- 19A-13 0,431 joule/ g·°C
- 19A-15 0,122 kg
- 19B-17 0,126 kJ/kg·°C
- 19B-19 87,5
- 19B-21 A válasz adott.
- 19A-23 557 J/s
- 19A-25  $1,38 \times 10^8$  J
- 19B-27 a) 290 g b) 42,9 g
- 19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár
- 19A-31 5,00 W/m<sup>2</sup> °C
- 19B-33 2,84 J/s
- 19A-35 a) 61,1 kW·h b) \$3,67
- 19C-37 A válasz adott.
- 19C-39 a) 13,9 cm b)  $2,6 \times 10^{-5}$  (C°)<sup>-1</sup>
- 19C-41 8,0039 cm

19C-43 a)  $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$

- 19C-45 A válasz adott.
- 19C-47  $3,52 \times 10^4$  s = 9,78 h
- 19C-49 A válasz adott.
- 19C-51 A válasz adott.

**XX. Fejezet**

- 20A-1 48,5 l
- 20A-3 a) 4,48 m<sup>3</sup> b) 5,60 kg
- 20A-5 0,046 m<sup>3</sup>
- 20A-7 12,0 l
- 20A-9  $1,98 \times 10^5$  Pa