

Kalkulus

Sáfár Orsolya

Sorozatok

Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat voltaképpen egy hozzárendelési szabály, azaz egy olyan függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat.

Például $(a_n) = (\frac{1}{n})$ az a sorozat melynek első eleme 1, második eleme $\frac{1}{2}$, harmadik eleme $\frac{1}{3}$ Vigyázzunk, az első pár elem nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!

Például $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ módon is folytathattunk volna a fenti sorozatot, ha csak az első három elemet ismerjük.

A sorozat elemeit a_n -el jelöljük, az n számot az adott elem indexének nevezzük.

Valós számsorozatok tulajdonságai

Korlátosság: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat korlátos, ha találunk olyan K pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy $|a_n| \leq K$ az összes n indexre.

Példa: $(a_n) = ((-1)^n)$. Ekkor a $K = 1$ jó választás, hiszen $|(-1)^n| = 1 \leq 1$.

Példa 2: $(a_n) = (\sin(n))$. A $K = 1$ erre is jó választás, hiszen $|\sin(n)| \leq 1$, mert minden valós szám szinusza legfeljebb 1.

Világos, hogy nem csak egy korlát van. Ha ugyanis K korlát, akkor minden nála nagyobb szám is korlát. Nem is lesz fontos minden esetben megtalálni a legjobb korlátot. Például a fenti sorozatokra a $K = 2$ is jó korlát.

Valós számsorozatok tulajdonságai

Példa 3: $(a_n) = (n)$ nem korlátos, mert bármilyen valós számnál létezik nagyobb természetes szám (ezt az állítást Archimédeszi axiómának nevezik).

Indirekt bizonyítással könnyen ellentmondásra jutunk: ha lenne valamilyen K valós korlátja a sorozatnak, akkor vegyünk egy olyan természetes számot ami nagyobb K -nál. Az ennyiedik indexű tagja a sorozatnak pedig nem lenne kisebb a korlatnál.

Valós számsorozatok tulajdonságai

Monotonitás: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton nő, ha minden n indexre teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$. A sorozat szigorú monoton nő, ha $\geq$ helyett $>$ is igaz.

Példa: A konstans sorozat (amelynek minden egyes eleme ugyanaz a szám) monoton nő, de nem szigorúan monoton nő. Emellett ez a sorozat monoton csökken is.

Példa 2: Az $(a_n) = (n)$ sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$.

Hasonlóan definiálható a monoton csökkenő sorozat is. Ha valamilyen sorozatra az mondjuk, hogy monoton, akkor arra gondolunk, hogy vagy monoton nő, vagy monoton csökken.

Alapvető egyenlőtlenségek - Háromszög egyenlőtlenség

A sorozatok tulajdonságainak vizsgálatához szükségünk lesz négy alapvető egyenlőtlenségre.

Legyenek a és b tetszőleges valós számok, ekkor az

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

egyenlőtlenséget nevezik háromszög egyenlőtlenségnek. Az állítás például úgy igazolható, ha feloldjuk az abszolút értéket esetekre bontva a és b előjele szerint.

Alapvető egyenlőtlenségek - Számítási-mértani

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív valós számok. Ekkor a mértani közepük legfeljebb annyi lehet, mint a számtani közepük, azaz

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Az egyenlőtlenséget teljes indukcióval tudjuk bizonyítani, bár meglehetősen hosszadalmas.

Alapvető egyenlőtlenségek: $n < 2^n$

Legyen n egy pozitív természetes szám, ekkor

$$2^n > n.$$

Az egyenlőtlenség igazolása teljes indukcióval történik.

$n = 1$ -re igaz az állítás, mert $2 > 1$.

Indukciós lépés: tfh n -ig igaz, hogy $2^n > n$. Ekkor azt kell belátnunk, hogy $n + 1$ -re is teljesül. Ehhez felhasználjuk az **indukciós feltételt**, azaz, hogy $2^n > n$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n \geq n + 1.$$

Összeolvasva az egyenlőtlenséglánc két végét:

$$2^{n+1} > n + 1.$$

Azaz megmutattuk, hogy ha n -re igaz, akkor $n + 1$ -re is az, továbbá azt is, hogy $n = 1$ -re igaz. Ezzel igazoltuk minden természetes számra.

Alapvető egyenlőtlenségek - Bernoulli

Legyen a tetszőleges pozitív valós szám, n tetszőleges természetes szám. Az

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

egyenlőtlenség a Bernoulli-egyenlőtlenség. Bizonyítása például teljes indukcióval történhet.

Műveletek sorozatokkal

- ▶ Értelmezzük egy sorozat konstansszorosát, amely maga is egy sorozat, jele $c(a_n)$. A $c(a_n)$ sorozat minden eleme az eredeti sorozat elemeinek c -szerese.

Példa: Az (n^2) , azaz a $(1, 4, 9, \dots)$ kezdetű sorozat kétszerese a $(2n^2)$ sorozat, azaz a $(2, 8, 18, \dots)$ kezdetű sorozat.

- ▶ Két sorozat összegét úgy kapjuk, hogy vesszük az elemek összegét.

Példa: Az (n^2) és az (n) sorozat összege az $(n^2 + n)$ sorozat, azaz a $(2, 6, 12, \dots)$ kezdetű sorozat.

Az összeghez hasonlóan értelmezhetjük a sorozatok különbségét és a szorzatát. Hányadost csak akkor tudunk definiálni, ha azon sorozat, amellyel osztani szeretnénk, egyik eleme sem 0.

Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

Állítás: Két korlátos sorozat összege is korlátos.

Nevezzük az első sorozatot (a_n) -nek, a korlátját K_a -nak, a második sorozatot (b_n) -nek, az ő korlátját K_b -nek. Az állítás igazolásához tekintsük egy tetszőleges elemet az összegsorozatból! A

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq K_a + K_b$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az összeg is korlátos, mert a $K_a + K_b$ jó korlát lesz $(a_n + b_n)$ -re.

Műveletek és korlátosság

Hasonlóképpen igazolható, hogy az $(a_n - b_n)$ és az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is korlátos marad.

Sajnos a hányadosra viszont nem feltétlen teljesül a korlátosság.

Példa: $(a_n) = (1)$ és $(b_n) = (\frac{1}{n})$. Mindkét sorozat korlátos, még hozzá az 1 mindkettőnek korlátja. Viszont a hányadosra nem teljesül a korlátosság, hiszen:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n,$$

amely mutatja, hogy a hányadossorozatnak nincsen felső korlátja.

Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

Állítás: Két monoton növő sorozat összege is monoton növő.

Nevezzük az első sorozatot (a_n) -nek, a második sorozatot (b_n) -nek. Az állítás igazolásához adjuk össze az $a_n \leq a_{n+1}$ és a $b_n \leq b_{n+1}$ egyenlőtlenségeket!

A

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1}$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az összeg is monoton nő.

Műveletek és monotonitás

Sajnos a különbség már nem őrzi meg a monotonitást. Meglepő módon a szorzás sem.

Példa: Legyen $(a_n) = n^2$, $(b_n) = \left(\frac{-1}{n}\right)$. Mindkét sorozat szigorú monoton nő, a szorzatuk, $(a_n b_n) = (-n)$ viszont szigorú monoton csökken!

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására

Állítás: Az $(e_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos és monoton nő.

A bizonyításhoz alakítsuk át a sorozat elemeit.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \dots \frac{n+1}{n}$$

Innen:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1 \cdot \frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \dots \frac{n+1}{n}}$$

Azaz a kifejezés felfogható $n+1$ darab szám mértani közepének.
Ugyanezen számok számtani közepe:

$$\frac{1 + \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n} + \dots + \frac{n+1}{n}}{n+1} = \frac{1 + n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására - folyt.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $n + 1$ -edik hatványra emelve:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ami mutatja, hogy a sorozat monoton nő.

Ha az első lépésben az $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \dots \frac{n+1}{n}$ átírásból indulunk ki, akkor hasonló lépésekkel igazolhatjuk, hogy $e_n \leq 4$.

Sorozat határértéke

Szeretnénk jellemezni a sorozat viselkedését nagy indexek esetén, erre szolgál a következő két definíció.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke ∞ ha bármilyen nagy pozitív P számhoz található olyan $N(P)$ küszöbindex, hogy a sorozat összes küszöbnél nagyobb indexű eleme a P számnál nagyobb. Jele: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

Definíció (az igazi): Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke ∞ ha $\forall P \in \mathbb{R}^+$ -ra $\exists N(P) \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > P$ teljesül $\forall n > N(P)$ -re.

Példák

Példa: Az $(a_n) = (n)$ sorozat végtelenbe tart, mert az

$$a_n = n > P$$

egyenlőtlenség teljesül minden $n > [P]$ indexre.

Példa 2: Az $(b_n) = (2^n)$ sorozat végtelenbe tart, mert felhasználva a $2^n > n$ (minden n pozitív természetes számra) egyenlőtlenséget:

$$a_n = 2^n > n > P$$

az egyenlőtlenség mutatja, hogy $N(P) = [P]$ küszöb itt is alkalmas.

Sorozat határértéke

Másfajta viselkedés jellemzi a véges határértékkel rendelkező sorozatokat.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke a $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha bármilyen kicsi pozitív ε távolsághoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy a sorozat összes küszöbnél nagyobb indexű eleme az ε távolságnál közelebb esnek A -hoz. Jele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

Definíció (az igazi): Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke a $A \in \mathbb{R}$ szám ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül $\forall n > N(\varepsilon)$ -ra.

Azon sorozatokat, amelyeknek létezik véges határértéke konvergensnek nevezzük.

Példa

Példa: Legyen $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$!

Ehhez a sorozat elemeinek és a határértéknek a távolságáról kell megmutatnunk, hogy kicsi lesz, ha az index elég nagy. Azaz:

$|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ -ről kell megmutatnunk, hogy kicsi, minden ε -nál kisebb. Így az kell belátnunk, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha n elég nagy. Szorozzuk be mindkét oldalt $n > 0$ -val és osszuk el $\varepsilon > 0$ -val!

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

Ez az egyenlőtlenség mutatja, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Innen

megfelelő küszöbindex $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

Példa

Példa 2: Legyen $(b_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$!

Most $|b_n - A| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n}$ -ről kell megmutatnunk, minden ε -nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha n elég nagy. Ehhez felhasználjuk, hogy $2^n > n$, ha n pozitív egész. Innen:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

így az előbbi $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ küszöb ehhez a sorozathoz is jó.

Konvergenca és korlátosság kapcsolata

Állítás: Minden konvergens sorozat korlátos.

Ennek az állításnak az igazolása a konvergens sorozatok definíciójának közvetlen felhasználásával történik.

Az állítás megfordítása nem igaz, korlátos sorozatok nem feltétlen konvergenssek, például a $((-1)^n)$ sorozat korlátos, de nem kerül közel egyetlen számhoz, bármilyen nagy indexet tekintek is.

A két tulajdonság közötti kapcsolatot úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a korlátosság szükséges, de nem elégséges feltétele a konvergenciának.

Konvergenca elégséges feltétele

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergenca.

Erre két példa a $((-1)^n \frac{1}{n})$ sorozat, amely nem monoton, de konvergens.

Illetve a (n) sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens. Ugyanakkor:

Állítás: Ha sorozat korlátos és monoton akkor konvergens.

Ezek szerint az $(e_n) = ((1 + \frac{1}{n})^n)$ sorozat konvergens.

Ugyanakkor az állítás nem megfordítható, mint láttuk nem minden konvergens sorozat monoton!